

УДК 621.384

О КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ УМЕНЬШЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПУЧКОВ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

А. С. Мазманишвили, А. М. Шендерович

Исследованы закономерности движения квантовомеханических волновых пакетов (ВП) частиц в циклических ускорителях. Для произвольной фокусирующей структуры получены выражения для поперечных размеров ВП, определены «равновесные» состояния, соответствующие «классической» равновесной орбите, область их существования и устойчивость. Показано, что в таких состояниях размеры ВП минимальны. Исследованы конкретные фокусирующие структуры: Ф, ФО, ФД, ФОДО. Установлено, что размеры ВП минимальны в структуре Ф и возрастают с ее усложнением, в частности, с увеличением длины прямолинейных промежутков. Показано, что размеры ВП минимальны вблизи центра первой области устойчивости бетатронных колебаний и сильно возрастают вблизи ее границ и при переходе в последующие области устойчивости. Исследована эволюция размера ВП вдоль азимута.

Результаты проведенного анализа определяют минимально возможные размеры пучков в циклических ускорителях, так как они не могут быть меньше размеров ВП. Показано, что размеры ВП определяются масштабным параметром b , который в разных ускорителях может иметь величину 10^{-6} — 10^{-5} см. В зависимости от параметров фокусирующей системы размеры ВП могут быть порядка b или превышать эту величину до двух порядков и более.

1. Введение и постановка задачи

В последние годы большое внимание уделяется получению прецизионных пучков в ускорителях заряженных частиц. Одним из факторов, определяющих размеры пучка в циклических ускорителях, являются, как известно, квантовые флуктуации излучения (см., например, [1-3]). Однако влияние квантовых эффектов на поперечные размеры пучка не ограничивается только этим фактором. Как было показано в работах [4, 5], возможности уменьшения поперечных размеров пучков в линейных ускорителях имеют «естественные» ограничения, связанные с конечными поперечными размерами квантовомеханических волновых пакетов отдельных частиц. Настоящая работа посвящена выяснению аналогичных ограничений в циклических ускорителях. Для этой цели исследована эволюция размеров квантовомеханических волновых пакетов (ВП) отдельных частиц в накопителях со слабой и сильной фокусировкой.

Период структуры фокусировки в циклических ускорителях включает в себя совокупности фокусирующих (Ф), дефокусирующих (Д) участков и пролетных промежутков (О). Рассмотрим движение ВП в каждом из этих участков. Подставляя вектор-потенциал магнитного поля с показателем n и напряженностью H_0 на равновесной орбите радиуса R [2]

$$A_\rho = A_z = 0, \quad A_\theta = H_0 R \left(\frac{x}{R} - \frac{1+n}{2} \frac{x^2}{R^2} + \frac{n}{2} \frac{z^2}{R^2} \right) \quad (1)$$

в уравнение Клейна—Гордона, считая продольный импульс p_θ много большим поперечного и ограничиваясь членами порядка x^2 и z^2 , получим [4], что, как и при классическом рассмотрении, уравнения для продольного θ , вертикального z и радиального x движений разделяются. Поскольку продольное движение — обращение частицы по окружности большого радиуса на участках Ф и Д

и прямолинейное равномерное движение на участках O — является, очевидно, классическим, то в выражениях для волновых функций вертикального и радиального движений текущее время можно считать эквивалентным продольной координате $\theta = vt/R$ (v — продольная скорость частицы). Следовательно, задача сводится к исследованию только поперечного движения частицы в магнитном поле, показатель которого периодически скачкообразно изменяется во времени. Это позволяет решать задачу на участках и затем «сшивать» полученные решения на их границах.

Ограничимся рассмотрением вертикального движения, все полученные результаты останутся справедливыми и для радиального движения при замене n на $1-n$ (предполагается, что энергия частицы равна ее равновесному значению). В рассматриваемом приближении вертикальное движение может быть описано [4, 5] волновой функцией, удовлетворяющей уравнению Шредингера для гармонического осциллятора с периодическим скачкообразным изменением частоты

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{c^2 \hbar^2}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{z^2 \Omega^2 \varepsilon}{2c^2} \Psi, \quad \Omega = \frac{v}{R} \sqrt{n}, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_{\parallel}^2}$, m — масса частицы, $n > 0$ в фокусирующих участках, $n < 0$ в дефокусирующих участках и $n = 0$ в пролетных промежутках.

