

БИФУРКАЦИИ АТТРАКТОРОВ В ПРИСУТСТВИИ ФЛУКТУАЦИЙ

В. С. Анищенко, М. А. Сафонова

Экспериментально исследованы бифуркации слияния лент хаотических аттракторов, индуцированные внешним шумом. Установлена их взаимосвязь с рождением гомоклинических траекторий. Сложным фазовым переходам поставлены в соответствие изменения физических характеристик и размерности аттракторов.

Введение

Возможность хаотической динамики нелинейных детерминированных систем сейчас обоснована теоретически и подтверждена экспериментально. Но любая детерминированная система является неполной в силу того, что реальные устройства подвержены шумовым воздействиям. Динамическая стохастичность, обусловленная экспоненциальной неустойчивостью фазовых траекторий в аттракторе, характеризуется чувствительной зависимостью от начальных данных. Неопределенность в задании исходного состояния системы естественно связана с флуктуациями. Поэтому влияние шумовых воздействий на автостохастические режимы может быть принципиальным и требует изучения.

Динамика грубых систем под действием слабого шума вдали от точек бифуркаций изменяется мало. Но если система находится вблизи бифуркационных значений управляющих параметров или областей мультистабильности (где существует несколько устойчивых состояний одновременно), то роль флуктуаций существенна. Шумовое воздействие может индуцировать бифуркационные явления, изменяя эффективные значения бифуркационных параметров, а также приводить к новым фазовым переходам.

Анализ влияния флуктуаций на динамику нелинейных систем проводится посредством стохастических дифференциальных уравнений или соответствующего кинетического уравнения Фоккера—Планка [1, 2]. В первом случае, удобном для численных экспериментов, в детерминированные уравнения исходной системы вводятся ланжевенковские источники

$$\dot{x} = f(x, \mu) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — вектор N -мерного случайного процесса с заданным распределением (N — размерность фазового пространства системы). При этом говорят об аддитивном шуме, воздействие которого изучается в настоящей работе. Исследуемое эволюционное уравнение с учетом шумов становится стохастическим; состояние системы описывается случайным процессом $x(t)$. Регистрируемые в экспериментах физические величины есть моментные функции соответствующего закона распределения.

Интерес к вопросу о воздействии шума на динамику нелинейных систем резко повысился в последние годы. Исследовано влияние аддитивных шумов на бифуркацию рождения предельного цикла [3, 4], на последовательность бифуркаций удвоения периода [5–8]. Отмечены следующие закономерности общего характера. В присутствии флуктуаций не существует в строгом смысле

бифуркационных точек по параметрам. В пространстве параметров существуют конечные переходные области, где осуществляется качественная перестройка структуры движения системы. Меняется характер течения бифуркаций и свойства вновь установившихся режимов. Для основных бифуркаций стационарных и периодических режимов коразмерности теоретически установлены и экспериментально подтверждены типичные перестройки режимов, обусловленные действием шума вблизи точек бифуркаций. В частности, выявлены характерные закономерности в изменениях спектров колебаний [3, 4, 7].

В сравнении с бифуркациями регулярных режимов роль шумовых воздействий на режимы динамической стохастичности исследована недостаточно. Объяснение бифуркационных явлений в автостохастических системах требует привлечения понятия так называемых гиперболических траекторий. Условия гиперболичности были сформулированы Песиним [9] в терминах спектра ляпуновских характеристических показателей (спектра ЛХП). Оселедец [10] доказал существование спектра ЛХП для определенного класса динамических систем. Эксперименты выявили, что спектр ЛХП существует для гораздо более широкого класса систем [11]. Многими авторами понятие спектра ЛХП интуитивно было распространено и на динамические системы, подверженные действию флуктуаций [4-6, 12], что позже получило строгое теоретическое обоснование [13-15]. Таким образом, понятие спектра ЛХП приобрело значительную важнейшую характеристику динамических систем с шумами.

Поскольку необходимым условием развития динамической стохастичности в диссипативных системах является наличие так называемых гомоклинических траекторий и структур, то исследование бифуркаций хаотических аттракторов и влияния на них флуктуаций должно базироваться на изучении соответствующих гомоклинических эффектов. Целью настоящей работы является исследование сложных фазовых переходов, обусловленных бифуркациями в окрестности гомоклинических траекторий в присутствии флуктуаций. Различают два вида гомоклинических траекторий: 1) траектории, по которым пересекаются устойчивые и неустойчивые многообразия седловых периодических движений; 2) двоякоасимптотические траектории седлового положения равновесия [16, 17].

В окрестности гомоклинических траекторий может происходить бесконечное число бифуркаций с образованием счетного множества устойчивых и неустойчивых периодических траекторий и нетривиальных гиперболических подмножеств [17, 18]. Ясно, что влияние флуктуаций в окрестности гомоклиник должно быть особенно ощутимым. Гомоклинические траектории (вне зависимости от свойства грубости) всегда неустойчивы и поэтому в экспериментах «невидимы». Ненаблюдаемым может быть и гиперболическое подмножество траекторий в окрестности гомоклиник (ввиду наличия устойчивых периодических орбит, к примеру). Воздействие шума может принципиально изменить режим движения системы, индуцируя хаотическое поведение, близкое по своим характеристикам к «странному аттрактору» [19]. Действие шума в указанных ситуациях способно вызвать новые бифуркационные переходы, которые в детерминированных моделях вовсе отсутствуют.

