

УДК 538.566

## ЯВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ РЕДКОЙ РЕШЕТКИ, ОБРАЗОВАННОЙ НАКЛОННЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ЛЕНТАМИ

С. Н. Воробьев, С. Л. Просвирина

Для редких решеток, образованных тонкими металлическими лентами, определены значения частот, на которых происходит полное отражение плоской нормально падающей электромагнитной волны. Исследована зависимость режимов полного отражения от геометрических параметров структуры и угла падения волны. Приведено сравнение режимов отражения для бесконечной периодической и ограниченной эквидистантной решеток.

Физические особенности полей, рассеянных периодическими, а в особенности ограниченными по числу элементов эквидистантными решетками, представляют значительный интерес вследствие широкого применения таких структур в радиофизических приборах различного назначения. Несмотря на обстоятельное изучение периодических решеток [1], некоторые режимы рассеяния волн на структурах, образованных тонкими наклонными металлическими лентами, до сих пор не выяснены.

Известно, что при определенных условиях плоская волна может полностью отражаться от полупрозрачных решеток различных типов. Как правило, это явление носит ярко выраженный резонансный характер и обусловлено интерференционным взаимодействием полей в области решетки. При условии, что между соседними лентами имеется волноводная область, резонансы полного отражения отмечались в [2]. Существование этих резонансов (как, впрочем, и сам метод решения задачи) непосредственно зависит от присутствия волноводной области и наличия волноводных волн в ней. Оказывается, что режимы полного отражения существуют и в решетке с редко расположенными лентами.

### Рассеяние волн на периодической решетке

Рассмотрим дифракцию плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны

$$H_{x_i} = e^{i h_0 y - i \gamma_0 z},$$

падающей на решетку под углом  $\alpha$  из полупространства  $z > 0$  (рис. 1, а); здесь

$$h_0 = k \sin \alpha, \quad \gamma_0 = k \cos \alpha, \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Зависимость от времени предполагается в виде  $e^{-i\omega t}$ . Поле во всем пространстве представим как суперпозицию поля падающей волны и рассеянного поля  $H = H_i + H_s$ . Будем искать  $H_s$  в виде суперпозиции потенциалов двойного слоя

$$H_s(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{L_n} \mu(y_1, z_1) \frac{\partial}{\partial n_1} g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) dl_1, \quad (1)$$

с некоторой неизвестной плотностью  $\mu$ , распределенной по всем лентам решетки, где

$$g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k \sqrt{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2})$$

— функция Грина свободного пространства. Интегрирование проводится по отрезкам  $L_n$  прямых, параллельных оси  $Oy'$ , соответствующим сечениям лент с номерами  $n$ . Индексом «1» отмечены координаты точки интегрирования;  $n_1$  — нормаль к поверхности ленты в точке интегрирования, совпадающая по направлению с осью  $Oz'$ . Рассеянное поле  $H_s$  в виде (1) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию излучения.

Поскольку падающая волна плоская и структура периодическая, плотность потенциала двойного слоя удовлетворяет условию

$$\mu(y_1 + nl, z_1) = \mu(y_1, z_1) \exp(ih_0 nl).$$

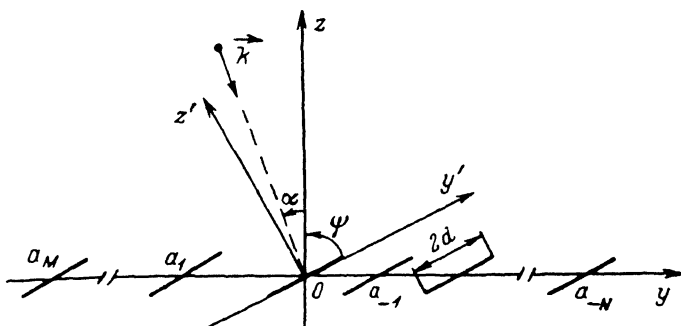
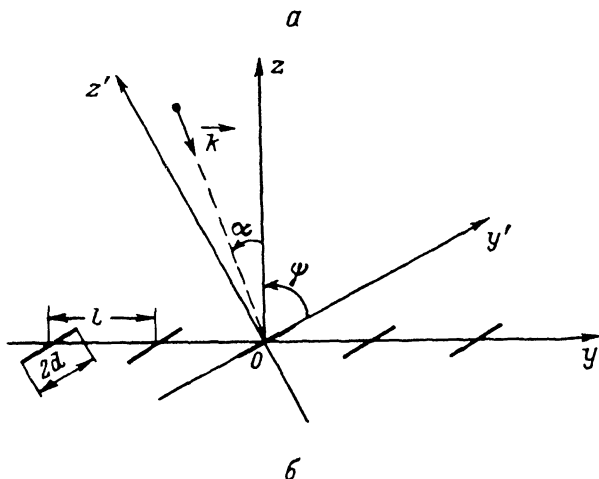