2. Аксиально-симметричный ускоритель

Рассмотрим сначала слабофокусирующий аксиально-симметричный накопитель. При $\Omega = \text{const}$ решение уравнения (2) имеет вид [6]

$$\Psi(z, t) = \exp\left(-\frac{z^2}{4b^2} - i\frac{\Omega t}{2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} C_l H_l\left(\frac{z}{b\sqrt{2}}\right) e^{-il\Omega t}, \quad b = \left(\frac{c^2 \hbar^2}{4e^2 H_{\parallel 0}^2 n}\right)^{1/4}, \quad (3)$$

где e — заряд частицы, H_l — полиномы Эрмита, C_l — произвольные постоянные. Анализ формулы (3) показывает, что равновесная орбита в «классическом» смысле не существует. Ей соответствует стационарная волновая функция нижнего энергетического уровня ($l=0$). В этом состоянии размер ВП остается неизменным во времени и равным $\langle z^2 \rangle^{1/2} = b$. В других стационарных состояниях размер ВП имеет бóльшую величину. Если же волновая функция «размазана» по нескольким энергетическим уровням осциллятора, то ВП совершает колебания двух типов: либо колебания ВП как целого относительно идеальной равновесной орбиты, аналогичные бетатронным колебаниям «классических» частиц, либо колебания его размеров без изменения положения «центра тяжести» (либо и те и другие колебания совместно). Второй вид колебаний реализуется при выборе четной по z начальной волновой функции. Рассмотрим этот вид колебаний подробнее. При этом ограничимся случаем гауссовых ВП, для которых соотношение неопределенностей минимизируется [6], а следовательно, минимально достижимые значения размеров ВП являются наименьшими.

Из (2) следует (см., например, [7]), что если при $t=0$ ВП является гауссовым, то он таким и останется при $t > 0$, т. е.

$$\Psi(z, t) = f(t) \exp\left\{-\frac{z^2}{4b^2} \chi(t)\right\}, \quad \chi(t) = \frac{1}{\sigma(t)} + i\kappa(t), \quad (4)$$

а среднеквадратичный размер ВП равен, очевидно, $\sqrt{\langle z^2 \rangle} = b\sqrt{\sigma(t)}$. Подставляя (4) в (2), легко получить

$$\chi(t) = \frac{\chi_0 + i \operatorname{tg} \Omega t}{1 + i\chi_0 \operatorname{tg} \Omega t}, \quad f(t) = F \exp\left\{-\frac{i\Omega}{2} \int_0^t \chi(t') dt'\right\}, \quad (5)$$

$$\langle z^2 \rangle = b^2 \sigma(t) = \langle z_0^2 \rangle (A + B \cos 2\Omega t + C \sin 2\Omega t), \quad \langle z_0^2 \rangle = b^2 \sigma_0,$$

$$A = \frac{1 + \sigma_0^2 (1 + \kappa_0^2)}{2\sigma_0^2}, \quad B = \frac{-1 + \sigma_0^2 (1 - \kappa_0^2)}{2\sigma_0^2}, \quad C = -\kappa_0, \quad (6)$$

где $\chi_0 = 1/\sigma_0 + i\kappa_0 = \chi(t=0)$, F — нормировочная постоянная.

Формула (6) справедлива при произвольной форме начального волнового пакета (а не только гауссового), но с другими значениями коэффициентов A, B, C (при $x_0=0$ формула (6) переходит в формулу (5) работы [4], полученную другим методом). Из формулы (6) следует, что поперечный размер ВП в накопителе осциллирует с удвоенной частотой бетатронных колебаний, изменяясь от своего минимального значения $\sqrt{\langle z^2 \rangle_{\min}} = b\sqrt{A - \sqrt{B^2 + C^2}}$ до максимального $\sqrt{\langle z^2 \rangle_{\max}} = b\sqrt{A + \sqrt{B^2 + C^2}}$. Например, при $x_0=0$ $\sqrt{\langle z^2 \rangle}$ изменяется от $b\sqrt{\varepsilon_0}$ до $b\sqrt{\varepsilon_0}$. Таким образом, максимальный размер ВП возрастает как с уменьшением, так и с увеличением ε_0 по отношению к его равновесному значению $\varepsilon_0=1$, соответствующему стационарному движению с минимальным размером пакета, равным b .