Мы ограничимся исследованием влияния слабого аддитивного шума на режимы, которым в динамических системах отвечает существование гомоклинических траекторий первого типа. Задача требует рассмотрения бифуркационных явлений в системах без шумов с последующим анализом изменений режимов колебаний под действием флуктуаций. В качестве критериев, по которым диагностируются бифуркации режимов, в работе используются характерные изменения фазовых портретов (или их сечений Пуанкаре), спектров мощности колебаний и спектров ЛХП.

1. Бифуркации аттракторов в генераторе с инерционной нелинейностью

В работах [20, 21] введена в рассмотрение и детально исследована динамика простой автостохастической системы — модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (МГИН). Указанная система удобна для проведения

исследований влияния флуктуаций на сложные бифуркационные явления. Стохастические уравнения МГИН имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz + D\xi_1(\tau), & \dot{y} &= -x + D\xi_2(\tau), \\ \dot{z} &= -gz + I(x)gx^2 + D\xi_3(\tau), \end{aligned}$$

где $I(x)=1 (x > 0)$; $0 (x \leq 0)$; m, g — управляющие параметры; $\xi_i(\tau)$ — нормально распределенный δ -коррелированный шум, удовлетворяющий условиям

$$\langle \xi_i(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(\tau) \xi_j(\tau') \rangle = D\delta(\tau - \tau'),$$

D — интенсивность внешних флуктуаций.

Динамика системы (1) в отсутствие флуктуаций. Бифуркационные диаграммы режимов на плоскости параметров m и g описаны в работах [12, 22]. При фиксированном $g=0.3$ движение по параметру m сопровождается последовательностью бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума

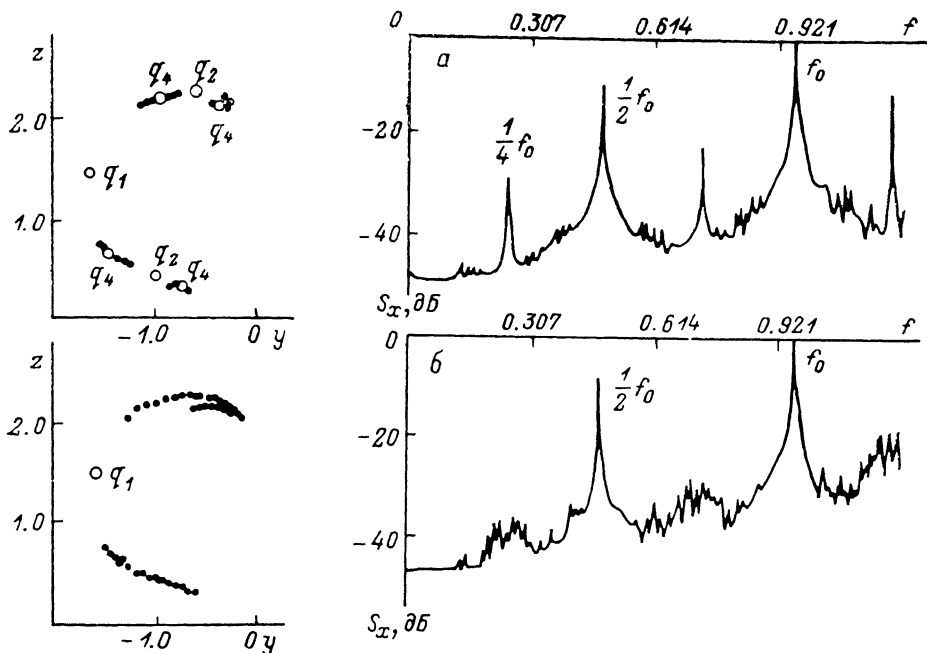


Рис. 1. Слияние 4-тактной ленты СА в 2-тактную в МГИН в отсутствие шумов.

для циклов $\Gamma_i (i=1, 2, \dots)$, которая накапливается к критической точке $m^*=1.08512 \dots$ рождения странного аттрактора (СА) ленточного типа [22]. С превышением $m > m^*$ реализуется последовательность обратных бифуркаций слияния хаотических лент СА [5, 6, 12]. На рис. 1 представлены отображения Пуанкаре и спектры колебаний системы (1) для $m=1.09$ (а) и 1.10 (б), $g=0.3$. В случае а отображение включает четыре отдельных несвязанных участка, в случае б — только два. В дальнейшем СА типа а будем называть 4-тактной лентой, а типа б — 2-тактной. С тактностью лент СА однозначно связана структура спектров мощности $S_x(f)$ автоколебаний. В случае а в спектре выделяются резонансные выбросы на частотах $nf_0, nf_0/2$ и $nf_0/4$, а в случае б выбросы на частотах $kf_0/4 (k=1, 3, 5 \dots)$ размываются.

В интервале $1.09 < m < 1.10$ хаотический режим претерпел бифуркацию слияния 4-тактной ленты в 2-тактную. На рис. 1, а, б в отображении Пуанкаре ленточных аттракторов нанесены точки $q_{1, 2, 4}$, отвечающие пересечению с секущей соответствующих седловых циклов Γ_1, Γ_2 и Γ_4 , потерявших устойчивость через удвоения. Как видно из рис. 1, а точки 4-тактного цикла q_4 включены в аттрактор, а точки $q_{1, 2}$ — нет. После слияния лент СА (рис. 1, б) точки q_2 оказались включенными в 2-тактную ленту СА.

