УДК 538.3

ТРАЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ СОПРОВОЖДЕНИЯ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Б. А. Снедков, А. Б. Снедков

Методом медленно меняющегося параметра получены уравнения траекторий граничной частицы пучка в неоднородном электромагнитном поле для аксиально-симметричной задачи. Найдена оптимальная напряженность поля интегральной фокусирующей силы, построены фазовые портреты.

Задачи сопровождения аксиально-симметричных пучков заряженных частиц пространственно-неоднородным ВЧ полем [1] связаны преимущественно с исследованием поперечного взаимодействия волны и пучка. Поэтому случай, когда пучок частиц имеет релятивистскую скорость в направлении оси симметрии, может быть трансформирован к нерелятивистскому при помощи, например, преобразования Лоренца для параметров сопровождающего поля [2]. В системе, движущейся вместе с пучком, благодаря малой относительной скорости частиц становится возможным в первом приближении пренебречь влиянием магнитной компоненты волны.

Рассмотрим сопровождение пучка заряженных частиц в неоднородном электромагнитном поле с учетом кулоновского взаимодействия в самом пучке. Представим электрическую компоненту неоднородного сопровождающего электромагнитного поля в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z), движущейся вместе с пучком, в виде

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}_\rho E(\rho) \cos\tau,$$

где $\tau = \omega t$, ω — частота ВЧ поля. Естественно, ось симметрии пучка совпадает с осью системы координат. Для упрощения дальнейших преобразований и получения более наглядных результатов целесообразно ограничить круг рассматриваемых пучков заряженных частиц квазиламинарными и состоящими из частиц одного сорта, например электронов. Напряженность поля сил кулоновского расталкивания на границе пучка при такой постановке задачи определяется соотношением

$$E_k(\rho) = \frac{I}{\varepsilon_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{2\pi\rho},$$

где I — ток пучка, ρ — его радиус. Уравнение движения граничной частицы выражается через суперпозицию сил кулоновского расталкивания и сопровождающего неоднородного поля

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = \frac{q}{m\omega^2} E(\rho) \cos\tau + \frac{qI}{2\pi\varepsilon_0 m\omega^2 v\rho} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Предположим, что решение (1) может быть представлено в виде $\rho(\tau) = r_0(\tau) + r_1(r_0, \tau)\cos\tau$, где r_0, r_1 — медленно меняющиеся функции. Далее разложим в неполный ряд $a_0 + a_1\cos\tau + b_1\sin\tau$ напряженность поля $E_k =$

$= B(r_0 + r_1 \cos\tau)^{-1}$, где $B = qI\sqrt{1 - v^2/c^2}\,(2\pi\varepsilon_0 m\omega^2 v)^{-1}$ и определим коэффициенты a_0, a_1, b_1

$$a_0 = B(r_0^2 - r_1^2)^{-1/2}, \quad a_1 = 2B(r_1)^{-1}[1 - r_0(r_0^2 - r_1^2)^{-1/2}], \quad b_1 \equiv 0.$$

Выделим теперь члены, содержащие постоянную составляющую, и члены при $\cos\tau$

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{q}{m\omega^2} r_1 \frac{dE(r_0)}{dr_0} + \frac{B}{\sqrt{r_0^2 - r_1^2}}, \tag{2}$$

$$-r_1 = \frac{q}{m\omega^2} E(r_0) + \frac{2B}{r_1}\left[1 - \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - r_1^2}}\right]. \tag{3}$$

Используя условие квазиламинарности пучка, т. е. неравенство $r_0 \gg r_1$, фактически означающее, что амплитуда колебаний граничных частиц много меньше