3. Общие соотношения для произвольной периодической структуры

Для исследования движения ВП в произвольной фокусирующей структуре необходимо решить уравнение (2) в дефокусирующих участках (Д) и пролетных промежутках (О). Легко видеть, что в обоих этих случаях волновая функция по-прежнему имеет вид (4) с

$$\chi(t) = \frac{\chi_0 - i t \Omega t}{1 + i \chi_0 t \Omega t}, \quad \langle z^2 \rangle = \langle z_0^2 \rangle (B + A \operatorname{ch} 2\Omega t + C \operatorname{sh} 2\Omega t) \quad (7)$$

для элемента Д и

$$\chi(t) = \frac{\chi_0}{1 + i \chi_0 \Omega t}, \quad \langle z^2 \rangle = \langle z_0^2 \rangle \left[(1 - x_0 \Omega t)^2 + \frac{\Omega^2 t^2}{\varepsilon_0^2} \right] \quad (8)$$

для элемента О. Формулы (7), (8) выводятся аналогично (5), (6); следует иметь в виду, что в них величины σ_0 и x_0 на входе отдельных участков являются различными и совпадают со значениями σ и x на выходе соответствующего предыдущего участка; отсчет времени t начинается от начала каждого из участков. Отметим также, что в формулах (6)–(8) величина b (3), вообще говоря, может быть различной в различных участках, если в них различны n или H_0 .

Найдем, как изменится величина χ на одном периоде структуры. Поскольку выражения для χ (5), (7), (8) являются дробно-линейными функциями χ_0 , то в силу их группового свойства получим

$$\chi_1 = (p_1 \chi_0 + i q_1) / (r_1 + i s_1 \chi_0), \quad (9)$$

где χ_0, χ_1 — значения χ в начале и конце периода структуры; p_1, q_1, r_1, s_1 — вещественные коэффициенты, зависящие от числа, расположения и характеристик элементов, образующих один период.

Пользуясь формулами (9), а также (5)–(8), можно исследовать все вопросы, связанные с движением квантовомеханических ВП в циклических ускорителях с произвольной структурой фокусировки. Рассмотрим сначала состояние, в котором волновая функция является периодической с периодом, равным периоду структуры. Будем называть такое состояние «равновесным», поскольку, как это будет видно из дальнейшего, оно соответствует движению по «классической» равновесной орбите. Подставляя в (9) $\chi_1 = \chi_0 = \chi_{\text{ст}}$, найдем

$$\chi_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{\mathcal{S}}{4s_1^2}} + i \frac{r_1 - p_1}{2s_1}, \quad \mathcal{S} = 4q_1 s_1 - (r_1 - p_1)^2. \quad (10)$$

Из (10) следует, что при $\mathcal{S} > 0$ равновесное состояние существует и $\langle z^2 \rangle = 2s_1 b^2 / \sqrt{\mathcal{S}}$. В случае $\mathcal{S} \leq 0$ $\chi_{\text{ст}}$ является чисто мнимой величиной. Следовательно, равновесное состояние не существует.

Рассмотрим теперь поведение ВП частицы, когда начальное значение χ_0 не совпадает с $\chi_{\text{ст}}$. Для одного периода фокусировки величину χ_1 можно определить с помощью (9). Легко убедиться, что через k последовательных периодов вид закона преобразования останется тем же

$$\chi_k = (p_k \chi_0 + i q_k) / (r_k + i s_k \chi_0), \quad (11)$$

при этом коэффициенты преобразования p_k, q_k, r_k, s_k образуют две рекуррентные последовательности

