УДК 621.375.7

О ПРЕДЕЛЬНОМ ТОКЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ГОФРИРОВАННОМ ЛАЙНЕРЕ

В. Г. Гапанович

Исследовано равновесное состояние тонкого трубчатого сильноточного электронного пучка в гофрированном лайнере с специальной формой профиля, создающего синусоидальную в продольном направлении модуляцию кулоновского поля. Получено выражение для предельного тока. Исследовано влияние глубины и длины периода гофрировки на предельный ток и величину продольной модуляции электрического поля пучка.

В квазистатическом методе коллективного ускорения ионов, предложенном в работе [1], необходимо создавать пространственно-периодическую модуляцию кулоновского поля электронного пучка. Наиболее просто это достигается применением гофрированного лайнера, в котором распространяется сильноточный электронный пучок (СЭП) [2]. При практической реализации возникает задача выбора формы гофрировки лайнера, чтобы получить требуемое распределение электрического поля пучка. В работе [2] эта задача была рассмотрена как для сплошного, так и для трубчатого СЭП. Подобная задача в нерелятивистском пределе рассмотрена также в работе [3]. Развитый в работе [2] метод решения позволил определить профиль лайнера, создающий синусоидальную продольную модуляцию потенциала, а также получить ряд соотношений для оценки амплитуды электрического поля, модуляции плотности заряда и других параметров равновесного состояния трубчатого пучка. Однако эти соотношения получены для сравнительно частной геометрической конфигурации, когда радиус пучка совпадает с внутренним радиусом гофра. В настоящей работе, использующей в основном аналогичный подход, получено решение задачи в более общей постановке. Исследован важный для практики вопрос о предельном токе транспортировки и определены параметры равновесного состояния СЭП в гофре как при предельном, так и при допредельном значениях тока.

Пусть вдоль оси бесконечного цилиндрического гофрированного лайнера распространяется «замороженный» сильным продольным магнитным полем трубчатый СЭП с исчезающе малой толщиной стенки. Будем считать заданными ток пучка J, ускоряющее анодное напряжение U_a и геометрические параметры r_0, r_1, r_2 и L, обозначающие соответственно радиус пучка, внутренний и внешний радиусы гофра и период гофрировки. Ниже используются безразмерные величины, причем потенциал нормируется на $mc^2/e=0.51$ МВ, ток — на $mc^3/e=17$ кА, а радиусы и длины — на $k^{-1}\equiv L/2\pi$ (m, e, c — масса, заряд электрона и скорость света).

В системе координат $x=kr$ и $\xi=kz$ продольный профиль гофра описывается непрерывной и однозначной функцией $f(x, \xi)=0$ (рис. 1). Эта функция будет детерминирована, если потребовать, например, чтобы при заданных выше параметрах пучка и гофра потенциал электрического поля пучка имел во внутренней области гофра гармоническую зависимость от продольной координаты вида

$$\varphi(x, \xi) = A(x) - B(x)\cos\xi.$$

В приближении «холодной» гидродинамики равновесное состояние пучка можно описать системой уравнений

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=0,\ \partial j_\xi/\partial\xi=0,\ \varphi+\gamma=\gamma_a, \tag{1}$$

где j_ξ — плотность тока, γ — приведенная энергия электрона, $\gamma_a=1+|U_a|$. Соответствующее решение уравнения Лапласа для области I в полости пучка и для области II снаружи пучка имеет вид

$$\begin{gathered}\varphi_I=C_1+DI_0(x)\cos\xi,\ 0\leqslant x\leqslant x_0,\\ \varphi_{II}=C_2+E\ln x+[DI_0(x)+FK_0(x)]\cos\xi,\ x>x_0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $x_0=kr_0$; $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка; C_1, C_2, D, E, F — константы, которые конкретизируются условиями на границе пучка ($x=x_0$)