Установлена взаимосвязь ленточной структуры СА с многообразиями седловых циклов за критической точкой. К бифуркациям слияния лент СА приводят изменения в поведении неустойчивых многообразий седловых циклов. Проанализируем пример бифуркации слияния 4-тактной ленты СА в 2-тактную. Седловой цикл Γ_2 имеет двумерные устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия (сепаратрисные поверхности). Они пересекают секущую Пуанкаре $x=0$ по одномерным кривым, которые представляют собой устойчивое и неустойчивое многообразия седловой неподвижной точки q_2 . Указанные многообразия точки q_2 можно рассчитать на ЭВМ [23]. Результаты приведены на

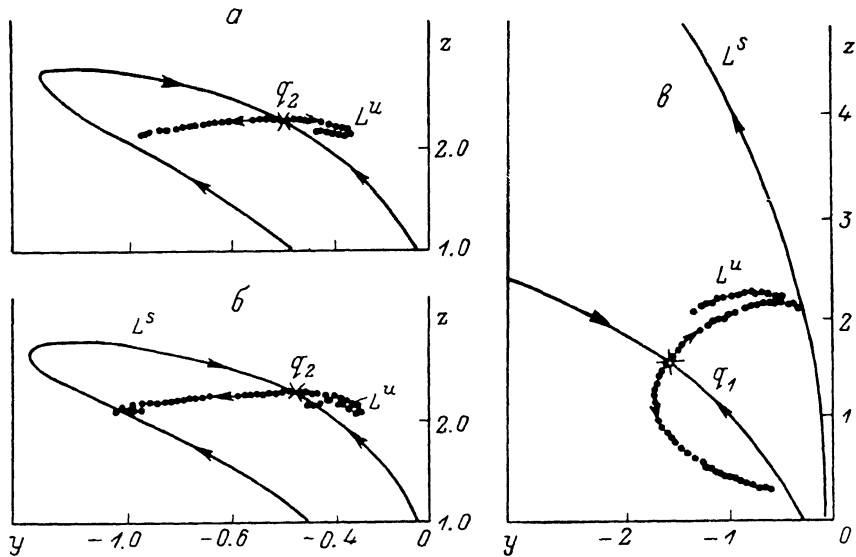


Рис. 2. Устойчивое L^s и неустойчивое L^u многообразия седловых циклов Γ_2 (а, б) и Γ_1 (в) в МГИН.

а, в — $m=1.09$; б — 1.10 , $g=0.3$.

рис. 2. При $m=1.09$ (а) многообразия не пересекаются, а при $m=1.10$ (б) пересекаются с образованием гомоклинических точек.¹ До появления гомоклиники сепаратрисные поверхности цикла Γ_2 отделяют в фазовом пространстве системы R^N соответствующие области, где существует поток хаотических фазовых траекторий. Рождение гомоклинической траектории приводит к перестройке структуры разбиения фазового пространства на траектории. В частности, происходит слияние хаотических лент СА, обусловленное разрушением соответствующих сепаратрисных поверхностей. При этом увеличивается степень перемешивания. Положительный показатель λ^+ спектра ЛХП в случае 4-тактной ленты СА ($m=1.09$) равен $+0.016$ и достигает $+0.026$ в случае 2-тактной ленты ($m=1.10$).

Отметим важный факт: в результате гомоклинической бифуркации одна из ветвей 2-тактной ленты СА в отображении качественно повторяет ход неустойчивого многообразия L^u точки q_2 (ср. рис. 1, 2). Окрестность неустойчивого многообразия стала притягивающей (аттрактором) и поэтому «видимой».

Факту существования 4-тактной ленты СА при $m=1.09$ отвечает наличие гомоклинической траектории у седлового цикла Γ_4 . Отсутствие 1-тактной ленты СА подтверждается расчетами инвариантных многообразий точки q_1 . Ветви инвариантных многообразий однотоктного цикла не пересекаются (рис. 2, в). В области существования СА $1.085 \leq m \leq 1.25$ гомоклинической траектории однотоктного цикла Γ_1 при $g=0.3$ не существует. Этим и объясняется, что минимальная тактность ленты СА при $g=0.3$ равна 2. Вид неустойчивого многообразия L^u цикла Γ_1 в отображении рис. 2, в предсказывает форму 1-тактной

¹ На рис. 2 даны результаты расчета начальных ветвей неустойчивых многообразий, приводящих к появлению первых гомоклинических точек.

ленты СА, которая реализуется с уменьшением величины параметра $g < 0.3$ в результате гомоклинической бифуркации.

Влияние флуктуаций малой интенсивности на бифуркации ленточных аттракторов

На рис. 3 представлены отображения Пуанкаре и спектры мощности СА системы (1) для $m=1.09$ при двух значениях интенсивности шума D . Шум $D=0.01$ индуцирует бифуркацию слияния 4-тактной ленты СА в 2-тактную. Флуктуации малой интенсивности, с физической точки зрения, равносильны здесь малому увеличению параметра неравновесности m . Увеличение интенсивности до $D=0.05$ приводит к рождению 1-тактной ленты СА (рис. 3, б). Шум индуцирует бифуркацию, не реализующуюся в динамической системе (1) при $D=0$.