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_1 p_k - q_1 s_k, & s_{k+1} &= r_1 s_k + s_1 p_k, \\ q_{k+1} &= p_1 q_k + q_1 r_k, & r_{k+1} &= -s_1 q_k + r_1 r_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Общее решение системы (12) приведено в Приложении, оно выражается через величины λ_1^k и λ_2^k , где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(p_1 + r_1) + \frac{i}{2}\sqrt{\mathcal{F}}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(p_1 + r_1) - \frac{i}{2}\sqrt{\mathcal{F}}. \quad (13)$$

Воспользовавшись (9) и вычисляя с помощью (12) величины $p_2 = p_1^2 - q_1 s_1$, $q_2 = q_1(p_1 + r_1)$, $r_2 = r_1^2 - q_1 s_1$, $s_2 = s_1(p_1 + r_1)$, найдем для произвольного периода фокусировки

$$\chi_{k+1} = \frac{[(i_2 p_1 - p_2) \lambda_1^k - (i_1 p_1 - p_2) \lambda_2^k] \chi_0 + i[(i_2 q_1 - q_2) \lambda_1^k - (i_1 q_1 - q_2) \lambda_2^k]}{[(i_2 r_1 - r_2) \lambda_1^k - (i_1 r_1 - r_2) \lambda_2^k] + i \chi_0 [(i_2 s_1 - s_2) \lambda_1^k - (i_1 s_1 - s_2) \lambda_2^k]}. \quad (14)$$

В случае $G > 0$ величины λ_1 и λ_2 являются комплексно-сопряженными, следовательно χ_{k+1} , не возрастает безгранично по модулю при увеличении числа периодов k , а осциллирует. В случае $G < 0$ величины λ_1 и λ_2 являются вещественными. Если например, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, то в (14) при $k \rightarrow \infty$ слагаемыми с λ_2^k можно пренебречь, тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{k+1} = \chi_0 \frac{(i_2 r_1 - r_2)^2 + \varepsilon_0^2 (i_2 s_1 - s_2)}{(i_2 p_1 - p_2)(i_2 r_1 - r_2) + (i_2 q_1 - q_2)(i_2 s_1 - s_2)}. \quad (15)$$

Легко убедиться, что знаменатель этого выражения тождественно равен нулю. Следовательно, при $G < 0$ с увеличением числа периодов размер ВП безгранично возрастает. (Можно показать, что при $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ этот результат также справедлив).

Таким образом, неравенство $G > 0$ является условием существования равновесного состояния и одновременно условием его устойчивости. Это условие, очевидно, совпадает с условием устойчивости «классических» бетатронных колебаний, поскольку в него не входит постоянная Планка (прямым расчетом это будет подтверждено ниже на примере структуры ФД).

Покажем теперь, что максимальный размер ВП имеет наименьшее значение в равновесном состоянии. Для этого рассмотрим начальное состояние, мало отличающееся от равновесного, $\chi_0 = \chi_{cr} + \Delta\chi_0$. Тогда через период структуры $\chi_1 = \chi_{cr} + \Delta\chi_1$, причем в линейном приближении, из (9), (10) легко получить

$$\Delta\chi_1 = \frac{p_1 + r_1 - i\sqrt{\mathcal{F}}}{p_1 + r_1 + i\sqrt{\mathcal{F}}} \Delta\chi_0, \quad |\Delta\chi_1| = |\Delta\chi_0|. \quad (16)$$

Отсюда следует, что и для любого числа периодов k $|\Delta\chi_k| = |\Delta\chi_0|$; поэтому при движении ВП точка на фазовой плоскости, соответствующая комплексной величине $\Delta\chi$, перемещается по окружности. Поскольку, согласно (4), $\Delta\chi = -\Delta\sigma/\sigma_{cr}^2 + i\Delta\kappa$, то это означает, что размер ВП при его движении изменяется в пределах от $b(\sigma_{cr} + \sqrt{\Delta\sigma_0^2 + \varepsilon_{cr}^4 \Delta\kappa_0^2})^{1/2}$ до $b(\sigma_{cr} - \sqrt{\Delta\sigma_0^2 + \varepsilon_{cr}^4 \Delta\kappa_0^2})^{1/2}$. Следовательно, максимальный размер ВП всегда больше его равновесного размера $b\sqrt{\varepsilon_{cr}^2}$ независимо от знака начального отклонения $\Delta\sigma_0$ и начальной фазы κ_0 .