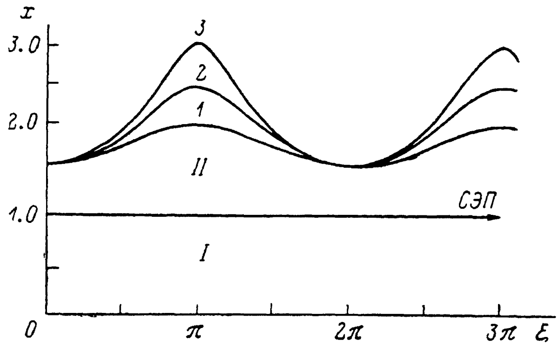


Рис. 1. Примеры продольного профиля лайнера с различной глубиной гофрировки при $x_0=1$, $x_1=1.5$, $x_2=2.0$ (*1*), 2.5 (*2*) и 3.0 (*3*).

$$\varphi_I=\varphi_{II},\quad \frac{\partial\varphi_I}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{II}}{\partial x}=4\pi\sigma, \tag{3}$$

где σ — поверхностная плотность заряда. Пусть потенциал на границе пучка равен

$$\varphi=a(1-\delta\cos\xi), \tag{4}$$

где a и δ — среднее значение и глубина модуляции потенциала. Из равенств (1) получим выражение

$$\sigma=\frac{J}{2\pi x_0}\frac{\gamma_a-a(1-\delta\cos\xi)}{\sqrt{[\gamma_a-a(1-\delta\cos\xi)]^2-1}}. \tag{5}$$

Приближенно представим, как и в работе [2], периодическую функцию (5) гармонической функцией, имеющей такие же, что и (5), минимальные и максимальные значения (например, в точках $\zeta=0$ и π). Нетрудно убедиться, что аппроксимирующая функция имеет вид

$$\tilde\sigma=\frac{a}{4\pi}(p-q\cos\xi), \tag{6}$$

где

$$p=\frac{J}{x_0a}\left\{\frac{\gamma_a-a(1+\delta)}{\sqrt{[\gamma_a-a(1+\delta)]^2-1}}+\frac{\gamma_a-a(1-\delta)}{\sqrt{[\gamma_a-a(1-\delta)]^2-1}}\right\}, \tag{7}$$

$$q=\frac{J}{x_0a}\left\{\frac{\gamma_a-a(1+\delta)}{\sqrt{[\gamma_a-a(1+\delta)]^2-1}}-\frac{\gamma_a-a(1-\delta)}{\sqrt{[\gamma_a-a(1-\delta)]^2-1}}\right\}. \tag{8}$$

Теперь, используя граничные условия (3) с учетом (6), находим значения констант и получаем следующие выражения для потенциала:

$$\varphi_I/a = 1 - \delta \frac{I_0(x)}{I_0(x_0)} \cos \xi, \tag{9}$$

$$\varphi_{II}/a = 1 - px_0 \ln \frac{x}{x_0} - \left\{ qx_0 [I_0(x_0) K_0(x) - K_0(x_0) I_0(x)] + \delta \frac{I_0(x)}{I_0(x_0)} \right\} \cos \xi. \tag{10}$$

Потенциал на стенке металлического лайнера должен быть равен нулю, как это следует из закона сохранения энергии (1). Приравнивая нулю потенциал (10), получаем уравнение профиля гофра

$$1 - px_0 \ln \frac{x}{x_0} - \left\{ qx_0 [I_0(x_0) K_0(x) - K_0(x_0) I_0(x)] + \delta \frac{I_0(x)}{I_0(x_0)} \right\} \cos \xi = 0. \tag{11}$$

Искомые профиль и распределение потенциала, создаваемое гофром, будут найдены, если определить неизвестные пока четыре коэффициента p, q, δ и a. Эти коэффициенты находятся из следующей системы уравнений:

$$px_0 \ln \frac{x_1}{x_0} + qx_0 [I_0(x_0) K_0(x_1) - K_0(x_0) I_0(x_1)] + \delta \frac{I_0(x_1)}{I_0(x_0)} = 1,$$

$$px_0 \ln \frac{x_2}{x_0} - qx_0 [I_0(x_0) K_0(x_2) - K_0(x_0) I_0(x_2)] - \delta \frac{I_0(x_2)}{I_0(x_0)} = 1,$$

$$p + q = \frac{2J}{x_0 a} \frac{\gamma_a - a(1+\delta)}{\sqrt{[\gamma_a - a(1+\delta)]^2 - 1}},$$

$$p - q = \frac{2J}{x_0 a} \frac{\gamma_a - a(1-\delta)}{\sqrt{[\gamma_a - a(1-\delta)]^2 - 1}},$$

где $x_1 = kr_1$ и $x_2 = kr_2$.

