таты более детальных исследований шумовых свойств интегральных датчиков в этом диапазоне частот будут сообщены отдельно.

Авторы работы глубоко признательны В. В. Мигулину и К. К. Лихареву за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

[1] *Масленников Ю. В., Снигирев О. В.* Письма в ЖТФ, 1986, т. 12, № 21, с. 1288—1293.
[2] *Снигирев О. В.* РиЭ, 1984, т. 29, № 11, с. 2216—2223.
[3] *Кузьмин Л. С., Масленников Ю. В., Снигирев О. В.* Микроэлектроника, 1986, т. 15, № 6, с. 535—537.
[4] *Войтович И. Д., Клушин А. М., Полищук А. С.* Зарубежная радиоэлектроника, 1983, № 6, с. 71—97.
[5] *Martinis J. M., Clarke J. M.* IEEE Trans., 1983, v. MAG-19, p. 446—448.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Поступило в Редакцию
4 мая 1987 г.

УДК 533.566 *Журнал технической физики, т. 58, в. 6, 1988*

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ПОЛЯ ПРЕЛОМЛЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ВБЛИЗИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЛУЧА

А. С. Старков

Задача о распространении волн при наличии границы раздела между двумя различными средами, например воздухом и землей, водой и воздухом, слоями в ионосфере и т. д.; является классической задачей математической физики. Необходимость решения этой задачи возникает при изучении распространения волн над земной поверхностью и поверхностью океана, в ионосфере, при проведении геофизических исследований, при создании диэлектрических антенн. В большинстве работ, посвященных этой тематике, подробно рассматривается поле отраженной волны. В данной работе строится асимптотика поля преломленной волны в случае, когда точечный источник колебаний находится в высокоскоростной среде и не очень далеко от границы.

Пусть в цилиндрической системе координат (ρ, z) граница раздела двух сред — плоскость $z=0$. В точку с координатами $(0, -z_0)$, $z_0>0$ помещен точечный источник колебаний. Показатели преломления верхней $(z>0)$ и нижней $(z<0)$ сред n_1, n_2 будем считать действительными и связанными соотношением $n_1/n_2 \equiv n > 1$. Отношение скоростей $c_1/c_2 = n^{-1} < 1$. Поле преломленной волны имеет вид [1]

$$u_{\text{пр}} = \frac{ikm}{8\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\sin 2\theta H_0^1(k\rho \sin\theta)}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}+m\cos\theta} e^{ik\left(z\sqrt{n^2-\sin^2\theta}+z_0\cos\theta\right)} d\theta, \tag{1}$$

где k — волновое число в нижнем полупространстве; m — постоянный множитель, характеризующий свойства сред. Интегрирование проводится в комплексной плоскости θ по обычному для таких задач контуру Γ, составленному из луча $(+i\infty-\pi/2,\ -\pi/2)$, отрезка $(-\pi/2,\ \pi/2)$ и луча $(\pi/2,\ \pi/2-i\infty)$. Значение θ в стационарных точках имеет смысл угла падения.

При больших значениях $k\rho$ функцию Ханкеля можно заменить на асимптотику и получить

$$u_{\text{пр}} = A \int\limits_{\Gamma} e^{ik\left(z\sqrt{n^2-\sin^2\theta}+\rho\sin\theta+z_0\cos\theta\right)} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}+m\cos\theta} \times$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{k\rho\sin\theta}\right)\right)d\theta, \quad A=\frac{m\sqrt{k}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\rho}\,\pi^{3/2}}. \tag{2}$$

Перейдем к переменной φ: $n \sin\varphi = \sin\theta$

$$u_{\text{пр}} = An^2 \int\limits_{\Gamma} e^{ik_1(z\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z_0\sqrt{n^{-2} - \sin^2\varphi})} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{n\cos\varphi + m\sqrt{1 - n^{-2}\sin^2\varphi}} \times$$
$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{k_1\rho\sin\varphi}\right)\right), \quad k_1 = kn. \tag{3}$$

Главная цель последующих вычислений — исследование асимптотических интегралов (2), (3) при $k_1 \to \infty$ (длина волны мала по сравнению с расстоянием до точки наблюдения).