Рис. 1. Периодическая решетка из наклонных лент (а) и решетка из конечного числа лент с произвольным расстоянием между ними (б).

Заменяя в (1) интегрирование по  $L_n$  интегрированием по  $L_0$  и применяя формулу суммирования Пуассона, получим

$$H_s(y, z) = \frac{i}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \int_{L_0} \mu(y_1, z_1) \frac{\partial}{\partial n_1} e^{i\gamma_n |z-z_1| + i h_n (y-y_1)} dl_1, \quad (2)$$

где

$$h_n = h_0 + \frac{2\pi n}{l}, \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - h_n^2},$$

выбрана ветвь корня, обеспечивающая выполнение условия излучения. Очевидно, что распределение  $\mu(y_1, z_1)$  на поверхности ленты с номером  $n=0$  в системе координат  $x'y'z'$  зависит только от  $y'_1$ . Заменяем  $\mu(y'_1)$  функцией, представленной интегралом Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) e^{i\xi y'_1} d\xi = \begin{cases} \mu(y'_1), & |y'_1| < d, \\ 0, & |y'_1| > d, \end{cases} \quad (3)$$

и после ряда преобразований из (2) получим

$$H_s(y, z) = -\frac{i}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i h_n (y-z) \operatorname{tg} \psi} \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \frac{\xi \sin \psi - h_n}{(\xi - \xi_n^+) (\xi - \xi_n^-)} e^{\frac{i \xi z}{\cos \psi}} d\xi, \quad (4)$$

где

$$\xi_n^{\pm} = h_n \sin \psi \pm \gamma_n \cos \psi.$$

Полюса в подынтегральной функции, лежащие на вещественной оси, в точках  $\xi_n^{\pm}$  контур интегрирования обходят снизу, а в точках  $\xi_n^{-}$  сверху. Вне решетки (при  $|z| > d \cos \psi$ ) интеграл в (4) берется с помощью теории вычетов.

Таким образом, поле над решеткой

$$H(y, z) = e^{i h_0 y - i \gamma_0 z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i h_n y + i \gamma_n z}, \quad z > d \cos \psi$$

представляет собой суперпозицию пространственных гармоник с дискретным спектром и амплитудами

$$a_n = \frac{\pi}{l} a(\xi_n^+) \frac{1}{\gamma_n} (\gamma_n \sin \psi - h_n \cos \psi). \quad (5)$$

Аналогично записывается поле под решеткой ( $z < -d \cos \psi$ )

$$H(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i h_n y - i \gamma_n z},$$

где

$$b_n = \delta_{0n} - \frac{\pi}{l} a(\xi_n^-) \frac{1}{\gamma_n} (\gamma_n \sin \psi + h_n \cos \psi),$$

$\delta_{mn}$  — символ Кронекера.

