

УДК 538.561

## НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЗАМАГНИЧЕННОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ

Н. С. Гинзбург, А. С. Сергеев, М. Д. Токман

Получена и исследована самосогласованная система уравнений, описывающая нелинейную стадию вынужденного комбинационного рассеяния электромагнитных волн на винтовых и прямолинейных релятивистских электронных пучках, движущихся в однородном магнитном поле. Прослежена аналогия с мазерами на циклотронном резонансе, работающими в области нормального и аномального эффекта Доплера. Рассмотрен предельный переход к волне накачки нулевой частоты — периодическому магнитостатическому (ондуляторному) полю. Исследован эффект излучения винтовых электронных пучков на полциклотронном резонансе.

### Введение

В недавних экспериментах [1, 2] сообщалось о наблюдении коротковолнового излучения, обусловленного вынужденным комбинационным рассеянием (ВКР) электромагнитных волн на винтовом релятивистском электронном пучке (РЭП), движущемся в однородном магнитном поле  $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{z}_0$ . Соответствующие условия комбинационного синхронизма имеют вид

$$\omega_s - \omega_i - (\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \mathbf{v}_\parallel = n\omega_H, \quad \omega_s + \omega_i - (\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i) \mathbf{v}_\parallel = n\omega_H, \quad (1), (2)$$

где  $n$  — целое число;  $v_\parallel$  — поступательная скорость электронов;  $\omega_H = eH_0/mc\gamma$  — циклотронная частота;  $\gamma$  — релятивистский масс-фактор;  $\omega_{s, i}$ ,  $\mathbf{k}_{s, i}$  — частоты и волновые векторы полей сигнала (индекс «s») и накачки (индекс «i»); предполагается, что частота сигнальной волны превосходит частоту волны накачки:  $\omega_s \geq \omega_i$ .<sup>1</sup>

Характер энергообмена РЭП с электромагнитными волнами может быть легко установлен из квантового рассмотрения элементарных актов рассеяния, соответствующих синхронизмам (1), (2). С этой целью перейдем в сопровождающую систему отсчета  $K'$ , движущуюся с поступательной скоростью электронов. В этой системе отсчета после домножения на постоянную Планка  $\hbar$  условия (1), (2) могут быть проинтерпретированы как законы сохранения энергии в элементарных актах рассеяния

$$\hbar\omega'_s - \hbar\omega'_i = n\hbar\omega'_H, \quad \hbar\omega'_s + \hbar\omega'_i = n\hbar\omega'_H. \quad (1a), (2a)$$

Очевидно, величина  $n$  представляет собой разность квантовых чисел, нумерующих энергетические уровни электрона в однородном магнитном поле (уровни Ландау [3]).

<sup>1</sup> В экспериментах [1, 2] в качестве волны накачки использовалось периодическое магнитостатическое (ондуляторное) поле, которое можно рассматривать как волну с нулевой частотой ( $\omega_i = 0$ ) и волновым вектором  $\mathbf{k}_i = (2\pi/d)\mathbf{l}_0$ , где  $d$  — период модуляции магнитного поля,  $\mathbf{l}_0$  — единичный вектор в направлении оси ондулятора.

При выполнении условия (1а) в элементарном акте рассеяния происходит излучение кванта высокочастотной сигнальной волны ( $+\hbar\omega'_i$ ), поглощения ( $-\hbar\omega'_i$ ) низкочастотного кванта накачки и переход электрона на более низкий ( $n > 0$ ) или более высокий ( $n < 0$ ) энергетический уровень Ландау (рис. 1, а, б). В первом случае поперечный импульс электрона уменьшается, а во втором, напротив, растет. По аналогии с одноквантовыми радиационными процессами [4] первый режим рассеяния будем называть рассеянием в условиях нормального эффекта Доплера, а второй — в условиях аномального эффекта Доплера. Реализация того или иного режима рассеяния зависит от соотношения между поступательной скоростью электронов  $v_{\parallel}$  и фазовой скоростью  $v_1^0 = (\omega_s - \omega_i)/k_s^0 - k_i^0$  виртуальной волны биений (комбинационной волны). При  $v_{\parallel} < v_1^0$  реализуется первый, а при  $v_{\parallel} > v_1^0$  второй режим рассеяния.

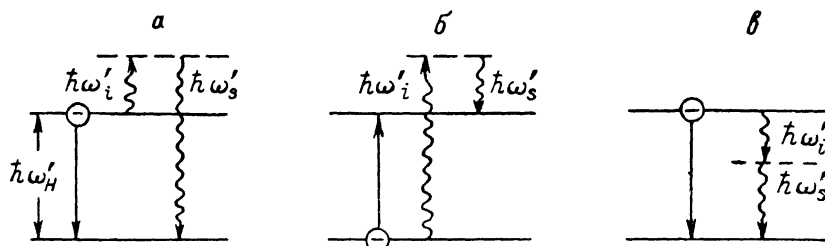


Рис. 1. Основные варианты двухфотонного взаимодействия электромагнитного излучения с электронами в магнитном поле.

В вакууме условие синхронизма (2а) может быть выполнено только при  $n > 0$ .<sup>2</sup> В этом случае, согласно (2а), переход электрона на нижележащий уровень Ландау сопровождается одновременным испусканием ( $+\hbar\omega'_{s,i}$ ) двух квантов электромагнитных волн (рис. 1, в). Очевидно, в такой ситуации амплитуды волн сигнала и накачки будут расти одновременно за счет энергии, черпаемой из электронного пучка. Отметим, что вырожденным ( $\omega_s = \omega_i = \omega$ ) случаем этого режима рассеяния является излучение винтового электронного пучка на полудиклотронном резонансе

$$\omega - kv_{\parallel} = \omega_H/2. \quad (3)$$

В рамках линейной теории ВКР на замагниченных электронных потоках исследовалось в [1, 2, 5, 6]. Данная работа посвящена нелинейной теории указанных процессов (усредненное движение частиц в условиях синхронизма (1) исследовано ранее в [7]). Следуя [8], вынужденное ондуляторное излучение рассматривается в работе как частный случай вынужденного рассеяния, соответствующий предельному переходу к волне накачки нулевой частоты.