Таким образом, в равновесном состоянии волновая функция имеет период, равный периоду структуры, а размер ВП в нем минимален. Поэтому его действительно можно считать соответствующим движению «классической» частицы по равновесной орбите и аналогичным состоянию с $\varepsilon_{cr}^2 = b^2$ в аксиально-симметричном накопителе.

4. Сильная фокусировка. Структура ФД

Рассмотрим сначала простейшую сильнофокусирующую структуру типа ФД с одинаковой длиной, одинаковой по модулю и противоположной по знаку величиной показателя спада n магнитного поля в Ф и Д участках. Пользуясь последовательно (5) и (7), получим для одного периода структуры

$$p_1 = 1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{th} \varphi, \quad q_1 = \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{th} \varphi, \quad r_1 = 1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{th} \varphi, \quad s_1 = \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{th} \varphi. \quad (17)$$

где $\varphi = \Omega\tau = \pi\sqrt{n}/N$; 2τ — время пролета одного периода; N — число периодов структуры на оборот. Пользуясь (17) и (10), получим, что условие существования и устойчивости равновесного состояния в данном случае имеет вид

$$\cos^2 \mu = \cos^2 \varphi \operatorname{ch}^2 \varphi < 1,$$

что совпадает с условием устойчивости движения около «классической» равновесной орбиты.

Рассмотрим теперь изменение размера ВП вдоль орбиты в равновесном состоянии. Подставляя (17) в (10), найдем для начала каждого ФД периода

$$\chi_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{ch}^2 \varphi}{(\sin \varphi \operatorname{ch} \varphi + \cos \varphi \operatorname{sh} \varphi)^2}} - i \frac{\sin \varphi \operatorname{sh} \varphi}{\sin \varphi \operatorname{ch} \varphi + \cos \varphi \operatorname{sh} \varphi}. \quad (18)$$

Результаты расчета $\sqrt{\langle z_{\text{cr}}^2 \rangle} / b$ по формуле (18) в зависимости от φ в пределах первой области устойчивости приведены на рис. 1. В центре этой области размер ВП минимален и равен $\sim 1.6 b$, а при приближении к ее границам возрастает. Например, при $\varphi = 0.1$ он составляет $\sim 5.9 b$. В последующих областях устойчивости минимальный размер ВП возрастает. Например, в центре второй области он равен $\sim 7.5 b$, а в третьей $\sim 35.9 b$.

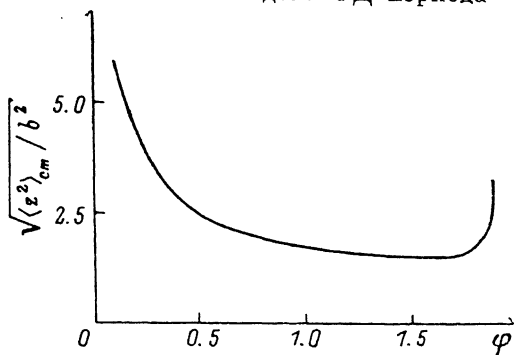


Рис. 1. Зависимость размера ВП в равновесном состоянии на границах периода ФД структуры от $\varphi = \pi\sqrt{n}/N$.

Приведенные на рис. 1 значения относятся только к границам периода структуры. Анализ с помощью формул (6), (7) и (18) показывает, что при перемещении по азимуту размер ВП в равновесном состоянии осциллирует по тому же закону, что и огибающая классических бетатронных колебаний [2]. С ростом φ глубина модуляции увеличивается; например, при $\varphi = 1.85$ максимальный размер ВП в 2.5 раза превышает $\sqrt{\langle z_{\text{cr}}^2 \rangle}$.