Первая пара системы уравнений представляет собой условие, чтобы профиль гофра проходил через две заданные точки с координатами (x, ξ), равными $(x_1, 0)$ и (x_2, π). Вторая пара является следствием уравнений (7) и (8). Можно свернуть систему к одному уравнению относительно δ вида

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)\delta + \varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\gamma_* \sqrt{\left[\gamma_a - (\gamma_a - \gamma_*) \frac{1-\delta}{1+\delta}\right]^2 - 1}}{\sqrt{\gamma_*^2 - 1} \left[\gamma_a - (\gamma_a - \gamma_*) \frac{1-\delta}{1+\delta}\right]}. \tag{12}$$

При этом остальные коэффициенты выражаются через δ следующим образом:

$$p = \alpha_1 \delta + \varepsilon_1, \quad q = \alpha_2 \delta + \varepsilon_2, \quad a = (\gamma_a - \gamma_*)/(1+\delta), \tag{13а)—(13в}$$

$$J = \sqrt{\gamma_*^2 - 1} (\gamma_a - \gamma_*) x_0 [(\alpha_1 + \alpha_2)\delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2]/2\gamma_* (1+\delta). \tag{13г}$$

В уравнении (12) вместо тока J фигурирует параметр γ_* — энергия (минимальная) электрона в точке $\xi = \pi$. Остальные величины зависят только от геометрических размеров и равны

$$\alpha_1 = [I_0(x_2) K_0(x_1) - I_0(x_1) K_0(x_2)]/G, \tag{14а}$$

$$\varepsilon_1 = \{I_0(x_0)[K_0(x_1) + K_0(x_2)] - K_0(x_0)[I_0(x_1) + I_0(x_2)]\}/G, \tag{14б}$$

$$\alpha_2 = -\left[I_0(x_1) \ln \frac{x_2}{x_0} + I_0(x_2) \ln \frac{x_1}{x_0}\right] \Big/ I_0(x_0) G, \tag{14в}$$

$$\varepsilon_2 = \ln \frac{x_2}{x_1} \Big/ G, \tag{14г}$$

$$G = x_0 \ln \frac{x_1}{x_0} [I_0(x_0) K_0(x_2) - K_0(x_0) I_0(x_2)] +$$

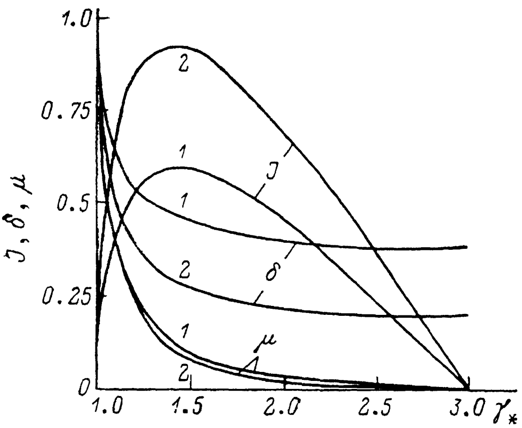
$$+ x_0 \ln \frac{x_2}{x_0} [I_0(x_0) K_0(x_1) - K_0(x_0) I_0(x_1)]. \tag{14д}$$

Приближенное решение уравнения (12) можно получить, линеаризуя по δ радикал в правой части и приводя к квадратичному уравнению

$$[(2\gamma_a\gamma_*^2-\gamma_*^3-\gamma_a)\,\alpha_2-(\gamma_a-\gamma_*)\,\alpha_1]\,\delta^2+[\gamma_*(\gamma_*^2-1)\,\alpha_2+ \\ +(2\gamma_a\gamma_*^2-\gamma_*^3-\gamma_a)\,\varepsilon_2-(\gamma_a-\gamma_*)\,\varepsilon_1]\,\delta+\gamma_*(\gamma_*^2-1)\,\varepsilon_2=0. \qquad (15)$$

Из двух корней выбирается тот, который удовлетворяет очевидному условию $0\leqslant\delta\leqslant 1$. Мы не будем выписывать громоздкое выражение для δ, а лишь отметим, что точность приближенного решения, как правило, не хуже 5—10 %.

