

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.222

Журнал технической физики, т. 58, в. 4, 1988

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ  
В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ БИФУРКАЦИЯМИ  
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ПУЗЫРЬКОВ

А. О. Максимов

При распространении акустических сигналов в двухфазной среде — жидкость с пузырьками газа — существенны резонансные взаимодействия волны с пузырьками. Газовый пузырек, совершая радиальные пульсации, представляет собой осциллятор с достаточно высокой добротностью, поэтому сечение рассеяния на нем велико. Кроме того, пузырьки представляют собой пример сильно нелинейной системы, поскольку сжимаемость газа на несколько порядков превосходит сжимаемость жидкости. Простые динамические системы, в данном случае пузырьки, совершающие периодические колебания, могут усиливать слабые сигналы вблизи порога динамической устойчивости [1]. Мощная волна накачки, распространяясь через пелену пузырьков, приводит их в режим нелинейных колебаний. В окрестности бифуркационных значений амплитуды накачки, отвечающих появлению неустойчивых колебательных состояний пузырьков, слабая сигнальная волна, резонансно взаимодействуя со слабоустойчивыми колебательными модами пузырьков, имеет очень большое сечение рассеяния, значительно превосходящее даже большое резонансное сечение рассеяния на свободном пузырьке. Отметим, что достаточно близким физическим аналогом этого эффекта является критическая опалесценция жидкости в окрестности фазового перехода [2]. В данных условиях существенно изменяются законы распространения сигнальной волны в жидкости с пузырьками газа. В частности, возникает возможность выбором фазы накачки управлять прозрачностью среды для сигнальной волны, делая ее гораздо более «мутной» или, наоборот, более «просветленной», чем в невозмущенном случае.

При количественном рассмотрении этого эффекта будем исходить из уравнений, описывающих возмущения в газожидкостной среде, записанных в виде [3]

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \Delta P', \quad \rho' = \frac{P'}{c_0^2} - 4\pi\rho_0 \int dR_0 g(R_0) (R^3 - R_0^3)/3, \quad (1)$$

здесь  $P' = P - P_0$ ;  $\rho' = \rho - \rho_0$ ;  $P_0$ ,  $P$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho$ ;  $R_0$ ,  $R$  — равновесные и текущие значения давления и плотности жидкости, радиусов пузырьков;  $c_0$  — скорость звука в жидкости;  $g(R_0)$  — функция распределения пузырьков по размерам. Систему (1) следует дополнить уравнением Релея—Плессета, которое описывает пульсации одиночного пузырька в поле давления

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{P_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right] + 2\delta R_0 \dot{R} = - \frac{P'}{\rho_0}, \quad (2)$$

здесь  $\gamma$  — показатель политропы;  $\delta$  — постоянная затухания, эффективно учитывающая диссипативные процессы вязкости и теплопроводности, а также радиационное затухание.

Пусть в среде распространяется мощная волна накачки

$$P_1 = 1/2 \cdot (A_1 \exp [i(\omega_1 t - k_1 x)] + \text{к. с.})$$

(ось  $x$  выбрана в направлении распространения волны) и слабая сигнальная волна

$$P_s = 1/2 \cdot (A_s \exp [i(\omega_s t - k_s x)] + \text{к. с.}),$$

$|A_1| \gg |A_s|$ . В качестве примера динамической неустойчивости рассмотрим окрестность порога возбуждения первой субгармонической составляющей колебаний пузырьков [4, 5]

и будем полагать, что  $\omega_s = 1/2 \omega_1$ . Методика построения равномерно пригодного разложения для линейного осциллятора при двухчастотном возбуждении стандартна (см., например, [6]). Решение (2) ищется в виде асимптотического ряда

$$R = R_0 + \frac{1}{2} (a \cdot i^{(\Phi_0 t + \vartheta)} + \text{к. с.}) + \frac{1}{2\rho_0 R_0} \left( \frac{A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)}}{\omega_1^2 - \Omega_0^2 - 2i\delta\omega_1} + \text{к. с.} \right) + \varepsilon u_1(a, \vartheta, t) + \varepsilon^2 u_2(a, \vartheta, t) + \dots$$