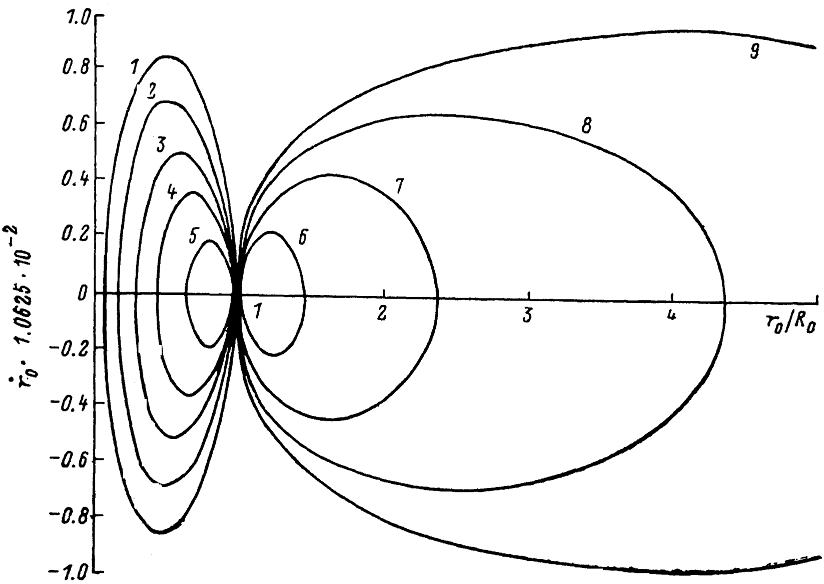

Рис. 1. Семейство фазовых портретов системы пучок—поле для постоянного значения нормированного тока пучка $B = 5 \cdot 10^{-5}$ и различных величин нормированного градиента сопровождающего поля: $A = 0.02$ (*1*), 0.018 (*2*), 0.016 (*3*), 0.014 (*4*), 0.012 (*5*), 0.008 (*6*), 0.006 (*7*), 0.004 (*8*), 0.002 (*9*).

поперечных размеров пучка, разложим $(r_0^2 - r_1^2)^{-1/2}$ в ряд и ограничимся первыми членами. Тогда из (3) получаем следующее выражение для амплитуды осцилляций частицы r_1:

$$r_1 = -\frac{q}{m\omega^2}\frac{E(r_0)\, r_0^2}{r_0^2 - B}. \tag{4}$$

Уравнение (4) позволяет найти пределы изменения $E(r_0)$, в которых оказывается справедливым использование сделанных преобразований, т. е.

$$1 \gg \left|\frac{r_1}{r_0}\right| = \frac{q}{m\omega^2}\,\frac{E(r_0)\, r_0}{r_0^2 - B}.$$

Подставив (4) в (2), получим уравнение движения центра осцилляций в явном виде

$$\frac{d^2 r_0}{d\tau^2} = -\frac{1}{4}\frac{q^2}{m^2\omega^4}\frac{r_0^2}{r_0^2 - B}\frac{dE^2(r_0)}{dr_0} + \frac{B}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{m^2\omega^4}\frac{r_0}{(r_0^2 - B)} BE^2(r_0). \tag{5}$$

Уравнение (5) в классе элементарных функций не интегрируется. Поэтому для выяснения физики процесса сопровождения пучка строятся фазовые портреты системы пучок—поле. Целесообразно рассматривать случай $B \ll r_0$, так как при этом основное влияние на амплитуду высокочастотных колебаний оказывает величина напряженности сопровождающего поля $E(r_0)$, а не пространственный заряд B. В таком приближении для уравнения, определяющего совокупность фазовых портретов, можно получить простое выражение

$$\left(\frac{dr_0}{dr}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{m^2\omega^4}E^2(r_0) + B\ln(r_0^2) + \frac{q^2}{m^2\omega^4}B\int\frac{E^2(r_0)\,dr_0}{r_0^3}. \qquad (6)$$

Рассмотрим частные случаи: сопровождение пучка заряженных частиц электромагнитным полем с линейным распределением амплитуды и с распределением, характерным для волны E_{01} в цилиндрическом волноводе.

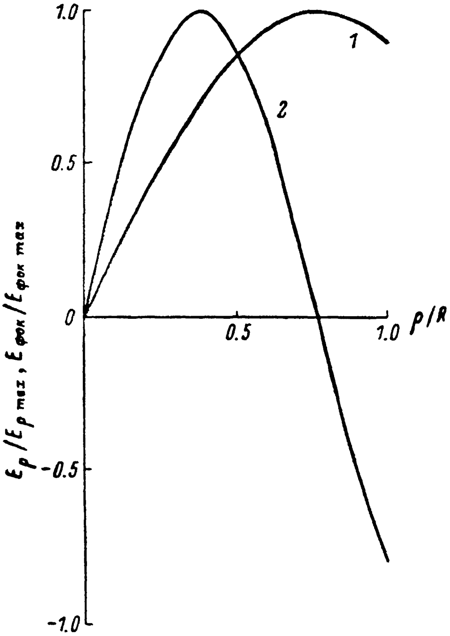

Рис. 2.