На рис. 2 приведены результаты расчета параметров равновесного состояния J, δ и $\mu=q/p$ в зависимости от γ_*. Величина δ определялась путем численного решения уравнения (12). Из рис. 2 видно, в частности, что кривая $J(\gamma_*)$ имеет характерный вид, как и в гладкой трубе [4]. Предельный ток пучка, соответствующий максимуму этой кривой, легко определяется из анализа на



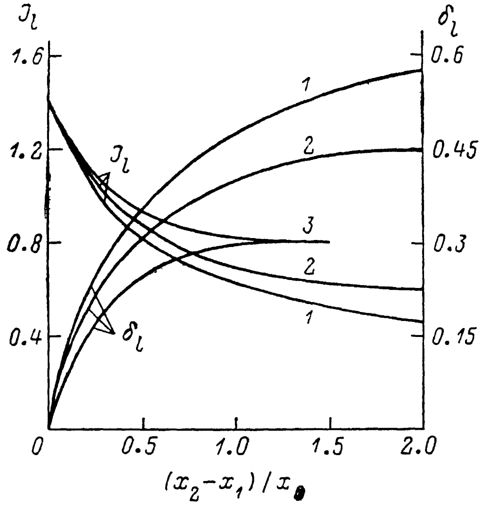


Рис. 2. Ток пучка J, модуляция поля δ и модуляция плотности заряда $\mu=q/p$ как функц энергии электрона γ_* для двух значений глубины гофра $(x_2-x_1)/x_0=2.0$ (*1*) и 0.4 (*2*) и $\gamma_a=3$, $x_0=0.6$, $x_1=0.9$.

Рис. 3. Предельный ток J_l и модуляция поля δ_l в зависимости от глубины гофра для трех значений параметра ($k=0.1$ (*1*), 0.3 (*2*) и 0.5 см$^{-1}$ (*3*) при $\gamma_a=3$, $r_0=2$ см, $r_1=3$ см.

экстремум выражения (13г). Предельные значения, которые пометим индексом «l», равны

$$\gamma_l=\gamma_a^{1/3},$$

$$J_l=(\gamma_a^{2/3}-1)^{3/2}\,x_0\,[(\alpha_1+\alpha_2)\,\delta_l+\varepsilon_1+\varepsilon_2]/2\,(1+\delta_l). \qquad (16)$$

Глубина модуляции потенциала находится из уравнения (12) при $\gamma_*=\gamma_l$. Приближенное ее значение равно

$$\delta_l=\{\varepsilon_1-2\gamma_a^{2/3}\varepsilon_2-\alpha_2-[(\varepsilon_1-2\gamma_a^{2/3}\varepsilon_2-\alpha_2)^2- \\ -4\varepsilon_2\,(2\gamma_a^{2/3}\alpha_2-\alpha_1)]^{1/2}\}/(4\gamma_a^{2/3}\alpha_2-2\alpha_1). \qquad (17)$$

В случае равенства большого и малого радиусов, когда гофр вырождается в гладкую трубу, соотношение (16) дает известную формулу предельного тока тонкого трубчатого СЭП [4]

$$J_l=(\gamma_a^{2/3}-1)^{3/2}/2\ln\frac{x_2}{x_0}.$$

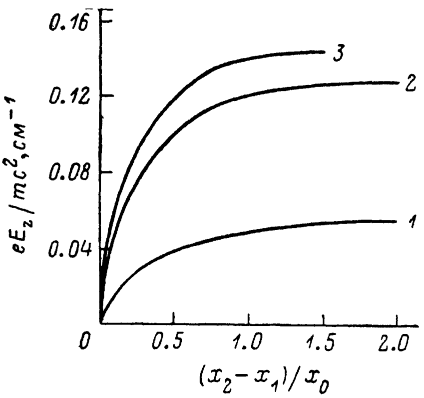
Исследуем теперь характер полученных решений при изменении глубины гофра или его периода. Численный анализ решения показал, что существует ограничение на выбор максимальной глубины гофра, связанное с использованием приближения (6). Оказалось, что если задать глубину гофра $\Delta x = x_2 - x_1$, превышающую некоторую величину $\Delta x_{\text{опт}}$, то в уравнении профиля гофра (11) появится второе решение, которое будет меньше основного. Это приведет к тому, что все вычисленные параметры фактически будут соответствовать гофру с меньшей, чем $\Delta x_{\text{опт}}$, глубиной. Оценим величину $\Delta x_{\text{опт}}$. Это можно сделать из анализа на экстремум соотношения (14 г). Разложив функцию $d\varepsilon_2/dx_2$ в ряд по степеням Δx