Пусть $F(z, \rho, \theta)$ — показатель экспоненты в интеграле (2). Уравнение для определения стационарных точек имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = \rho\cos\theta - z_0\sin\theta - \frac{z\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} = 0. \tag{4}$$

При $z_0 = 0$ корнями уравнения (4) являются $\theta_{01} = \pi/2$ и $\theta_{02} = \pi/2 - i\,\mathrm{arch}\left(n\rho/\sqrt{\rho^2 + z^2}\right)$. Для малых z_0 уравнение (4) имеет два корня θ_1 и θ_2, близких соответственно к θ_{01} и θ_{02}. Нетрудно показать, что вблизи луча $z = \rho\sqrt{n^2 - 1}$ стационарные точки θ_1 и θ_2 становятся близкими, поэтому использовать обычный метод перевала нельзя. С геометрической точки зрения этот луч характерен тем, что он образует с осью z угол полного внутреннего отражения (предельный луч).

Исследуем малую окрестность предельного луча. Для этого перейдем в систему координат, связанную с лучом

$$\begin{aligned} x &= z\cos\varphi_0 + \rho\sin\varphi_0, & \sin\varphi_0 &= 1/n, \\ y &= \sqrt{k_1}\,(-z\sin\varphi_0 + \rho\cos\varphi_0), & \cos\varphi_0 &= \sqrt{(n^2 - 1)}/n, \end{aligned} \tag{5}$$

и введем новую переменную интегрирования $t = (k_1)^{1/4}\sqrt{\sin(\varphi_0 - \varphi)}$. Будем считать, что величина $z_1 = z_0 n^{-1}(n^2 - 1)^{1/4} k_1^{3/4}$ является ограниченной, т. е. источник находится не очень далеко от границы.

В интеграле (3) после замены переменных (5) ограничимся главными при $k \to \infty$ членами

$$u_{\text{пр}} = -Ae^{ik_1x} \int\limits_{C} e^{i\left(-\frac{t^4}{2}x - yt^2 + z_1 t\right)} t\,dt \left(1 + O\left(\frac{1}{(kx)^{1/2}}\right)\right). \tag{6}$$

Контур интегрирования C состоит из двух лучей $(i\infty, 0)$, $(0, \infty)$. Интеграл (6) отличается от интеграла Пирси (см. [1, 2]) контуром интегрирования и предэкспоненциальным множителем.

Поле преломленной волны допускает следующее «лучевое» разложение:

$$u_{\text{пр}} = e^{ik_1x} \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, y)\, k_1^{-j/2},$$

где функция $u_0(x, y)$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$2i\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0. \tag{7}$$

Для сшивания формулы (6) с известными асимптотиками интеграла (3), полученными по методу перевала при некотором удалении от предельного луча, рассмотрим асимптотику интеграла (6) при больших x, y.

Уравнение для определения стационарных точек интеграла (6) имеет вид $\partial\Phi/\partial t = 0$, где Φ — показатель экспоненты в (6), или

$$-2t^3x - 2ty + z_1 = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) имеет три корня: один действительный $t_1 > 0$ и два комплексно-сопряженных. Согласно методу перевала, контур интегрирования изменяется так, чтобы он прошел по линиям наибыстрейшего спуска, задаваемым уравнением

$$\mathrm{Re}\,\Phi(t) = \mathrm{Re}\,\Phi(t_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