$\Omega_0 = (3\gamma P_0 / \rho_0 R_0^3)^{1/2}$  — собственная частота пузырька;  $\varepsilon$  — безразмерный малый параметр, вводимый для обозначения порядка нелинейных членов. Как и в работах [5, 7], ограничимся рассмотрением нелинейных слагаемых до третьего порядка включительно. В силу условия  $|A_1| \gg |A_s|$  возмущения, вызванные сигнальной волной, достаточно учесть в линейном по  $A_s$  приближении. Медленно меняющиеся амплитуда  $a$  и фаза  $\vartheta$  собственных колебаний пузырька определяются из системы «укороченных» уравнений, следующей из требования отсутствия секулярных членов в разложении. Для  $z = a \exp i \vartheta$  имеем

$$\begin{aligned} \dot{z} = -\delta z - i \left[ \frac{\omega_s^2 - \Omega_0^2}{2\omega_s} + \frac{|A_1|^2 \Delta \Omega}{\rho_0^2 R_0^4 \Omega_0^4} \right] z - i \frac{\gamma}{2\omega_1 \rho_0 R_0^2} A_1 e^{-ik_1 x} z^* + \\ + \frac{4\gamma\delta}{3\omega_1^2 \rho_0 R_0^2} A_1 e^{-ik_1 x} z^* + \frac{i A_s e^{-ik_s x}}{\rho_0 R_0 \omega_1}, \quad (3) \\ \Delta \Omega \equiv \frac{9/16\gamma^2 + 9\gamma + 1}{36} \Omega_0. \end{aligned}$$

Две резонансно взаимодействующие подсистемы — сигнальная волна и пузырьки — имеют различные масштабы временной релаксации. Для волны этот масштаб определяется характерным временем изменения амплитуды и фазы, а для пузырьков временем установления субгармонических колебаний. Ниже мы рассмотрим случай диссипативного затухания (см. [8]), когда субгармонические колебания устанавливаются раньше, чем амплитуда и фаза сигнальной волны успевают измениться заметным образом. В этом случае установившееся распределение амплитуд  $a_*$  и фаз  $\vartheta_*$  резонансных пузырьков дается стационарным решением системы (3)

$$\begin{aligned} z_* \equiv a_* e^{i\vartheta_*} = \frac{i}{\rho_0 R_0 \omega_1 \Delta} \left\{ \left[ \delta - i \left( \frac{\omega_s^2 - \Omega_0^2}{2\omega_s} + \frac{|A_1|^2 \Delta \Omega}{\rho_0^2 R_0^4 \Omega_0^4} \right) \right] A_s e^{-ik_s x} + \right. \\ \left. + \gamma (2\omega_1 \rho_0 R_0^2)^{-1} (i - \delta\delta/3\omega_1) A_1 \exp(-ik_1 x) A_s \exp(ik_s x) \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\Delta \equiv \delta^2 - \frac{\gamma^2 |A_1|^2}{4\omega_1^2 \rho_0^2 R_0^4} \left( 1 + \frac{64}{9} \frac{\delta^2}{\omega_1^2} \right) + \left[ \frac{\omega_s^2 - \Omega_0^2}{2\omega_s} + \Delta \Omega |A_1|^2 / (\rho_0^2 R_0^4) \right]^2.$$

Остановимся на анализе решения (4). Уравнение (3) без «вынуждающей силы» — сигнальной волны — определяет линейную устойчивость колебаний пузырьков в поле накачки с периодом  $2\pi/\omega_1$  относительно возмущений с частотой  $\omega_s$ , близкой к собственной частоте пузырька. При этом один из двух показателей Ляпунова обращается в нуль на линии  $\Delta (|A_1|^2, \omega_s - \Omega_0) = 0$ , определяющей порог возбуждения субгармонических колебаний (более подробный анализ устойчивости приведен в [7]). Отметим, что (4) имеет смысл только ниже порога, когда субгармонические колебания слабо, но устойчивы. Накачка двояким образом модифицирует собственные колебания резонансных пузырьков: происходит перенормировка собственной частоты — слагаемые, пропорциональные  $|A_1|^2$ , и, что более важно, за счет параметрического взаимодействия возможна компенсация диссипативных процессов. При этом в окрестности порога  $\Delta = 0$  реакция пузырьков на внешнее возмущение значительно возрастает, происходит параметрическое усиление колебаний.

В свою очередь для медленно меняющейся комплексной амплитуды сигнальной волны  $A_s$  имеем

$$\frac{\partial A_s}{\partial x} = 2\pi \rho_0 \omega_s c_0 \int dR_0 R_0^2 g(R_0) z_* e^{ik_s x}. \quad (5)$$

Заметим, что учтены только члены низшего порядка по  $|A_1|/P_0 \ll 1$  (этот параметр определяет малость нерезонансных членов в асимптотическом разложении решения (2)). Подставляя решение (4) в правую часть (5) и проводя интегрирование, воспользуемся, как обычно (см., например, [8]), остротой резонансного множителя  $\Delta$  и вынесем плавно меняющиеся функции за знак интеграла. В результате получаем

$$\frac{\partial A_s}{\partial x} = -\gamma_s \frac{1}{\sqrt{1 - |A_1|^2/A_k^2}} \left[ A_s + i \frac{A_1}{A_k} A_s^* \right], \quad (6)$$