5. Слабая фокусировка. «Рейстрек»

В случае слабофокусирующего накопителя с прямолинейными промежутками (структура Ф0), пользуясь (5), (8) и (10), получим

$$p_1 = 1, \quad q_1 = \operatorname{tg} \varphi, \quad r_1 = 1 - \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi, \quad s_1 = \varphi_0 + \operatorname{tg} \varphi, \\ \chi_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{4\varphi_0 \operatorname{tg} \varphi + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi - \varphi_0^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{4(\varphi_0 + \operatorname{tg} \varphi)^2}} - i \frac{\varphi_0 \operatorname{tg} \varphi}{2(\varphi_0 + \operatorname{tg} \varphi)}, \quad (19)$$

где $\varphi = \Omega\tau$; $\varphi_0 = \Omega\tau_0$; τ , τ_0 — соответственно время пролета фокусирующего участка и прямолинейного промежутка. С помощью (19), (6) и (8) могут быть произведены расчеты размеров ВП в структуре Ф0 с любыми параметрами. Расчеты, в частности, показывают, что размер ВП существенно возрастает с увеличением относительной длины прямолинейных промежутков. Например, при $n = 0.6$ максимальный размер ВП в равновесном состоянии возрастает от b при $\varphi_0/\varphi = 0$ до $2.2 b$ при $\varphi_0/\varphi = 2$.

6. Сильная фокусировка. Структура Ф0Д0

Рассмотрим структуру Ф0Д0 с одинаковой длиной прямолинейных промежутков, с одинаковой длиной Ф и Д участков, одинаковой по модулю и противоположной по знаку величиной показателя спада n магнитного поля в Ф и Д участках. Пользуясь (5), (7) и (8), получим

$$p_1 = 1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{th} \varphi + \varphi_0 \operatorname{th} \varphi, \quad r_1 = (1 + \varphi_0 \operatorname{th} \varphi)(1 - \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi) - \operatorname{tg} \varphi(\varphi_0 + \operatorname{th} \varphi),$$

$$q_1 = \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{th} \varphi + \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{th} \varphi, \quad s_1 = (1 + \varphi_0 \operatorname{th} \varphi)(\varphi_0 + \operatorname{tg} \varphi) + \varphi_0 + \operatorname{th} \varphi, \quad (20)$$

где обозначения φ и φ_0 такие же, как и в предыдущем разделе (φ имеет одну и ту же величину в Φ и D участках). С помощью (10) и (20) были получены выражения для $\langle z_{cr}^2 \rangle$ и $\langle z_{cr}^2 \rangle$, однако из-за их громоздкости они не приводятся.

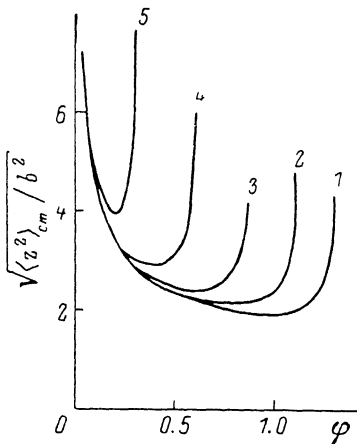


Рис. 2. Зависимость размера ВП в равновесном состоянии на границах периода ФОДО структуры от φ .

φ_0/φ : 1 — 0.6, 2 — 1.0, 3 — 2.0, 4 — 5.0, 5 — 20.0.

Результаты расчетов размеров ВП в равновесном состоянии на границах структуры (в начале Φ участков) в первой области устойчивости приведены на рис. 2. Из этого рисунка видно, что ход кривых имеет тот же характер, что и для ФД структуры: размер ВП минимален в центре области устойчивости и сильно возрастает при приближении к ее краям. Были проведены также расчеты эволюции размера ВП в равновесном состоянии вдоль азимута. Наибольшая модуляция размера ВП вдоль азимута имеет место при приближении к правой границе области устойчивости; например, при $\varphi = \varphi_0 = 1.1$ размер ВП вдоль азимута изменяется в 10 раз.