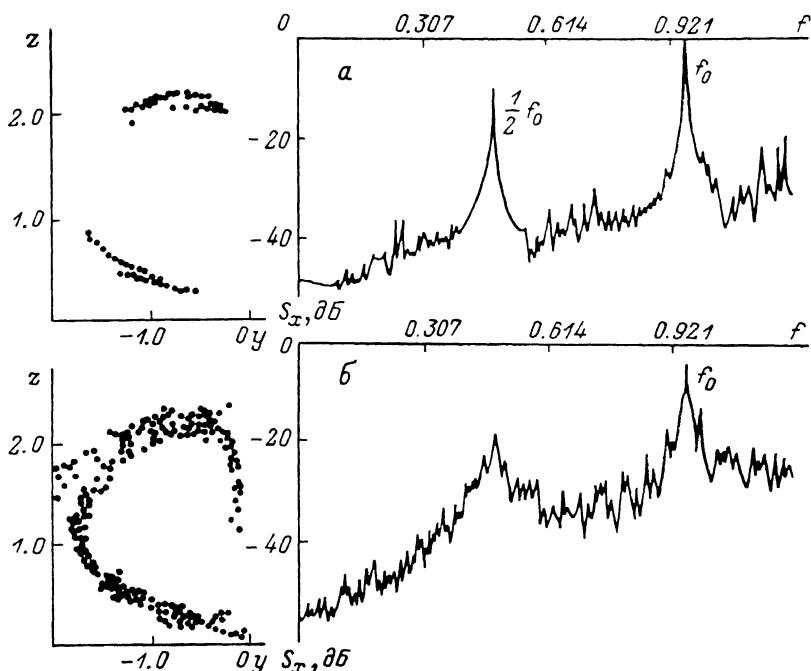


Рис. 3. Влияние внешнего шума на 4-тактную ленту СА в МГИН.

$m=1.09, g=0.3, D=0.01$ (а) и 0.05 (б).

Помимо убедительной картины в эволюции спектров колебаний, бифуркация слияния лент СА сопровождается (как и в случае $D=0$) увеличением степени перемешивания. Однако возможны и противоположные эффекты. Шум может индуцировать «порядок». Например, если рассмотреть решение системы (1) для $m=1.16$ (режим 2-тактной ленты СА при $D=0$), то действие флуктуаций интенсивности $D=0.01$ вызывает бифуркационный переход «СА → предельный цикл», обусловленный близостью системы к точке касательной бифуркации [12]. Указанные эффекты не исчерпывают всей картины возможных явлений. В частности, увеличение интенсивности D в интервале значений, не вызывающих бифуркационных перестроек структуры СА, сопровождается уменьшением степени перемешивания. Зависимости максимального показателя спектра ЛХП от интенсивности шума для различных исходных режимов приведены на рис. 4, а.

Влияние флуктуаций на бифуркации аттракторов исследовалось экспериментально на реальном МГИН при регулируемом уровне внешнего шума. Эксперименты подтвердили результаты вычислений. На рис. 5 приведены экспериментальные данные, отражающие бифуркацию слияния 2-тактной ленты СА в 1-тактную, обусловленную изменением параметра m при $g=0.2$. Влияние

собственных флуктуаций низкочастотного генератора здесь пренебрежимо мало, внешний шум отсутствовал. При фиксировании m указанный переход в хаосе

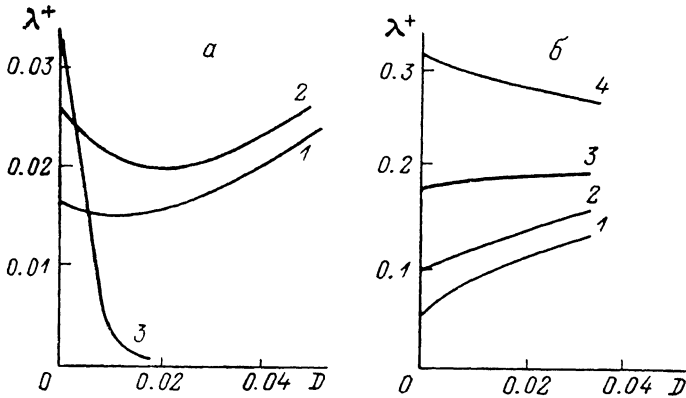


Рис. 4. Зависимости максимального показателя спектра ЛХП λ^+ от интенсивности шума. а — МГИН, для $m=1.09$ (1), 1.10 (2), 1.16 (3); б — отобразование Хенона для $\alpha=1.061$ (1), 1.07 (2), 1.1 (3), 1.17 (4).