## 1. Усредненные уравнения движения электронов

Рассмотрим неколлинеарное рассеяние на РЭП двух плоских волн, распространяющихся под углами  $\chi_{s,i}$  к направлению однородного магнитного поля  $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{z}_0$  и задающихся вектор-потенциалами

$$A_{s,i} = \text{Re} [y_0 a_{s,i} e^{i(k_{s,i}^x x + k_{s,i}^y y - \omega_s t)}], \quad (4)$$

где

$$k_{s,i}^x = \frac{\omega_{s,i}}{c} \cos \chi_{s,i}, \quad k_{s,i}^y = \frac{\omega_{s,i}}{c} \sin \chi_{s,i}$$

— продольные и поперечные составляющие волнового вектора,  $a_{s,i}$  — медленно меняющиеся комплексные амплитуды волн. Предполагается, что элек-

<sup>2</sup> В замедляющей среде ( $\omega_{s,i}/k_{s,i}^{\parallel} < v_{\parallel}$ ) возможно выполнение (2) и при  $n < 0$ . В такой ситуации излучение двух квантов электромагнитных волн будет сопровождаться переходом электрона на вышележащий энергетический уровень, т. е. увеличением поперечного импульса электрона.

трические поля волн ортогональны направлению поступательного движения частиц ( $TE$ -поляризация).<sup>3</sup>

В качестве невозмущенного движения выберем движение электрона по винтовой траектории в однородном магнитном поле

$$\begin{aligned} p_x &= -p_{\perp} \sin \varphi, \quad p_y = p_{\perp} \cos \varphi, \quad p_z = p_{\parallel}, \\ x &= X + r_H \cos \varphi, \quad y = Y + r_H \sin \varphi, \quad z = v_{\parallel} t, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $p_{\perp, \parallel} = m\gamma v_{\perp, \parallel}$  — поперечные и продольные компоненты импульса электрона;  $v_{\perp, \parallel}$  — соответствующие компоненты скорости;  $r_H = v_{\perp} / \omega_H$  — ларморовский радиус электрона;  $X, Y$  — координаты ведущего центра ларморовской орбиты;  $\varphi = \omega_H t + \varphi_0$  — угловая координата частицы относительно ведущего центра.

В условиях резонансов (1), (2) угол  $\varphi$  удобно выразить через фазу комбинационной волны

$$\varphi = n(\theta_{1,2}^c - \theta).$$

Здесь  $\theta_{1,2}^c = (\omega_s \mp \omega_i) t - (k_s'' \mp k_i'') z - (k_s^{\pm} \mp k_i^{\pm}) X$  — значение фазы волны биеений в точке ведущего центра,  $\theta$  — фаза циклотронного вращения электрона относительно фазы резонансной комбинационной волны,  $n$  — номер используемой циклотронной гармоники (см. условия синхронизма (1), (2)).

В присутствии электромагнитных волн (4) величины  $p_{\perp, \parallel}$ ,  $\theta$ ,  $X, Y$  становятся, вообще говоря, функциями времени. Поскольку каждая из парциальных волн в отдельности несинхронна с электронами ( $|\omega_s, i - k_s^{\parallel}, i v_{\parallel} - n \omega_H| T \gg 2\pi$ , где  $T$  — время взаимодействия электронов с электромагнитными полями), ее воздействие на электроны приводит только к возникновению быстрых осцилляций произвольных постоянных. Накапливающиеся изменения этих величин при выполнении условий комбинационных синхронизмов (1), (2) происходят при совместном воздействии парциальных волн. Этот эффект проявляется во втором приближении метода усреднения [10]. Предполагая, что излучение носит дипольный характер, т. е. амплитуды волн достаточно малы  $ea_s, i / mc^2 \ll 1$ , а масштаб поперечной неоднородности волн много больше ларморовского радиуса  $k_s^{\perp}, i r_H \ll 1$ , представим для  $n = \pm 1$  усредненные уравнения движения электронов в виде [7]

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -n\omega_{1,2} \frac{e^2 x_{1,2}}{4m\mathcal{E}\Omega_H} \operatorname{Re} [e^{-in\theta} a_i \hat{L}^{(1,2)}(a_s)], \quad (6)$$

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{k_{1,2}''}{\omega_{1,2}} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (7)$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = -\frac{e^2 x_{1,2}}{4\mathcal{E}} \operatorname{Re} [ie^{-in\theta} a_i \hat{L}^{(1,2)}(a_s)], \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_{1,2} - k_{1,2}'' v_{\parallel} - n\omega_H - \frac{ne^2 x_{1,2}}{4\mathcal{E}p_{\perp}} \operatorname{Re} [e^{-in\theta} a_i \hat{L}^{(1,2)}(a_s)]. \quad (9)$$

Здесь  $\mathcal{E} = mc^2 \gamma = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_{\perp}^2 + c^2 p_{\parallel}^2}$  — энергия электрона,  $\omega_{1,2} = \omega_s \mp \omega_i$ ,  $k_{1,2}'' = k_s'' \mp k_i''$ ,  $\Omega_H = eH_0 / mc$  — нерелятивистская гирочастота,

$$x_{1,2} = k_s^{\perp} \frac{(\omega_i - k_i'' v_{\parallel})^2 + \omega_H^2}{\omega_H^2 - (\omega_i - k_i'' v_{\parallel})^2} \pm k_i^{\perp} \frac{(\omega_s - k_s'' v_{\parallel})^2 + \omega_H^2}{\omega_H^2 - (\omega_s - k_s'' v_{\parallel})^2},$$

оператор  $\hat{L}^{(1)}$  — оператор комплексного сопряжения, оператор  $\hat{L}^{(2)} = 1$ . Индекс «1» в уравнениях (6)–(9) соответствует взаимодействию в условиях синхронизма (1), а индекс «2» — в условиях (2).