Далее следует получить уравнение относительно неизвестной функции  $a(\xi)$ , для чего необходимо воспользоваться граничными условиями. Заменяем в выражении для  $H_s$  функцию Ханкеля ее интегральным представлением. Тогда из условия равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности лент следует интегральное уравнение типа свертки относительно  $\mu(y')$  (тока на ленте). Используя (3), нетрудно получить эквивалентные ему парные интегральные уравнения относительно функции  $a(\xi)$ . Введем для удобства безразмерные переменные  $u = y'/d$ ,  $\zeta = \xi d$  и функцию  $b(\zeta) = a(\zeta/d)/d$ . Тогда парные интегральные уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} b e^{i \zeta u} d\zeta &= 0, \quad |u| > 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} b \gamma e^{i \zeta u} d\zeta &= 2\eta \sin(\alpha + \psi) e^{-i \eta u \cos(\alpha + \psi)} - \\ &- \sum_{(n \neq 0)} \int_{-\infty}^{\infty} b \gamma e^{i \theta(\gamma |n| \cos \psi - \zeta n \sin \psi) + i \zeta u} d\zeta, \quad |u| < 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\eta = kd$ ,  $\theta = l/d$ ,  $\gamma = \sqrt{\eta^2 - \zeta^2}$ ; выбрана ветвь корня, у которой  $\operatorname{Im} \gamma > 0$  на верхнем листе римановой поверхности комплексной переменной  $\zeta$  с разрезами, проведенными по линиям  $\operatorname{Im} \gamma = 0$ . Решение (6) следует искать в классе функций  $L_{1+|\zeta|}^2$ , для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |b(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|) d\zeta < \infty.$$

Для строгого решения (6) используем процедуру обращения в аналитическом виде статической части оператора задачи дифракции на одной ленте (левая часть системы (6)) с помощью спектрального метода [3]. Представим  $b(\zeta)$  в виде разложения по системе базисных функций  $\varphi_n(\zeta)$

$$b(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(\zeta), \quad (7)$$

где  $\varphi_n = \sqrt{n} \zeta^{-1} J_n(\zeta)$ ;  $J_n(\zeta)$  — функция Бесселя. Система функций  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  ортонормирована с весом  $|\zeta|$  на всей числовой оси. Используя метод Галеркина, получим систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов  $c_n$

$$c_m = f_m + \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_{mn}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где

$$f_m = 2i\eta \sin(\alpha + \psi) (-1)^m \varphi_m(\eta \cos(\alpha + \psi)).$$

Матричные элементы системы имеют вид

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} \varphi_m(\zeta) \varphi_n(\zeta) \varepsilon(\zeta) \zeta d\zeta, \quad (9)$$

где функция

$$\varepsilon(\zeta) = \varepsilon(\zeta) + (-1)^{m+n} \varepsilon(-\zeta)$$

для интересующего нас случая  $0 \leq \psi < \pi/2$  имеет вид

$$\varepsilon(\zeta) = 1 + \frac{\gamma(\zeta)}{|\zeta|} \frac{\sin(\gamma\theta \cos \psi)}{\cos(\gamma\theta \cos \psi) - \cos(\gamma\theta \sin \alpha - \zeta\theta \sin \psi)},$$

а способ вычисления  $A_{mn}$  можно найти в [4]. Укажем только, что при возрастании  $\zeta$  функция  $\varepsilon(\zeta)$  убывает как  $\zeta^{-2}$ ; следовательно, подынтегральное выражение имеет порядок  $O(\zeta^{-4})$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Поэтому вычисление  $A_{mn}$  на ЭВМ не представляет трудностей. Матричный оператор (8) вполне непрерывен в пространстве  $l_2$ . Свойства полученного решения позволяют создать эффективный алгоритм для расчета характеристик рассеянного поля [3, 4].

### Рассеяние волн на ограниченной неэквидистантной решетке

Схема построения решения задачи дифракции волн на решетке из конечного числа лент с произвольным расстоянием между ними подобна рассмотренной для периодической решетки, однако здесь уже не имеет место квазипериодичность плотности потенциала двойного слоя. Плотность  $\mu$  зависит от координаты  $n$ -й ленты  $y_n$ , поэтому выражение для рассеянного поля решетки из  $M + N + 1$  лент (рис. 1, б) записывается следующим образом:

$$H_s(y, z) = \sum_{n=-N}^M \int_{L_n} \mu_n(y_1, z_1) \frac{\partial}{\partial n_1} g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) dl_1. \quad (10)$$

Распределение  $\mu_n$  на поверхности  $n$ -й ленты представим в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_n(\xi) e^{i\xi y'_1} d\xi = \begin{cases} \mu_n(y'_1), & |y'_1| < d, \\ 0, & |y'_1| > d, \end{cases} \quad (11)$$

для всех лент решетки  $N \leq n \leq M$ . Тогда выражение (10) для  $H_s$  приобретает вид спектрального разложения по плоским волнам (интеграла Фурье).