индуцируется увеличением интенсивности внешнего шума. Характерные изменения структуры СА и соответствующих спектров мощности при этом практи-

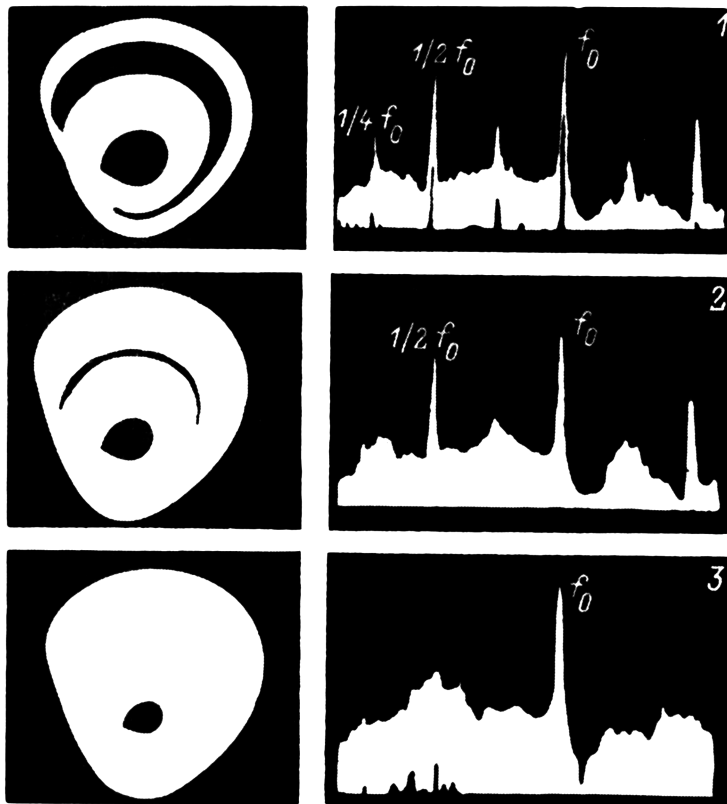


Рис. 5. Бифуркация слияния лент СА в физическом эксперименте.

1 — момент слияния 4-тактной ленты СА в 2-тактную, 2 — 2-тактная лента СА вблизи последующей бифуркации слияния, 3 — 1-тактная лента СА. Проекция фазовых траекторий на XY-плоскость и соответствующие спектры мощности $S_x(f)$.

чески идентичны показанным на рис. 5. Отличие состоит в более заметном уширении спектральных линий базовых частот в случае переходов, индуцированных шумом (классическое влияние флуктуаций на предельный цикл).

С точки зрения физики колебаний, влияние малых флуктуаций на автостохастические режимы приводит к разнообразным бифуркационным явлениям, которые в принципе можно наблюдать и в чисто динамической системе при соответствующем изменении ее параметров. Более детальное рассмотрение указанных процессов свидетельствует, что в строгом смысле это не так. Воздействие внешних флуктуаций приводит к перестройкам структуры аттракторов, которые при грубом физическом рассмотрении не проявляются. Однако всестороннее исследование изменений структуры СА под действием шума с использованием дифференциальных систем типа (1) затруднено в связи с большими затратами машинного времени. К этому ведет необходимость дупараметрического анализа и статистическая обработка множества реализаций процессов, полученных численным интегрированием.

Представляется удобным дальнейшие исследования провести применительно к дискретной модельной системе, обладающей качественно совпадающими в сравнении с МГИН бифуркационными свойствами. Такой системой является ставшее классическим двумерное отображение Хенона [24].

2. Исследование динамики отображения Хенона

Стохастические уравнения модели Хенона имеют вид

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + D\xi_1(n), \quad y_{n+1} = bx_n + D\xi_2(n), \quad (2)$$

где параметры a и b сходны по физическому смыслу с параметрами m и g системы (1) соответственно. Как будет показано ниже, дискретная модель (2) в определенном смысле является аналогом дифференциальной системы (1), демонстрируя на плоскости параметров a, b совокупность бифуркаций, качественно эквивалентную реализующимся в отображении Пуанкаре системы (1).

Динамика системы (2) при $D=0$. Бифуркационные линии для неподвижных точек кратности 1, 2...6 аналитически найдены в работе [25]. Показано, что на некоторой линии рождаются две неподвижные точки T_0 (седловая) и T_1 (устойчивая). Точка T_1 в дальнейшем на линии l_1 претерпевает бифуркацию удвоения (рождается 2-цикл T_2), затем следует каскад удвоений Фейгенбаума. Фрагмент подробной диаграммы режимов системы (2) представлен на рис. 6 и, помимо линий удвоения периода ($l_2, 4, 8$) и линии критических значений параметров рождения СА ($l_{кр}$), содержит бифуркационные линии гомоклинического касания $\Gamma_0, 1, 2, 4$ применительно к седловым неподвижным точкам $T_0, 1, 2, 4$ отображения (2). Бифуркации неподвижных точек T_i качественно соответствуют бифуркациям предельных циклов (1). Справа от линий Γ_i имеет место грубое гомоклиническое пересечение устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек T_i , эквивалентное образованию грубых гомоклинических траекторий седловых циклов системы (1). Это подтверждено расчетами инвариантных многообразий неподвижных точек T_i для различных значений параметров a и b . Сепаратрисы ведут себя качественно эквивалентно в сравнении с данными рис. 2. Особенность отмечена для седловой точки T_0 : одна из ветвей ее неустойчивого многообразия уходит на бесконечность, что ведет к разрушению аттрактора. Для всех седловых точек T_i отображения (2) выполняются условия теоремы Шильникова—Гонченко [17] (как, впрочем, и для седловых циклов системы (1)), что подтверждает квазигиперболичность аттрактора Хенона и его адекватность ленточным аттракторам системы (1).