здесь  $\gamma_s = \pi^2 c_0 g (R_*) R_*^2 \omega_s^{-1}$  — линейный коэффициент затухания на частоте  $\omega_s$  при рассеянии на невозмущенных пузырьках;  $A_k = 2\omega_1 \gamma^{-1} \delta \rho_0 R_*^2$  — критическое значение поля накачки, определяющее порог устойчивости субгармонических колебаний;  $R_* = (3\gamma P_0 / \rho_0 \omega_s^2)^{1/2}$  — радиус резонансного пузырька. При вычислении правой части (5) мы пренебрегли вкладом интеграла в смысле главного значения, дающего обычный вклад в дисперсию сигнальной волны, малого по сравнению с оставленными членами. Дополненное выражением для поля накачки (6) имеет вид хорошо известного соотношения, описывающего параметрическое взаимодействие волн в нелинейной среде [9, 10]. Качественное отличие определяется множителем  $(1 - |A_1|^2/A_k^2)^{1/2}$ , имеющим корневую особенность.

Решение (6) наиболее просто получить в приближении постоянной волны накачки, когда на характерном масштабе изменения сигнальной волны можно считать, что амплитуда  $|A_1|$  близка к пороговому значению. Это приближение просто реализовать в искусственных средах, обеспечив отсутствие резонансных пузырьков для волны накачки и создав значительную концентрацию в области размеров  $R_0 \sim R_*$ . Подобная ситуация возникает и в естественных условиях при достаточно долгом озвучивании среды мощной накачкой, поскольку в этом случае за счет коагуляции пузырьков может произойти искусственное просветление среды на частоте накачки [11]. Наконец, это приближение будет справедливо при описании прохождения волн через слой пузырьков в условиях, когда инкремент затухания накачки много меньше, чем  $1/L$  ( $L$  — толщина слоя).

В данном приближении решение уравнения (6) элементарно [9]

$$P_s(x, t) = |A_s(0)| \cos(\vartheta_s(0) - \vartheta_1/2 - \pi/4) \cos(\omega_s t - k_s x + \vartheta_1/2 + \pi/4) \times \\ \times \exp[-\gamma_s x 2/(2\Delta A/A_k)^{1/2}] - |A_s(0)| \sin(\vartheta_s(0) - \vartheta_1/2 - \pi/4) \times \\ \times \sin(\omega_s t - k_s x + \vartheta_1/2 + \pi/4) \exp[-\gamma_s x (\Delta A/A_k)^{1/2}], \\ \vartheta_s \equiv \arg A_s, \quad \vartheta_1 \equiv \arg A_1, \quad \Delta A = A_k - |A_1| \quad (0 < \Delta A_1 \leq A_k).$$

Задавая фазу накачки на входе в нелинейную газожидкостную среду, можно варьировать свойства прозрачности для сигнальной волны от очень мутной

$$A_s(x) \sim \exp[-2\gamma_s x / (2\Delta A/A_k)^{1/2}], \quad \vartheta_1 \approx 2\vartheta_s(0) - \pi/2 + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm$$

до очень прозрачной

$$A_s(x) \sim \exp[-\gamma_s x (\Delta A/A_k)^{1/2}], \quad \vartheta_1 \approx 2\vartheta_s(0) + \pi/2 + 2\pi n.$$

Если пузырьки занимают слой толщины  $L$  и логарифмический инкремент затухания волны накачки  $\gamma_1$  много меньше  $1/L$  — условие применимости приближения постоянной накачки, то, разлагая (7), можно получить выражение для коэффициента прохождения сигнальной волны через слой пузырьков.

В том случае, когда пренебречь затуханием волны накачки нельзя, точное решение (6) может быть получено и для переменной амплитуды  $A_1(x) = A_1(0) \exp[-\gamma_1 x]$

$$A_s(x) = \exp\left[\frac{\gamma_s}{\gamma_1} \ln \frac{u(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x(1 + \sqrt{1 - u^2})}\right] \left\{ \exp\left[\frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \left(\arctg \frac{u}{1 + \sqrt{1 - u^2}} - \arctg \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)\right] \frac{1}{2} (A_s(0) + A_s^*(0) e^{i(\vartheta_1 - 2\vartheta_s(0) - \pi/2)}) + \right. \\ \left. + \exp\left[-\frac{2\gamma_s}{\gamma_1} \left(\arctg \frac{u}{1 + \sqrt{1 - u^2}} - \arctg \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)\right] \cdot \frac{1}{2} (A_s(0) - A_s^*(0) e^{i(\vartheta_1 - 2\vartheta_s(0) - \pi/2)}) \right\}, \\ x \equiv |A_1(0)|/A_k, \quad u \equiv x \exp(-\gamma_1 x).$$