<sup>3</sup> Не являясь принципиальным, это предположение позволяет существенно упростить выкладки (ср. с [9]).

Как нетрудно видеть, усредненные уравнения (6)—(9) эквивалентны уравнениям [11—13], описывающим движение электрона в циркулярно-поляризованной волне, распространяющейся вдоль магнитного поля и задающей вектор-потенциалом

$$A_c = A_x - iA_y = \frac{e\chi_{1,2}c}{4\delta\Omega_H} a_i \hat{L}^{(1,2)}(a_s) e^{i(k_{\perp}^{\pm} x_{\perp} - \omega_{1,2}t)}. \quad (10)$$

Поле (10) будем называть эффективной комбинационной волной. Амплитуда этой волны отлична от нуля ( $\chi_{1,2} \neq 0$ ), если по крайней мере одна из парциальных электромагнитных волн распространяется под углом к магнитному полю ( $k_{\perp, i} \neq 0$ ).

В соответствии с уравнениями (6)—(8) усредненные изменения продольного и поперечного импульса электрона связаны с изменением его энергии соотношениями

$$\mathcal{E} - v_{1,2}^c p_{\parallel} = \text{const}, \quad (11)$$

$$p_{\perp} = \sqrt{p_{\perp 0}^2 - \frac{n^2 m \Omega_H}{\omega_{1,2}} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E})}, \quad (12)$$

$v_{1,2}^c = \omega_{1,2}/k_{\perp}^{\parallel}$  — фазовая скорость комбинационных волн разностной и суммарной частоты, индексом «0» отмечены начальные значения величин.

Из соотношения (12) следует, что при  $n > 0$ , когда в соответствии с условиями синхронизма (1), (2) фазовая скорость комбинационной волны превосходит поступательную скорость электронов  $v_{1,2}^c > v_{\parallel}$  (область нормального эффекта Доплера), торможение электрона сопровождается уменьшением его поперечного импульса. Напротив, при  $n < 0$ , когда электрон движется со «сверхсветовой» скоростью  $v_{1,2}^c < v_{\parallel}$  (область аномального эффекта Доплера), в процессе торможения электрона его поперечный импульс возрастает. Поэтому аналогично мазерам на циклотронном резонансе (МЦР) [13] для получения усиления высокочастотной сигнальной волны в первом режиме необходимо использовать электронные пучки, обладающие начальным запасом вращательной энергии ( $p_{\perp 0} \neq 0$ ), тогда как во втором режиме возможно использование прямолинейных пучков ( $p_{\perp 0} = 0$ ). Энергия на излучения в первом случае черпается как из поперечных, так и продольных степеней свободы, а во втором — только из энергии продольного движения.

С учетом интегралов (11), (12) система уравнений (6)—(9) сводится к двум уравнениям для фазы  $\theta$  и энергетической переменной  $w = 1 - \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{n\sqrt{\beta_{\perp 0}^2 - qw}}{1-w} \text{Re}[iFe^{-in\theta}], \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\delta - \mu w}{1-w} - \frac{q \text{Re}[Fe^{-in\theta}]}{2\sqrt{\beta_{\perp 0}^2 - qw}(1-w)}, \quad (14)$$

где  $\tau = \omega_{1,2}t$ ,  $q = n\Omega_H/\gamma_0\omega_{1,2}$ ,  $F = e^2\chi_{1,2}a_i \hat{L}^{(1,2)} a_s / 4m^2c^3\gamma_0\Omega_H$ ,  $\mu = 1 - c^2/v_{1,2}^2$  — параметр инерционной группировки электронов [13],  $\delta = 1 - v_{\parallel 0}/v_{1,2} - (n\Omega_H)/(\gamma_0\omega_{1,2})$  — начальная расстройка комбинационного синхронизма,  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ . Для стационарного моноскоростного электронного потока начальные условия к уравнениям (13), (14) имеют вид

$$w(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad 0 \leq \theta_0 < 2\pi, \quad (15)$$

если начальная вращательная скорость электронов отлична от нуля ( $\beta_{\perp 0} \neq 0$ ), и

$$-n\theta(0) + \arg a_i(0) - \arg a_s(0) = \pi/2, \quad (16)$$

если начальная вращательная скорость отсутствует:  $\beta_{\perp 0} = 0$ .

Обратим внимание на эффект авторезонанса, реализующийся при фазовой скорости комбинационной волны, равной скорости свега ( $v_{1,2} = c$ ). В этом случае изменения поступательной скорости электронов и релятивистской гироча-

стоты полностью компенсировать друг друга ( $\mu=0$ ), и если в начальный момент времени расстройка синхронизма отсутствует ( $\delta=0$ ), то условие комбинационного синхронизма будет выполнено тождественно  $\omega_{1,2} - k_{1,2} v_{\parallel} \equiv n \omega_H$  на всей длине пространства взаимодействия (первое слагаемое в правой части уравнения (14) обращается в нуль). В соответствии с интегралом уравнений (13), (14)

$$\sqrt{\beta_{\perp 0}^2 - qw} \cos \theta = \beta_{\perp 0} \cos \theta_0$$

аналогично движению в поле одной волны с фазовой скоростью, равной скорости света [11, 12], в режиме авторезонанса электрон бесконечно ускоряется:  $|w| \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow \pi/2$ , а его поперечный импульс бесконечно увеличивается.<sup>4</sup> По этой причине, как и в релятивистских МЦР [13], для целей усиления электромагнитного излучения более благоприятны режимы с малой отстройкой фазовой скорости комбинационной волны от скорости света ( $\mu \neq 0$ ), что позволяет, с одной стороны, достаточно долго поддерживать синхронизм, а с другой — обеспечить эффективную группировку и торможение электронного пучка.