При некотором соотношении между x и y контур интегрирования проходит через две стационарные точки, а при другом — через одну. Линия, которая разделяет эти области, есть линия Стокса. Уравнение этой линии в общем случае

$$\operatorname{Re}\Phi(t_1) = \operatorname{Re}\Phi(t_2).$$

После простых алгебраических вычислений для данной задачи уравнение линии Стокса приводим к виду

$$27 z_1^2 x = 4\left(5 + 3\sqrt{3}\right) y^3. \tag{9}$$

Теперь выпишем асимптотические выражения для поля преломленной волны, связанные с вкладом стационарных точек t_1 и t_2

$$\begin{gathered} u_{t1} = 2A\left[\frac{\pi}{3x\,(4\,\mathrm{sh}^2\psi + 1)}\right]^{1/2} \Delta h \psi e^{i\left(-\frac{y^2}{x}\mathrm{sh}^2\psi + z_1\sqrt{\frac{3y}{x}}\,\mathrm{sh}\,\psi - \frac{\pi}{4}\right)}, \\ u_{t2} = A\left[\frac{\pi}{3x\,(2\,\mathrm{ch}^2\psi - 1 + i\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\,2\psi)}\right]^{1/2} (-\mathrm{sh}\,\psi + i\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,\psi), \\ \exp\left[-\frac{y^2}{x}\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,2\psi - \sqrt{\frac{y}{x}}\,\frac{3}{2}\,\mathrm{ch}\,\psi + i\,\frac{y^2}{2x}\,(2\,\mathrm{ch}^2\psi - 1) - \frac{iz_1}{2}\sqrt{\frac{3y}{x}}\,\mathrm{sh}\,\psi\right], \end{gathered} \tag{10}$$

где дополнительный параметр ψ определен соотношением

$$\mathrm{sh}\,3\psi = 3^{3/2} z_1 \sqrt{x}/4y^{3/2}.$$

Линия Стокса (9) разделяет области, где асимптотика поля преломленной волны есть сумма двух или одного слагаемого (10). Если $\rho\sqrt{n^2-1} - z > \delta > 0$, то в асимптотику входят два слагаемых; если же, наоборот, $\rho\sqrt{n^2-1} - z < \delta < 0$, то в асимптотику преломленного поля входит только слагаемое u_{t1}, отвечающее геометрооптической волне. Полученная в работе формула (6) и позволяет проследить переход от одной асимптотики к другой.

Качественно новые эффекты возникают для неоднородной среды. В этом случае для асимптотики преломленного поля вблизи предельного луча S получаем следующее выражение:

$$u_{\text{пр}} = \frac{A e^{i k_1 x + i\,\frac{y^2\sqrt{b}\,\mathrm{th}\sqrt{b}\,x}{2}}}{\mathrm{ch}^{1/2}\sqrt{b}\,x} \int\limits_C e^{-i\,\frac{t^4}{2}\,\frac{\mathrm{th}\sqrt{b}\,x}{\sqrt{b}} - \frac{yt^2}{\mathrm{ch}\sqrt{b}\,x} + z_1 t}\, t\,dt. \tag{11}$$

Координаты x, y в этом случае — обычные координаты, связанные с кривой S: длина дуги и приведенная нормаль [3]. Параметр b определяется кривизной предельного луча и второй производной от скорости распространения колебаний по нормали y и считается положительным. Положительность b означает, что эффективный показатель преломления имеет минимум на S, т. е. предельный луч локально является осью антиволновода. При этом расстояние между лучом, близким к S, и лучом S увеличивается с ростом координаты x.

Выражение, аналогичное (11), может быть выписано и для отрицательных b, когда эффективный показатель преломления имеет максимум на S и предельный луч является осью волновода. В этом случае интеграл, аналогичный (11), может быть преобразован в сумму неограниченного числа гауссовых пучков, сосредоточенных вблизи S, коэффициенты возбуждения которых определяются параметром z_1.

Литература

[1] *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
[2] *Wright F. J.* J. Phys. A, 1980, v. 13, N 9, p. 2913—2918.
[3] *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.

Ленинградский технологический институт холодильной промышленности

Поступило в Редакцию 4 мая 1987 г.