На расстояниях  $x \ll \gamma_1^{-1}$  это решение совпадает с (7), при этом выбором фазы  $\vartheta_1$  среду можно сделать эффективно «мутной», просветление в общем случае носит только количественный характер. Заметим, что малость амплитуды  $A_s$  позволяет пренебречь параметрическим затуханием  $A_1$  за счет взаимодействия с сигнальной волной.

- [1] *Kurt Wiesenfeld, Bruce McNamara*. Phys. Rev. A, 1986, v. 33, N 1, p. 629—643.  
 [2] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. 2-е изд. испр. и доп. М.: Наука, 1982. 624 с.  
 [3] *Рюттов Д. Д.* Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, № 9, с. 446—449.  
 [4] *Anthony Eller, H. G. Flynn*. JASA, 1969, v. 46, N 3 (pt 2), p. 722—727.  
 [5] *Prosperetti A.* JASA, 1975, v. 57, N 1, p. 810—821.  
 [6] *Найфа А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.  
 [7] *Максимов А. О.* Препринт ТОИ ДВНЦ. Владивосток, 1985. 19 с.  
 [8] *Максимов А. О.* ЖТФ, 1986, т. 56, № 1, с. 185—189.  
 [9] *Заболоцкая Е. А., Соляян С. И.* Акуст. журн., 1967, т. 13, № 2, с. 296—298.  
 [10] *Руденко О. В., Соляян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.  
 [11] *Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М.* Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, № 7, с. 423—425.

Дальневосточный научный центр  
 Тихоокеанский океанологический  
 институт АН СССР  
 Владивосток

Поступило в Редакцию  
 23 июня 1986 г.  
 В окончательной редакции  
 26 февраля 1987 г.

УДК 669.25.295.018 : 539.89

Журнал технической физики, т. 58, в. 4, 1988

## ДВИЖЕНИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ СТРУИ В ПЛОТНОЙ СРЕДЕ

В. И. Ковтун, В. Ф. Мазанко

Движение струй и подобных им тел в различных средах рассматривалось в многочисленных работах [1-9].

Основные схемы течений (линий тока), полученные в этих работах для струй и сред на основании теоретических представлений, показаны на рис. 1, а—г. Видно, что, несмотря на ограниченное число схем течений, в данном вопросе существует неопределенность, которая вызвала необходимость экспериментального изучения течения среды вблизи контактной поверхности среды со струей.

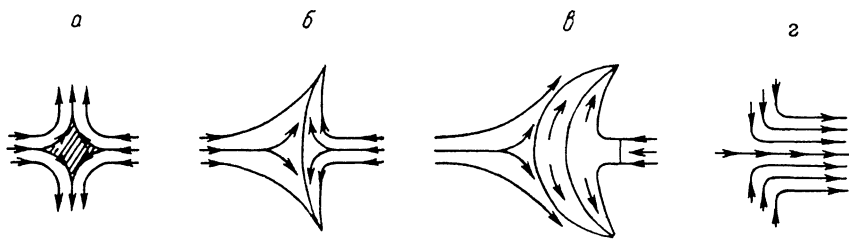


Рис. 1. Схемы течений в струе и среде.

а — течение с образованием застойной зоны [8]. б — дозвуковое течение [9, 7], в — сверхзвуковое течение [6], г — истечение струи в неподвижную жидкость [1].

В качестве объектов исследования выбраны среда с плотностью  $7.86 \text{ г/см}^3$  (железо) и движущаяся в ней с переменной скоростью медная струя. Это вызвано тем, что струя имела градиент скорости по длине (головная часть имела скорость, большую, чем хвостовая). В среде головная часть струи двигалась с околосвуковой скоростью, а средняя и хвостовая — с дозвуковой. Соотношение размеров струи и среды такое, что среду можно считать полубесконечной по отношению к струе.

Исследовались сборки, в каждой из которых размещено по пять реперных прокладок из железа, содержащих изотоп углерода, и олова, содержащих изотоп олова (рис. 2). После того как движение струи прекращалось, экспериментальные сборки разрезали по оси образовавшейся каверны, шлифовали и полировали. Следует сразу отметить, что обработке подвергалась только полученная после разрезки плоскость, что исключало возможность