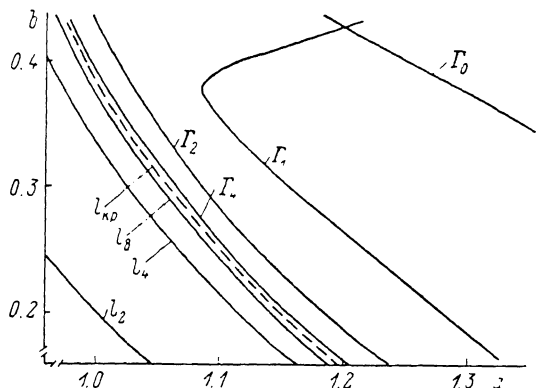


Рис. 6. Фрагмент бифуркационной диаграммы отображения Хенона.

Зафиксируем $b=0.3$ и рассмотрим ряд значений параметра a , расположенных последовательно между бифуркационными линиями $l_{кр}$ и Γ_i . С ростом параметра a реализуется последовательность бифуркаций слияния лент СА с образованием в итоге 1-тактной ленты при $a=1.17$. В каждой из рассмотренных точек плоскости параметров СА повторяет форму соответствующих неустойчивых многообразий седловых точек T_i . Линии гомоклинического касания Γ_i являются бифуркационными линиями слияния многотактных лент СА отображения (2) при $D=0$. На рис. 7 представлены численные результаты, отвечающие слиянию 4-тактной ленты СА в 2-тактную при увеличении параметра a (ср. с рис. 1).

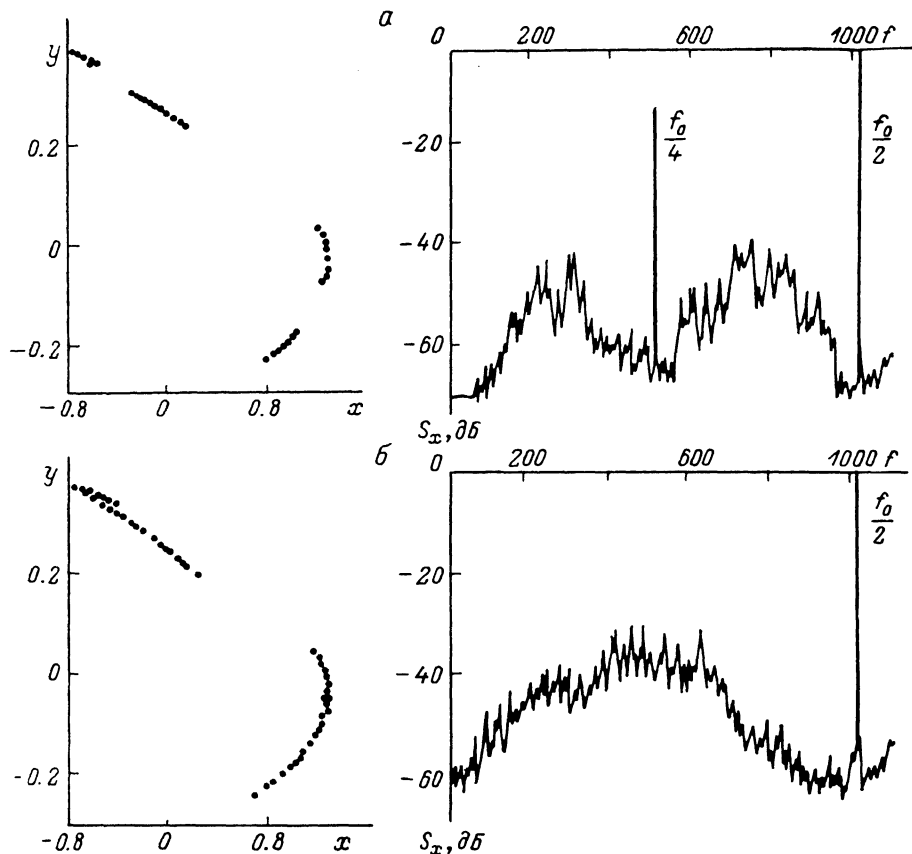


Рис. 7. Слияние 4-тактной ленты СА в 2-тактную для отображения Хенона при $D=0$, $b=0.3$, $a=1.07$ (а) и 1.10 (б).

Влияние флуктуаций на бифуркации аттракторов системы (2). Итерациями отображения для фиксированных $a=1.061$, $b=0.3$ и интенсивностях шума $0 \leq D \leq 0.03$ установлено, что с ростом шума индуцируется последовательность бифуркаций слияния лент СА вплоть до 1-тактной ($D=0.03$). Данные сведены в таблицу. Цифры таблицы отвечают тактности ленты СА при соответствующих значениях a и D . Сопоставление данных таблицы с соответствующими зависимостями показателя спектра ЛХП λ^+ (a, D) (рис. 4, б) свидетельствует о прямой зависимости скорости изменения λ^+ от бифуркаций объединения лент СА.

Ускорение роста λ^+ наблюдается в случаях, когда изменение параметра вызывает бифуркации объединения лент СА, «подключая» в аттрактор новые гомоклинические структуры. Если перестройки топологической структуры СА с увеличением D не происходит ($a=1.17$; см. таблицу), то скорость роста λ^+ либо резко замедляется, либо становится отрицательной (рис. 4, б).