1. Распределение напряженности электрической компоненты электромагнитной волны подчиняется закону $E(\rho) = E_1\rho$. В начальный момент времени полагаем

$$r_0|_{\tau=0} = R_0, \quad \dot{r}_0|_{\tau=0} = 0.$$

Тогда (6) примет вид

$$\left(\frac{dr_0}{d\tau}\right)^2 = -\frac{1}{2}A^2(r_0^2 - R_0^2) + B[1 + A^2]\ln\left(\frac{r_0^2}{R_0^2}\right), \qquad (7)$$

где $A = qE_1/m\omega^2$ — нормированное значение градиента сопровождающего поля.

На рис. 1 представлены фазовые портреты процесса сопровождения пучка заряженных частиц ВЧ полем. Как отмечалось выше, в настоящей работе не учитываются потери тока пучка, затухание ВЧ поля в канале сопровождения и потери энергии в самом пучке. В результате таких допущений система пучок—поле оказалась консервативной, и, как следствие этого, фазовые портреты представляются семейством замкнутых кривых. Характерной особенностью консервативного процесса сопровождения пучка является наличие двух областей на фазовой плоскости, разделенных значением $r_0/R_0 = 1$. Представляет несомненный интерес граничный случай: $r_0 = R_0$, $\dot{r}_0 = 0$, когда медленных колебаний границ пучка во времени и пространстве не происходит. Исследуем поведение функции r_0 в окрестности $r_0 = R_0$, т. е. $r_0 = R_0(1 + \xi)$, $\xi \ll 1$. Соотношение (6) может быть преобразовано к виду

$$(\xi'_\tau)^2 = -A^2[1 - D]\xi - A^2[1 + D]\xi^2, \qquad (8)$$

где $D = 2B\,[1 + A^2]\,R_0^{-2}A^{-2}$. Из (8) получаем выражение ξ в явном виде

$$\xi = \frac{1 - D}{1 + D} + \frac{|1 - D|}{1 + D}\sin\left[A\sqrt{\frac{1 + D}{2}}(\tau + C_2)\right], \qquad (9)$$

где C_2 — постоянная интегрирования (8). Как видно из (9), граница пучка r_0 относительно начального значения R_0 имеет постоянное смещение $(1 - D)\,R_0/(1 + D)$ и осциллирует с амплитудой $|1 - D|\,R_0/(1 + D)$ и частотой $\Omega = A\sqrt{(1 + D)/2}$. Для $D = 1$ будет реализован оптимальный режим сопровождения, при котором отклонений границ пучка от начального значения нет. Это условие определяет зависимость между величиной нормированного градиента сопровождающего поля A и значением нормированного тока пучка B

$$A = \sqrt{2B/(R_0^2 - 2B)}. \qquad (10)$$

В области $r_0/R_0 < 1$ преобладают фокусирующие силы и диаметр пучка никогда не превышает первоначальный. Напротив, в области $r_0/R_0 > 1$ преобладающее влияние оказывают силы кулоновского расталкивания и размеры пучка не принимают значений меньше начальных. Семейство фазовых портретов для изменяющегося параметра A при постоянном значении B показано на рис. 1. Из этого рисунка можно сделать вывод, что существует значительный диапазон изменения градиента поля сопровождения и плотности тока в пучке, для которых колебания границ пучка оказываются незначительными, а сопровождение пучка устойчивым.

2. Распределение амплитуды радиальной компоненты E_ρ волны E_{01} имеет, согласно [3], вид

$$E_\rho = -WJ_1\left(\rho\,\frac{2.405}{R}\right), \tag{11}$$

где R — радиус волновода; J_1 — функция Бесселя первого порядка; W — нормирующий множитель, определяющий максимальное значение амплитуды напряженности поля.