С увеличением относительной длины прямолинейных промежутков φ_0/φ размер ВП в равновесном состоянии возрастает (см., например, рис. 2). В связи с этим представляет интерес рассмотреть движение ВП в накопителях с разделенными функциями фокусировки и поворота пучков, в которых фокусировка осуществляется тонкими квадрупольными линзами. В случае тонких линз ($\varphi \ll 1$), пренебрегая фокусировкой в поворотных магнитах, с помощью (20) и (10) найдем при $\varphi_0 \geq 1$

$$p_1 = 1 + \varphi_0 \varphi, \quad r_1 = 1 - \varphi_0 \varphi - \varphi_0^2 \varphi^2, \quad q_1 = \varphi \varphi_0^2, \quad s_1 = 2\varphi_0 + 2\varphi + \varphi_0 \varphi^2 + \varphi_0^2 \varphi - \frac{1}{3} \varphi_0^3 \varphi^3, \quad (21)$$

$$\sqrt{\langle z_{cr}^2 \rangle} / b^2 = \sqrt{2(2 + \varphi_0 \varphi) / \varphi \sqrt{4 - \varphi_0^2 \varphi^2}}. \quad (22)$$

Следует иметь в виду, что здесь величина b описывается не формулой (3), а соответствующим выражением для квадрупольной линзы [4], численное значение ее при этом оказывается того же порядка. Из (22) видно, что характер зависимости размера ВП от «толщины» линзы φ является различным при $\varphi_0 \varphi \ll 2$ и при $\varphi_0 \varphi$, близком к 2. В первом случае размер ВП равен $b \sqrt{2/\varphi}$. Во втором случае размер ВП сильно возрастает. Например, при $\varphi = 0.01$, $\varphi_0^2 \varphi^2 = 3.9$ имеем $\sqrt{\langle z_{cr}^2 \rangle} \approx 50 b$. (При $\varphi_0 \varphi \geq 2$ устойчивость движения отсутствует).

Заключение

В результате проведенного исследования выяснены основные закономерности движения квантовомеханических волновых пакетов заряженных частиц в циклических ускорителях. Ряд существенных закономерностей был выяснен в общем виде при анализе произвольной фокусирующей структуры без ее конкретизации.

1. Равновесная орбита в «классическом» смысле не существует. Ей соответствует волновая функция равновесного состояния, которая является периодической с периодом, равным периоду структуры.

2. Выяснена область существования и устойчивости движения ВП в таких состояниях, совпадающая с областью устойчивости «классических» бетатронных колебаний.

3. Получены общие выражения для поперечных размеров ВП.

4. Показано, что поперечные размеры ВП минимальны в равновесных состояниях. В других состояниях размеры ВП возрастают из-за совершаемых им колебаний. При этом возможны колебания двух типов: либо колебания ВП как целого относительно «классической» равновесной орбиты, аналогичные бетатронным колебаниям «классических» частиц, либо колебания его размеров без изменения положения центра «тяжести», являющиеся чисто квантовомеханическими.

5. Определены пределы изменения поперечных размеров ВП вдоль азимута при малой амплитуде колебаний в неравновесных состояниях в зависимости от начальных условий.

6. Показано, что минимальные размеры ВП определяются масштабным параметром $b = (c^2 \hbar^2 / e^2 H_0^2 n)^{1/4}$, который в зависимости от напряженности H_0 и показателя преломления n ведущего магнитного поля может принимать в различных ускорителях значения от $\sim 10^{-6}$ до $\sim 10^{-5}$ см.

На основе полученных общих результатов изучены равновесные состояния в конкретных фокусирующих структурах Ф, ФО, ФД, ФОДО.

1. Выяснено, что размер ВП является наименьшим в аксиально-симметричной системе Ф и возрастает с усложнением системы, в частности с увеличением относительной длины прямолинейных промежутков φ_0/φ . Наиболее невыгодной с точки зрения получения малых размеров ВП является система с разделенными функциями поворота и фокусировки частиц. Так, если в системе Ф минимальный размер ВП равен b , то в структуре ФОДО с тонкими линзами он может превышать эту величину до двух порядков и более.

2. Выяснено, что размер ВП минимален вблизи центра области устойчивости бетатронных колебаний и быстро возрастает при приближении к ее границам. Например, в структуре ФОДО при $\varphi_0/\varphi = 0.6$ размер ВП изменяется от $2b$ до $7b$ при изменении фазовой протяженности фокусирующих (и дефокусирующих) участков φ от 1.0 до 0.05.

3. Размер ВП минимален в первой и сильно возрастает в последующих областях устойчивости; так, в структуре ФД он увеличивается от $1.6b$ в центре первой до $\sim 36b$ в центре третьей области устойчивости.