## 2. Уравнения возбуждения волн. Законы сохранения

Предполагая электронный пучок безграничным в поперечном направлении, дополним усредненные уравнения движения электронов уравнениями возбуждения волн. В случае моноскоростного электронного пучка нелинейные комбинационные составляющие тока пучка на частотах парциальных волн определяются соотношениями

$$j_{\omega_s}^{\mathbf{k}_s} = ni \frac{e^2 N_0}{m \Omega_H} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \left\{ \frac{x_{1,2} P_{\perp}}{2\mathcal{E}} \hat{L}^{(1,2)} (i a_s^* e^{in\theta}) \right\}, \quad (17)$$

$$j_{\omega_i}^{\mathbf{k}_i} = ni \frac{e^2 N_0}{m \Omega_H} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \left\{ \frac{x_{1,2} P_{\perp}}{2\mathcal{E}} e^{in\theta} \hat{L}^{(1,2)} (i a_s) \right\}, \quad (18)$$

где  $N_0$  — невозмущенная плотность электронного пучка. Подставляя (17), (18) в волновое уравнение

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (19)$$

после усреднения получим уравнения для медленно меняющихся амплитуд волн

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\text{гp}i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) a_s = -\frac{n \omega_p^2 c^2}{4 \omega_s \Omega_H} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \left\{ \frac{x_{1,2} P_{\perp}}{\mathcal{E}} \hat{L}^{(1,2)} (i a_s^* e^{in\theta}) \right\},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\text{гp}i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) a_i = -\frac{n \omega_p^2 c^2}{4 \omega_i \Omega_H} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \left\{ \frac{x_{1,2} P_{\perp}}{\mathcal{E}} \hat{L}^{(1,2)} (i a_s) e^{in\theta} \right\}, \quad (20)$$

где  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_0 / m}$  — плазменная электронная частота.

Из уравнений (20) следуют соотношения Мэнли—Роу для чисел квантов волн  $N_{s,i} = \omega_{s,i} |a_{s,i}|^2 / 8\pi \hbar c$ , участвующих в процессе рассеяния. Для пространственно-однородной задачи ( $\partial/\partial \mathbf{r} = 0$ ) имеем

$$N_s \pm N_i = \text{const}. \quad (21)$$

Эти соотношения подтверждают сделанный во Введении вывод, что в условиях синхронизма (1) (верхний знак) в процессе рассеяния происходит увеличение интенсивности одной из волн и уменьшение интенсивности другой, тогда

<sup>4</sup> Разумеется, этот вывод справедлив, пока выполнены ограничения, использованные при получении усредненных уравнений движения (6)—(9).

как в условиях синхронизма (2) (нижний знак) интенсивности обеих волн растут или уменьшаются одновременно.

В совокупности с уравнениями движения электронов (6)–(9) уравнения возбуждения имеют интегралы

$$\frac{1}{8\pi c^2} (\omega_s^2 |a_s|^2 + \omega_i^2 |a_i|^2) + \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E} d\theta_0 = \text{const},$$

$$\frac{1}{8\pi c^2} (k_s'' \omega_s |a_s|^2 + k_i'' \omega_i |a_i|^2) + \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{\parallel} d\theta_0 = \text{const}, \quad (22)$$

представляющие собой соответственно законы сохранения энергии и продольного импульса в системе электромагнитное поле—электронный пучок.

Обсудим теперь модификацию уравнения возбуждения волны накачки в случае вынужденного ондуляторного излучения, когда волна накачки при  $\omega_i \rightarrow 0$  вырождается в периодическое магнитостатическое поле. В этом случае в процессе взаимодействия РЭП с сигнальной волной будет детектироваться (см. подробнее [14]) периодическая квазистатическая компонента электронного тока, амплитуда которой дается соотношением (18). Возбуждаемое этим током магнитное поле находится из уравнений магнитостатики

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (23)$$

и равно

$$a_i^{\text{cos}} = -\frac{in\omega_p^2}{2\Omega_H k_i^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 \left\{ \frac{\kappa_{1,2} p_{\perp}}{\mathcal{E}} e^{in\theta} \hat{L}^{(1,2)}(ia_s^*) \right\}. \quad (24)$$

Собственное периодическое магнитостатическое поле электронного потока складывается с полем  $a_{i,0}$  стороннего источника (ондулятора), образуя действующее суммарное ондуляторное поле с амплитудой

$$a_i = a_{i,0} + a_i^{\text{cos}}, \quad (25)$$

которое и фигурирует в уравнениях движения электронов.