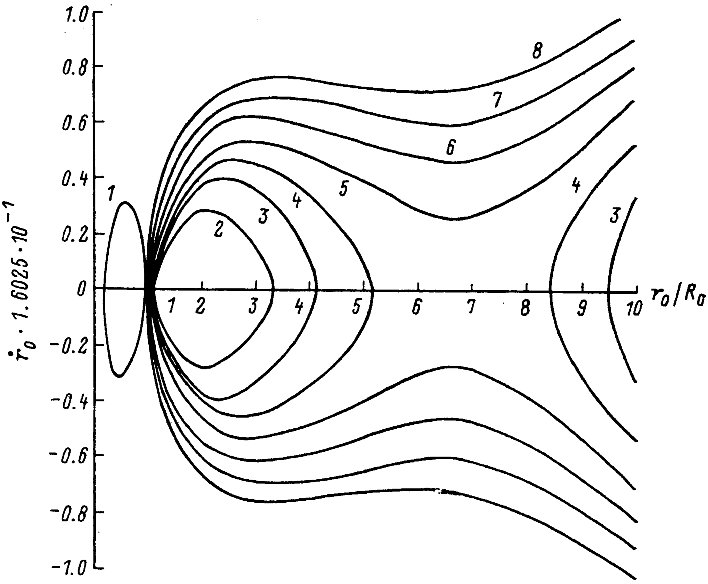

Рис. 3. Семейство фазовых портретов системы пучок—поле для процесса сопровождения пучка волной типа E_{01}, полученное при различных значениях тока пучка.

1 — $B=5\cdot10^{-6}$, *2* — 10^{-5}, *3* — $2\cdot10^{-5}$, *4* — $3\cdot10^{-5}$, *5* — $4\cdot10^{-5}$, *6* — $7\cdot10^{-5}$, *7* — $8\cdot10$, *8* — $9\cdot10$. Для всех кривых $R_0=0.1\,R$. Нормированная амплитуда напряженности поля фокусирующей силы $qm^{-1}\omega^{-2}W=0.04$.

Зависимость $E_\rho/E_{\rho\,\max}$ от ρ/R представлена на рис. 2, *1*. Фокусирующая сила, воздействию которой подвергается пучок заряженных частиц, определена в (5) и для распределения поля (11) может быть выражена

$$E_{\text{фок}}(\rho) = -\frac{1}{2}\frac{q}{m\omega^2}W^2 J_1\left(\rho\,\frac{2.405}{R}\right)\left[\frac{2.405}{R}\,J_0\left(\rho\,\frac{2.405}{R}\right) - \frac{1}{\rho}\,J_1\left(\rho\,\frac{2.405}{R}\right)\right]. \tag{12}$$

Зависимость $E_{\text{фок}}/E_{\rho\,\text{фок}\max}$ от ρ/R показана на рис. 2, *2*.

Уравнение, характеризующее совокупность фазовых траекторий движения потока заряженных частиц в неоднородном электромагнитном поле, определенном (11), можно получить из (6) в пренебрежении последним членом. В начальный момент времени, как и в предыдущем случае, полагаем $r_0=R_0$, $r'_{0\tau}=0$. Тогда из (6) получаем

$$(r'_{0\tau})^2 = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{m^2\omega^4}W^2\left[J_1^2\left(r_0\,\frac{2.405}{R}\right) - J_1^2\left(R_0\,\frac{2.405}{R}\right)\right] + B\ln\left(\frac{r_0^2}{R_0^2}\right). \tag{13}$$

Совокупность фазовых портретов процесса сопровождения пучка электромагнитным полем (11) для $R_0=0.1\,R$, постоянной амплитуды ВЧ поля и различных токов пучка показана на рис. 3. Обращает на себя внимание совокупность незамкнутых траекторий, которые соответствуют оседанию пучка на стенки волновода. Вместе с тем можно отметить, что здесь, как и на рис. 1, существует значительный диапазон токов пучка, для которых возможен процесс сопровождения с пульсациями границ, и в частности режим оптимального сопровождения.

Результаты работы сводятся к следующему.

1. Получены укороченные уравнения для граничных частиц пучка в случае произвольного распределения напряженности осесимметричного электромагнитного поля.

2. С помощью фазовых портретов процесса сопровождения доказано существование оптимального режима, при котором границы пучка остаются неизменными во времени и равными начальному размеру пучка.

3. Показано, что в практически важном режиме оптимального сопровождения метод медленно меняющегося параметра обеспечивает получение наиболее точных результатов.

Литература

[1] *Снедков Б. А., Снедков А. Б.* ЖТФ, 1985, т. 55, № 9, с. 1857—1860.
[2] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
[3] *Лебедев И. В.* Техника и приборы СВЧ. М.: Высшая школа, 1970. 439 с.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступило в Редакцию
3 декабря 1985 г.
В окончательной редакции
24 сентября 1987 г.