4. Изменение размера ВП вдоль азимута в равновесном состоянии происходит по тому же закону, которым описывается огибающая «классических» бетатронных колебаний.

Результаты проведенного анализа определяют минимально возможные поперечные размеры пучков в циклических ускорителях, поскольку размер пучка не может быть меньше размера квантовомеханического волнового пакета отдельной частицы. Оценки показали, что в зависимости от параметров фокусирующей структуры минимальные размеры рассматриваемых гауссовых ВП могут быть порядка b , т. е. $\sim 10^{-6} \div 10^{-5}$ см, или превышать эту величину до двух порядков и более. В случае негауссовых или немонахроматических ВП их размеры дополнительно существенно возрастают [4]. (Следует также иметь в виду, что размеры ВП существенно возрастают в неравновесных состояниях). В результате размеры ВП могут вносить заметный вклад в размеры пучков, особенно в области их взаимодействия, так как в современных проектах установок со встречными пучками для достижения высокой светимости размеры пучков в этой области стремятся существенно уменьшить до величин порядка микрон (например, в проекте коллайдера в ЦЕРНе они составляют 12 мкм [8], в проекте сверхпроводящего суперколлайдера менее 10 мкм [9], в проекте ВЛЭПП ~ 1 мкм [10]). Следует также заметить, что размеры ВП могут оказаться сравнимыми или даже превышать размеры пучка, обусловленные другими известными эффектами — например, вертикальный размер пучка из-за рассеяния на остаточном газе, который может иметь величину $\sim 10^{-4}$ см и менее (см., например, [11]).

Приложение

Рассмотрим одну из систем выражения (12)

$$P_{k+1} = P_1 P_k - q_1 s_k, \quad s_{k+1} = r_1 s_k + s_1 P_k. \quad (\text{II. 1})$$

Введем вектор $y_k = (p_k, s_k)$, тогда систему (П. 1) можно записать в векторно-матричных обозначениях

$$y_{k+1} = Ay_k = \dots = A^k y_1, \quad (\text{П. 2})$$

где A — (2×2) -матрица; $A_{11} = p_1$; $A_{12} = -q_1$; $A_{21} = r_1$; $A_{22} = s_1$. Поскольку матрица A неособенная, ее можно привести к диагональному виду с помощью унитарной матрицы U

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{П. 3})$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(p_1 + r_1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 - r_1)^2 - 4q_1s_1}.$$

Тогда

$$y_{k+1} = \left[U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^{-1} \right]^k y_1 \quad (\text{П. 4})$$

или

$$p_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k, \quad s_k = c_3 \lambda_1^k + c_4 \lambda_2^k, \quad (\text{П. 5})$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — постоянные, определяемые из начальных условий. Решение второй системы (12) находится аналогично.

Литература

- [1] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 352 с.
- [2] Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970. 311 с.
- [3] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М.: Наука, Физматгиз, 1983, 304 с.
- [4] Шендерович А. М. ПТЭ, № 3, 1983, с. 22—25.
- [5] Шендерович А. М. ЖТФ, 1983, т. 53, № 6, с. 1078—1081.
- [6] Шифф Л. Квантовая механика. М.: ИЛ, 1959. 473 с.
- [7] Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С. Препринт ХФТИ, № 83-1. Харьков, 1983. 32 с.
- [8] Brianti G. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1985, v. 32, N 5, p. 3436—3441.
- [9] Jacson J. D., Tinger M., Wojcicki S. Scientific American, 1986, v. 254, N 3, p. 56—68.
- [10] Балакин В. Е., Будкер Г. И., Скринский А. Н. Тр. VI Всес. совещ. по ускорителям заряженных частиц. Дубна, ОИЯИ, 1979, т. 1, с. 27—34.
- [11] Комар А. А., Лейкин Е. М., Метальников Ю. Н., Мороз Е. М., Петухов В. А. Тр. ФИАН, 1964, т. 22, с. 222—295.

Харьковский
физико-технический институт
АН УССР

Поступило в Редакцию
26 августа 1985 г.
В окончательной редакции
26 июня 1987 г.