### 3. Результаты численного моделирования

ВКР на винтовом электронном пучке в условиях нормального эффекта Доплера ( $v_{\parallel} < v_{1,2}^c$ ,  $n > 0$ ). Допустим далее, что амплитуда комбинационной волны достаточно мала  $|F| \ll 1$  и относительные изменения энергии электронов невелики  $|w| \ll 1$ . В этом случае можно не учитывать изменение поперечного импульса электронов в процессе рассеяния; кроме того, предполагая, что фазовая скорость комбинационной волны отлична от скорости света ( $\mu \neq 0$ ), в уравнении для фазы (14) можно пренебречь вторым слагаемым, ответственным за силовую группировку электронов, по сравнению с первым, ответственным за инерционную группировку.<sup>5</sup> В результате приведем систему уравнений (13), (14), (20) к асимптотическому виду, содержащему минимальное число независимых параметров

$$\frac{du}{d\tilde{\tau}} = \text{Re} [i\alpha_i \hat{L}^{(1,2)}(\alpha_s) e^{-i\theta}], \quad \frac{d\theta}{d\tilde{\tau}} = \Delta - u, \quad (26)$$

$$\frac{d}{d\tilde{\tau}} \alpha_s = -\hat{L}^{(1,2)}(i\alpha_s^* I), \quad (27)$$

<sup>5</sup> Как и в МЦР, при ВКР имеют место два механизма инерционной группировки частиц, обусловленных соответственно зависимостью поступательной скорости и релятивистской гирочастоты от энергии электронов — продольная и поперечная (фазовая) группировки [13, 15]. При  $\mu = 0$  происходит взаимная компенсация указанных механизмов группировки, что приводит к резкому снижению инкрементов усиливаемой волны.

$$\frac{d}{d\hat{t}} \alpha_i = -\varepsilon I \hat{L}^{(1,2)} (i\alpha_i^*), \quad (28)$$

$$u(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0 \in (0, 2\pi), \quad \alpha_s(0) = \alpha_{s0}, \quad \alpha_{i0} = 1. \quad (29)$$

Здесь

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta_0, \quad \hat{t} = \tau C, \quad u = \mu w/C, \quad \Delta = \delta/C, \quad \alpha_i = a_i/a_{i0},$$

$a_{i0}$  — начальная амплитуда волны накачки;  $\alpha_s = \mu e \hat{L}^{(1,2)}(a_{i0}) \beta_{\perp 0}^2 \alpha_{1,2} a_s / 4m^2 c^3 \gamma_0 \Omega_H C^2$ ;  $C = (\omega_p^2 \mu e^2 |a_{i0}|^2 \beta_{\perp 0}^2 \alpha_{1,2}^2 / 32m^2 c^2 \omega_s \omega_{1,2} \Omega_H^2 \gamma_0)^{1/2}$  — параметр усиления;  $\varepsilon = \omega_p^2 m^2 c^4 \gamma_0 C / 2\omega_s \omega_{1,2} e^2 |a_{i0}|^2 \mu$  — параметр, характеризующий влияние процесса рассеяния на амплитуду волны накачки. Для облегчения записи предполагалось, что  $\mu > 0$ ; в случае  $\mu < 0$  уравнения редуцируются к виду, совпадающему с (26)—(29), с помощью замены переменных  $\Delta' = -\Delta$ ,  $\theta' = -\theta$ ,  $\alpha'_s = -\alpha_s$ ,  $\alpha'_i = \alpha_i^*$ .

В наиболее интересной, с практической точки зрения, ситуации, когда волна накачки распространяется навстречу электронному пучку, а сигнальная волна в попутном направлении и частота сигнальной волны существенно превосходит частоту волны накачки ( $\omega_s \gg \omega_i$ ), в соответствии с законами сохранения (21), (22) прирост энергии сигнальной волны  $\Delta W_s$  приблизительно равен потерям энергии  $\Delta W_e$  электронного пучка

$$\Delta W_s = \frac{\omega_{1,2}}{\omega_s} \Delta W_e. \quad (30)$$

Потери энергии РЭП  $\Delta W_e = mc^2 (\gamma_0 - 1) N_0 \eta$  удобно характеризовать электронным КПД, который определяется из уравнений (26) посредством соотношений

$$\eta = \frac{C}{\mu} \hat{\eta}, \quad \hat{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\theta_0. \quad (31)$$

В случае вынужденного ондуляторного излучения движение частиц и возбуждение сигнальной волны по-прежнему описываются уравнениями (26), (27), а для амплитуды суммарного ондуляторного поля вместо (28) с учетом (24), (25) имеем

$$\alpha_i = 1 - i \varepsilon I \hat{L}^{(1,2)} (i\alpha_i^*). \quad (32)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{\omega_p^2 m^2 c^2 \gamma_0 C^2}{2k_z^2 e^2 |a_{i0}|^2 \mu},$$

где  $a_{i0}$  — амплитуда стороннего ондуляторного поля. Отметим, что в отличие от случая электромагнитной волны накачки отсутствует инвариантность уравнений (26), (27), (32) относительно знака параметра  $\mu$ . При  $\mu < 0$  уравнения, описывающие процесс усиления в условиях синхронизма (1), с помощью замены переменных  $\theta' = -\theta$ ,  $\Delta' = -\Delta$ ,  $\alpha'_s = -\alpha_s$ ,  $\alpha'_i = \alpha_i^*$  сводятся к системе уравнений, описывающих взаимодействие в условиях синхронизма (2) при  $\mu > 0$ .