$$d\varepsilon_2/dx_2 \simeq [K_0(x_0) I_0(x_1) - I_0(x_0) K_0(x_1)] \left(\frac{\Delta x^2}{2} + \Delta x - 2\right)$$

и приравняв нулю, получим

$$\Delta x_{\text{опт}} = \sqrt{5} - 1 \quad \text{или} \quad \Delta r_{\text{опт}} = (r_2 - r_1)_{\text{опт}} \simeq \frac{\sqrt{5} - 1}{2\pi} L.$$

Найденные выше выражения для параметров равновесного состояния пучка нужно применять тогда, когда глубина гофра не превышает $\Delta r_{\text{опт}}$.



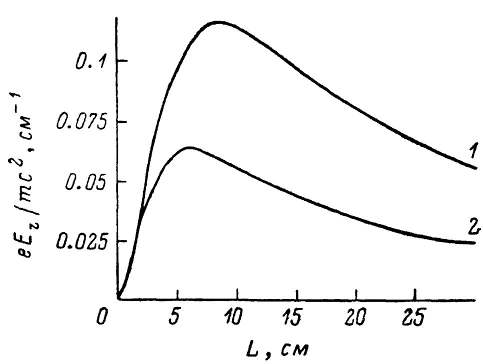


Рис. 4. Амплитуда продольного электрического поля на оси пучка в зависимости от глубины гофра при различных k. $J = J_l$, остальные параметры те же, что и на рис. 3.

Рис. 5. Амплитуда продольного электрического поля на границе пучка в зависимости от длины периода гофрировки при $J = 6$ кА, $\gamma_a = 3$, $r_0 = 1$ см, $r_1 = 1.5$ см, $r_2 = 3$ см (*1*) и $r_0 = 1.8$ см, $r_1 = 2.2$ см, $r_2 = 3$ см (*2*).

На рис. 3, 4 представлены семейства графиков предельного тока, глубины модуляции потенциала и амплитуды продольного электрического поля как функций глубины гофра для нескольких значений периода гофрировки. Видно, что особенностью этих зависимостей является выход всех величин на насыщение при увеличении глубины гофра вплоть до $\Delta x_{\text{опт}}$.

Рис. 5 иллюстрирует зависимость амплитуды продольного электрического поля пучка от длины периода гофрировки. Видим, что существует оптимальная длина периода, при которой амплитуда поля максимальная. Анализ численных результатов показывает, что при $r_1/r_0 \geqslant 1.2$

$$L_{\text{опт}} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{5} - 1} r_1 \ln \frac{r_2}{r_0}.$$

Полученные соотношения позволяют выбрать оптимальные размеры гофра, при которых можно получить наибольшую амплитуду ускоряющего поля.

Автор выражает благодарность Р. А. Мещерову за полезное обсуждение результатов.

Литература

[1] *Беликов В. В., Лымарь А. Г., Хижняк Н. А.* Письма в ЖТФ, 1975, т. 1, № 13, с. 615—618.
[2] *Лебедев А. Н., Пазин К. Н.* Атомная энергия, 1976, т. 41, № 4, с. 244—247.
[3] *Лымарь А. Г., Папкович В. Г., Хижняк Н. А.* ЖТФ, 1979, т. 49, № 1, с. 196—198.
[4] *Агафонов А. В., Воронин В. С., Лебедев А. Н., Пазин К. Н.* ЖТФ, 1974, т. 44, № 9, с. 1909—1916.

Поступило в Редакцию
11 февраля 1986 г.
В окончательной редакции
4 января 1987 г.