Увеличение интенсивности флуктуаций порождает последовательность бифуркаций слияния лент СА, разрушая сепаратрисные поверхности соответствующих седловых точек отображения (2). Аналогичный эффект достигается вариацией параметра a при $D=0$. Однако фазовые портреты ленточных СА при $D=0$ и $D > 0$ по структуре отличаются. В случае $D=0$ СА близок по форме к неустойчивым многообразиям седловых точек минимальной тактности, имеющих гомоклиническую траекторию. Структура СА здесь канторова [24]. При $D > 0$ СА плотно заполняет некоторую окрестность неустойчивых многообразий, сохраняя их форму лишь при грубом рассмотрении. На рис. 8 представлены результаты, иллюстрирующие бифуркацию слияния 2-тактной ленты СА под действием шума. Объем аттрактора, нулевой при $D=0$, становится положительным в присутствии шумов. Канторовость структуры СА (при $D=0$)

D	a			
	1.061	1.070	1.100	1.170
0.00	8	4	2	1
0.01	2	2	2	1
0.03	1	1	1	1

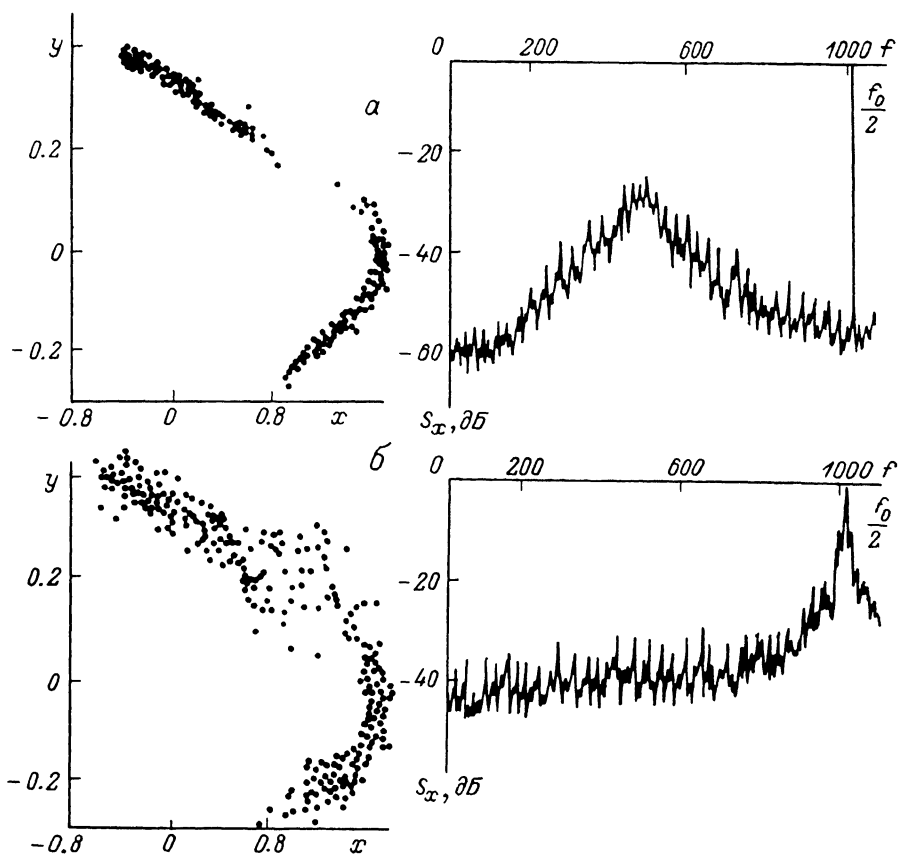


Рис. 8. Влияние флуктуаций на 2-тактную ленту СА отображения Хенона в точке плоскости параметров $a=1.061$, $b=0.3$, $a=D=0.01$ (а) и 0.03 (б).

при воздействии шумов разрушается и, как следствие, исчезает дробная часть фрактальной размерности СА: размерность аттрактора становится равной размерности фазового пространства N (для (2) $N=2$).²

² Последнее утверждение обосновано данными расчетов фрактальной размерности D_F аттракторов, проведенных нами методом прямого покрытия хаотического множества, описанным в [26]. Расчеты показали, что в присутствии шумов понятие лулуновской размерности D_L теряет смысл, формула Каплана—Йорка неприменима, а размерность $D_F=N$.

Детерминированный хаос в отображении (2), как и в системе (1), имеет квазигиперболическую структуру [27], включая множество устойчивых периодических точек (циклов). Воздействие шума превращает исходный квазиаттрактор в стохастический, объединяя различные хаотические подмножества в единое притягивающее множество. Зависимость энтропии Колмогорова от параметра, имеющая бесконечное число разрывов и «провалов» при $D=0$, с введением шума превращается в гладкую положительно определенную в конечном интервале параметра функцию.

Заключение

Результаты экспериментальных исследований бифуркаций аттракторов в модифицированном генераторе с инерционной нелинейностью и отображении Хенона кратко сводятся к следующим.

1. Установлена качественная эквивалентность бифуркационных свойств МГИН и дискретного отображения Хенона при двухпараметрическом рассмотрении.