В режиме малого сигнала  $\alpha_s \rightarrow 0$ , линеаризуя уравнения движения электронов (26) и представляя амплитуду сигнальной волны в виде  $\alpha_s = \alpha_{s0} e^{i\Gamma t}$ , в приближении заданной волны накачки приходим к дисперсионному уравнению

$$\Gamma^2 (\Gamma - \Delta) = -1. \quad (33)$$

Согласно (33), максимум инкремента сигнальной волны  $|\text{Im } \Gamma_{\text{max}}| = \sqrt{3/2}$  достигается при точном комбинационном синхронизме:  $\Delta = 0$ . В размерных обозначениях инкремент равен

$$|\text{Im } \Gamma_{\text{разм}}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_{1,2} C.$$

Исследование режима большого сигнала проводилось путем численного решения уравнений (26)—(29). На рис. 2, *a* представлена зависимость амплитуды сигнальной волны от времени в условиях, когда изменение амплитуды волны накачки пренебрежимо мало ( $\varepsilon=0$ ). Ограничение роста амплитуды сигнальной волны обусловлено смещением образующихся на линейной стадии процесса усиления электронных сгустков из тормозящей фазы комбинационной волны в ускоряющую. Далее имеет место захват электронных сгустков комбинационной волной. Возникающие при этом осцилляции амплитуды сигнальной волны обусловлены колебаниями центров захваченных электронных сгустков между ускоряющей и тормозящей фазами комбинационной волны. Из-за зависимости частоты колебаний захваченных частиц от энергии сгустки постепенно размываются, поэтому амплитуда осцилляций сигнальной волны уменьшается.

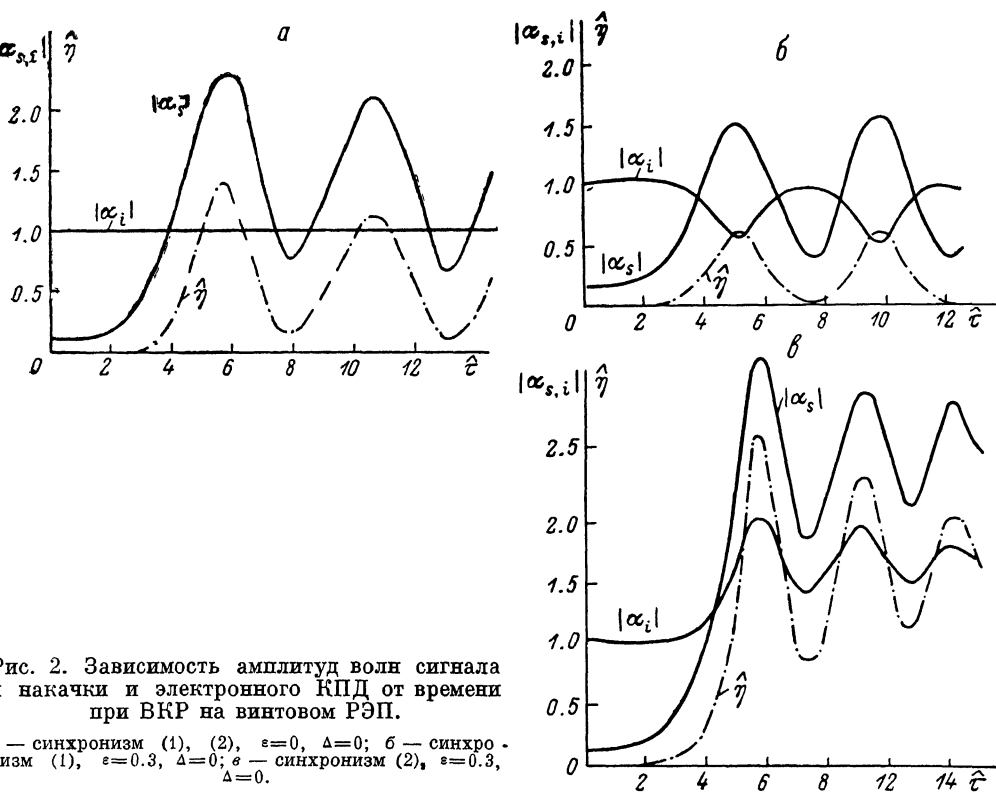


Рис. 2. Зависимость амплитуд волн сигнала и накачки и электронного КПД от времени при ВКР на винтовом РЭП.

*a* — синхронизм (1), (2),  $\varepsilon=0$ ,  $\Delta=0$ ; *b* — синхронизм (1),  $\varepsilon=0.3$ ,  $\Delta=0$ ; *c* — синхронизм (2),  $\varepsilon=0.3$ ,  $\Delta=0$ .

Эффект истощения накачки, имеющий место в случае синхронизма (1) и  $\varepsilon \neq 0$ , приводит к снижению максимального значения амплитуды сигнальной волны (рис. 2, *b*). Это обусловлено тем, что уменьшение амплитуды волны накачки в процессе рассеяния уменьшает связь электронов с сигнальной волной, в результате чего эффективность энергообмена электронов с сигнальной волной падает. Напротив, в ситуации, когда амплитуда волны накачки в процессе рассеяния возрастает (синхронизм (2)), связь электронов с сигнальной волной увеличивается. Поэтому в этом случае достигаются более высокие значения амплитуды сигнальной волны и электронного КПД (рис. 2, *c*).

Результаты численного моделирования системы уравнений (26), (27), (32), описывающей вынужденное ондуляторное излучение, представлены на рис. 3. В процессе усиления сигнальной волны при  $\mu > 0$  происходит уменьшение амплитуды суммарного ондуляторного поля в условиях синхронизма (1) (рис. 3, *a*) и увеличение амплитуды этого поля в условиях синхронизма (2) (рис. 3, *b*). Вследствие изменения эффективности связи электронов с сигнальной волной КПД во втором случае оказывается заметно выше, чем в первом. В случае  $\mu < 0$  рис. 3, *a* будет описывать излучение в условиях синхронизма (2), а рис. 3, *b* в условиях синхронизма (1).



Рассмотрим теперь вырожденный случай синхронизма (2): усиление волны на полужиклотронном резонансе (3). В этом случае  $a_i = a_s = a$  и уравнения (26)–(28) редуцируются к виду

$$\frac{du}{d\tau} = \text{Re} [i\alpha^2 e^{-i\theta}], \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \Delta - u,$$

$$\frac{d}{d\tau} \alpha = i\alpha^* I,$$

$$u(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0 \in (0, 2\pi), \quad \alpha(0) = 0. \quad (34)$$

Здесь

$$\hat{\tau} = \omega_2 \tau C, \quad |\Delta| = \delta/C, \quad \alpha = \sqrt{\frac{e^2 \nu_2 \beta_{\perp 0} \mu}{4\pi^2 c^3 \Omega_H \gamma_0}} a C^{-1}, \quad u = \mu w/C, \quad C = \frac{\omega_p^2 \nu_2 c \beta_{\perp 0}}{16\omega^2 \Omega_H}.$$

Остальные обозначения, включая определение электронного КПД, совпадают с использованными при записи уравнений (26)–(28). В исследуемом ре-

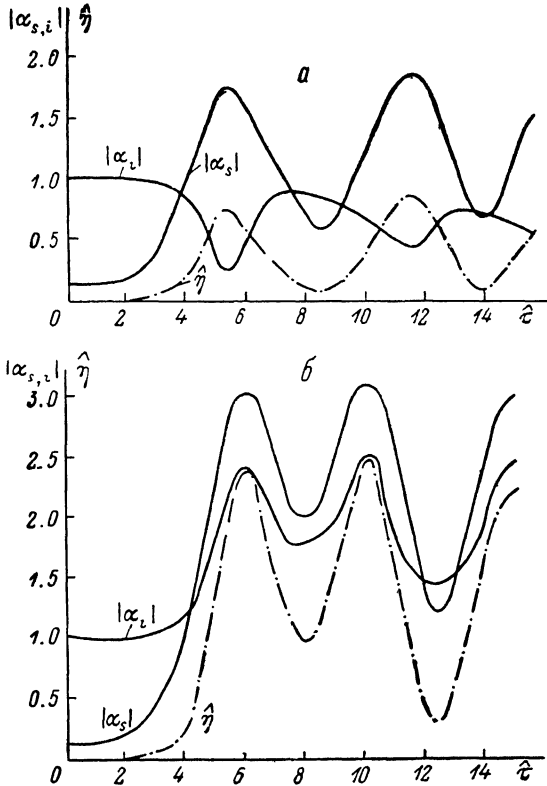


Рис. 3. Зависимость амплитуды сигнальной волны, суммарного ондуляторного поля и КПД от времени.  $\epsilon = 0.3$ ,  $\Delta = 0$ .

а — синхронизм (1), б — синхронизм (2).

жиме процесс усиления при сколь угодно малой амплитуде волны носит нелинейный характер. Ограничение роста амплитуды волны обусловлено эффектами захвата электронов комбинационной волной (рис. 4).

ВКР на прямолинейном электронном пучке в условиях аномального эффекта Доплера ( $v_n > v_1^c$ ,  $n < 0$ ). Самосогласованная система уравнений, описывающая ВКР на пучке электронов, не имеющих начальной вращательной скорости ( $\beta_{\perp 0} = 0$ ), при условии  $|v| \ll 1$  может быть приведена к виду

$$\frac{du}{d\hat{\tau}} = \sqrt{u} |\alpha_s \alpha_i| \sin \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{d\hat{\tau}} = \Delta + u + \frac{|\alpha_s \alpha_i|}{2\sqrt{u}} \cos \vartheta, \quad (35)$$

$$\frac{d|\alpha_s|}{d\hat{t}} = \sqrt{u} |\alpha_i| \sin \vartheta, \quad \frac{d|\alpha_i|}{d\hat{t}} = -\varepsilon \sqrt{u} |\alpha_s| \sin \vartheta, \quad (36)$$

$$u(0) = 0, \quad \vartheta(0) = \pi/2, \quad |\alpha_s(0)| = \alpha_{s0}, \quad |\alpha_i(0)| = 1. \quad (37)$$

Здесь

$$|\alpha_i| = |a_i/a_{i0}|, \quad |\alpha_s| = \frac{e^2 x_1 \sqrt{2} |\mu| |a_{i0} a_s|}{4m^2 c^3 \sqrt{\omega_1 \Omega_H} \gamma_0^{3/2}} D^{-3/2},$$

$$u = |\mu| w/D, \quad \Delta = \delta/D, \quad \hat{t} = \omega_1 t D, \quad \vartheta = \theta - \arg a_s + \arg a_i,$$

$$D = \left( \frac{\omega_p^2 x_1^2 e^2 |a_{i0}|^2}{8m^2 c^2 \omega_s \omega_1^2 \Omega_H \gamma_0^2} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{\omega_p^2 m^2 c^4 \gamma_0 D}{\omega_s \omega_1 e^2 |a_{i0}|^2 |\mu|}.$$

В уравнениях движения электронов (35) в отличие от уравнений (26) удержаны члены, ответственные за силовую группировку электронов, которая

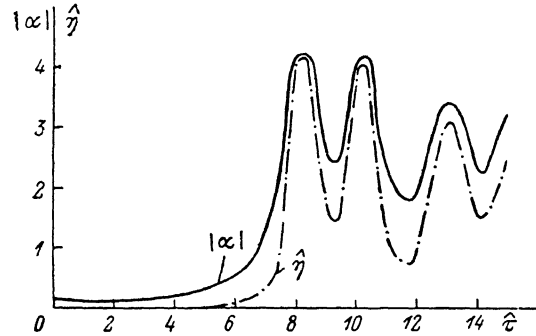


Рис. 4. Зависимость амплитуды усиливаемой волны и КПД от времени при взаимодействии на полужиклотронном резонансе.  $\Delta=0$ .