2. Численно построена бифуркационная диаграмма отображения Хенона, включающая линии гомоклинического касания для седловых неподвижных точек периодов, кратных двум. Экспериментально обосновано, что бифуркации связности аттракторов, проявляющиеся в слиянии лент СА в областях надкритичности, обусловлены рождением грубых гомоклинических траекторий седловых точек (циклов для МГИН).

3. Бифуркации слияния лент СА могут индуцироваться внешним шумом при фиксировании параметров системы. Это объясняет факт ограничения числа экспериментально наблюдаемых бифуркаций связности подобно ограничению каскада субгармонических бифуркаций Фейгенбаума для предельных циклов или неподвижных точек отображения.

4. Под воздействием шума размерность хаотического притягивающего множества (аттрактора) совпадает с размерностью исходного фазового пространства динамической системы. При этом СА утрачивает канторовость структуры и, как следствие, дробную часть размерности. Для систем с шумами оценка фрактальной размерности через спектр ЛХП (формула Каплана—Йорка) теряет смысл. Однако положительные показатели спектра ЛХП системы с шумами остаются важной характеристикой стохастичности, определяя физические свойства генерируемых колебаний (спектры, автокорреляции) и энтропию Колмогорова.

В заключение полагаем возможным поблагодарить А. И. Хибника за предварительные обсуждения результатов и предоставление программ [28], использованных нами наряду с собственными [29–31].

Литература

- [1] Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976, ч. I. 494 с.
- [2] Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
- [3] Асташкина Е. В., Михайлов А. С., Толстопятенко А. В. Изв. вузов. Радиофизика, 1981, т. 24, № 8, с. 1035—1037.
- [4] Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimanski-Geler L. ZAMM, 1986, v. 66, N 3, p. 141—146.
- [5] Mayer-Kress G., Haken H. J. Stat. Phys., 1981, v. 26, N 1, p. 149—171.
- [6] Arneodo A. In: Fluctuations and Sensitivity in Nonequilibrium Systems / Horsthemke W. and Kondepudi D. K. eds Berlin: Springer, 1984, p. 187—194.
- [7] Wiesenfeld K. J. Stat. Phys., 1985, v. 38, N 5/6, p. 1071—1097.
- [8] Crutchfield J. P., Farmer J. D., Huberman B. A. Physics Reports, 1982, v. 92, N 2, p. 45—82.
- [9] Лесин Я. Б. УМН, 1977, т. 32, № 4 (196), с. 55—112.
- [10] Оселедец В. И. Тр. Моск. матем. общ-ва, 1968, т. 19, с. 179—210.
- [11] Shimada I., Nagasima I. Progr. Theor. Phys., 1979, v. 61, N 6, p. 1605—1616.
- [12] Анищенко В. С., Астахов В. В., Летичфорд Т. Е., Сафонова М. А. Изв. вузов. Радиофизика, 1983, т. 26, № 7, с. 832—842.
- [13] Хасьяминский Р. З. Теория вероятностей и ее применения, 1967, т. 12, № 1, с. 167—172.
- [14] Arnold L. In [6], p. 11—18.
- [15] Carverhill A. Stochastic, 1985, v. 14, p. 273—317.
- [16] Шильников Л. П. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980, с. 317—335.

- [17] Гончаренко С. В., Шильникова Л. П. ДАН СССР, 1986, т. 286, № 5, с. 1049—1053.
- [18] Афраймович В. С., Шильников Л. П. В сб.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983, с. 3—26.
- [19] Анищенко В. С., Сафонова М. А. Письма в ЖТФ, 1986, т. 12, в. 12, с. 740—744.
- [20] Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е. РИЭ, 1982, № 10, с. 1972—1978.
- [21] Анищенко В. С., Астахов В. В. РИЭ, 1983, № 6, с. 1109—1115.
- [22] Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А. Изв. вузов. Радиофизика, 1983, т. 26, № 2, с. 169—176.
- [23] Баталова Э. С., Белякова Г. В. Алгоритмы и программы. Информ. бюллетень, 1979, № 5, с. 26.
- [24] Хенон М. В сб.: Странные аттракторы / Под ред. Спная Я. Г., Шильникова Л. П. М.: Мир, 1981, с. 152—163.
- [25] Hitzl D. L., Zele F. Physica D, 1985, v. 14, с. 305—326.
- [26] Russel D. A., Hanson J. D., Ott E. Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, N 16, p. 1175—1181.
- [27] Afraimovich V. S., Shilnikov L. P. In: Nonlinear dynamics and turbulence / Barenblatt G. I. ed. Boston; London; Melbourn: Pitman, 1983, p. 1—34.
- [28] Хибник А. И., Шноль Э. Э. Программы для качественного исследования дифференциальных уравнений. Пуццано: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1982. 16с.
- [29] Анищенко В. С., Сафонова М. А. Алгоритмы и программы. Информ. бюллетень, 1986, № 2 (71), с. 32.
- [30] Анищенко В. С., Сафонова М. А. Комплекс программ для исследования хаотических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рег. № 50860000191 (27.02.86).
- [31] Сафонова М. А. Комплекс программ для вычисления ляпуновских характеристических показателей, рег. № 50860000192 (27.02.86).

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию
20 августа 1986 г.