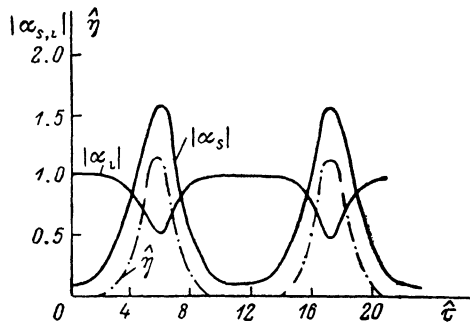


Рис. 5. Зависимость амплитуд волны сигнала и накачки и электронного КПД от времени при ВКР на прямолинейном РЭП.  $\varepsilon=0.3$ ,  $\Delta=0$ .

в данном случае ( $\beta_{L0}=0$ ) является определяющей. При такой группировке траектории всех частиц, влетающих в данную точку пространства под действием комбинационной силы (10), расходятся веером с вершиной в точке влета. Энергообмен всех электронов с электромагнитными полями протекает совершенно одинаково, потому КПД определяется движением одного произвольного электрона (ср. с (33))

$$\eta = \frac{D}{|\mu|} u. \quad (38)$$

В режиме малого сигнала  $\alpha_s \rightarrow 0$ , линеаризуя уравнения движения частиц и предполагая поле накачки фиксированным, приходим к дисперсионному уравнению

$$\Gamma(\Gamma - \Delta) = -1/4. \quad (39)$$

Согласно (39), максимальный инкремент сигнальной волны  $|\text{Im } \Gamma_{\text{max}}| = 1/2$  достигается в условиях точного синхронизма  $\Delta=0$ . В размерном виде инкремент равен

$$|\text{Im } \Gamma_{\text{разм}}| = \frac{1}{2} \omega_1 D. \quad (40)$$

Для анализа режима большого сигнала и определения электронного КПД полезно учесть интегралы системы уравнений (35), (36)

$$|\alpha_s| = \sqrt{|\alpha_{s0}|^2 + 2u}, \quad |\alpha_i| = \sqrt{1 - 2\varepsilon u}, \quad (41)$$

$$\cos \vartheta = - \frac{2\Delta u^{1/2} + u^{3/2}}{2|\alpha_s \alpha_i|}. \quad (42)$$

Анализ соотношения (42) показывает, что при малой начальной амплитуде сигнальной волны  $|\alpha_{s0}| \ll 1$  и относительно небольшом параметре истощения волны накачки  $\epsilon < 1/4\sqrt{2}$  в области расстройек синхронизма  $|\Delta| < 2$  максимальное торможение электронов

$$u_{\max} = 2[-(\Delta + 4\epsilon) + \sqrt{16\epsilon^2 + 8\Delta\epsilon + 2}] \quad (43)$$

достигается, когда фаза электрона  $\vartheta$  обращается в  $\pi$ . При этом оптимальное значение расстройки синхронизма  $\Delta = -\sqrt{2}$ . В области больших значений параметра истощения накачки  $\epsilon > 1/4\sqrt{2}$  предел увеличению амплитуды сигнальной волны ставит обращение в нуль амплитуды волны накачки, которое имеет место, если параметр расстройки равен  $\Delta = -1/4\epsilon$ . Максимальные потери энергии электронов в таком режиме составят

$$u_{\max} = 1/2\epsilon. \quad (44)$$

Это значение энергии электронов достигается, когда фаза электрона равна  $\pi/2$ . Результаты численного интегрирования системы уравнений (35)–(37) (рис. 5) полностью подтверждают проведенный выше анализ. Отметим, что в отличие от рассеяния на винтовом электронном пучке процесс энергообмена при рассеянии на прямолинейном электронном пучке является строго периодически: сначала электроны тормозятся, амплитуда волны накачки падает, а сигнальной растет, затем процесс происходит в обратном направлении, и т. д.

#### Литература

- [1] Grossman A. A., Marshall T. C. IEEE J. Quant. Electronics, 1983, v. QE-19, N 3, p. 337–343.
- [2] Григорьев В. П., Диденко А. Н., Мельников Г. В. и др. РИЭ, 1985, т. 36, № 3, с. 571–577.
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
- [4] Железняков Е. В. Электромагнитные волны в космической плазме. М.: Наука, 1977.
- [5] Литвак А. Г., Траптенгерц В. Ю. ЖЭТФ, 1972, т. 62, № 1, с. 228–234.
- [6] Боровицкая Е. С. Изв. вузов. Радиофизика, 1975, т. 18, № 8, с. 1222–1226.
- [7] Ginzburg N. S., Tokman M. D. Optics Commun, 1982, v. 43, N 2, p. 137–141. Гинзбург Н. С., Сергеев А. С., Токман М. Д., Препринт ИПФ АН СССР, № 180. Горький, 1987.
- [8] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. ЖЭТФ, 1979, т. 76, № 3, с. 930–943.
- [9] Гинзбург Н. С., Токман М. Д. ЖТФ, 1984, т. 54, № 6, с. 1062–1067.
- [10] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [11] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. ДАН СССР, 1962, т. 145, № 6, с. 1259–1263.
- [12] Давыдовский В. Я. ЖЭТФ, 1962, т. 43, № 3, с. 886–892.
- [13] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Нусинович Г. С. и др. В кн.: Релятивистская высокочастотная электроника. Горький, ИПФ АН СССР, 1979, в. 1, с. 157.
- [14] Гинзбург Н. С. Изв. вузов. Радиофизика, 1986, т. 29, № 11, с. 1374–1382.
- [15] Гапонов А. В. ЖЭТФ, 1966, т. 39, № 2, с. 326–331.

Институт прикладной физики  
АН СССР  
Горький

Поступило в Редакцию

8 мая 1987 г.

В окончательной редакции

29 июня 1987 г.