Граничные условия в плоскостях, совпадающих с плоскостями лент, позволяют получить систему из  $M + N$  парных интегральных уравнений отно-

сительно неизвестных функций  $u_n^\pm$  — линейных комбинаций функций  $b_n(\xi)$  с соответствующими фазовыми множителями. Преобразуем указанную систему так, чтобы в левой части каждой  $n$ -й подсистемы выделить интегральный оператор, представляющий собой статическую часть  $I_{st}$  оператора рассеяния на одной ленте, которую следует обработать аналитически

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^\pm e^{i u \zeta} d\zeta = 0, \quad |u| > 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^\pm |\zeta| e^{i u \zeta} d\zeta = -i \int_{-\infty}^{\infty} Q_n^\mp \gamma e^{i u \zeta} d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty} u_n^\pm |\zeta| \varepsilon_n^\pm e^{i u \zeta} d\zeta \pm i \int_{-\infty}^{\infty} u_n^\mp E_n^- \gamma e^{i u \zeta} d\zeta +$$

$$+ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=0}^{N+n-2} (u_{n-l-1}^+ + u_{n-l-1}^-) \Phi_{nl}^- \pm \sum_{l=0}^{M-n-1} (u_{n+l+1}^+ - u_{n+l+1}^-) \Phi_{nl}^+ \right] \gamma e^{i u \zeta} d\zeta, \quad |u| < 1, \quad (12)$$

где

$$1 - N \leq n \leq M, \quad \tau_n = i\eta (a_{n-1} - a_n), \quad a_n = y_n/d, \quad CS^\pm = \gamma \cos \psi \pm \zeta \sin \psi,$$

$$\gamma = \sqrt{\eta^2 - \zeta^2},$$

выбрана ветвь корня, обеспечивающая выполнение условия излучения,  $\eta = kd$  — относительная ширина ленты в длинах волн падающего поля

$$E_n^\pm = \begin{cases} \cos \\ i \sin \end{cases} (-i\tau_n \zeta \sin \psi) e^{\tau_n \gamma \cos \psi}, \quad \varepsilon_n^\pm = 1 + i \frac{\gamma}{|\zeta|} (1 \mp E_n^\pm),$$

$$\Phi_{nl}^+ = e^{i\eta(a_n - a_{n+l+1})CS^+} (1 \mp e^{\tau_n CS^+}),$$

$$\Phi_{nl}^- = e^{i\eta(a_n - l - a_{n-1})CS^-} (1 \mp e^{\tau_n CS^-}),$$

а выражение для  $Q_n^\pm$ , связанное с видом падающего поля, и подробный вывод формул для  $u_n^\pm$  приведены в [5]. Система (12), несмотря на сложность, по структуре  $n$ -го блока соответствует (6), поэтому процедура обращения  $I_{st}$  с помощью (7) приводит в результате к системе линейных алгебраических уравнений второго рода с блочно-симметрической матрицей

$$g_m^{\pm(n)} = b_m^{\mp(n)} + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ g_p^{\pm(n)} A_{mp}^{\pm(n)} + g_p^{\mp(n)} S_{mp}^{\pm(n)} \pm \sum_{l=0}^{M-n-1} G_p^{-(n+l+1)} V_{mp}^{\mp(nl)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{N+n-2} G_p^{+(n-l-1)} W_{mp}^{\mp(nl)} \right\}, \quad (13)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots, 1 - N \leq n \leq M$ ,

$$G_p^{\pm(nl)} = g_p^{+(nl)} \pm g_p^{-(nl)},$$

$$A_{mp}^{\pm(n)} = \delta_{mp}^+ \int_0^{\infty} \varphi_m \varphi_p \varepsilon_n^\pm d\zeta,$$

$$S_{mp}^{\pm(n)} = \pm i \delta_{mp}^- \int_0^{\infty} \varphi_m \varphi_p E_n^- \gamma d\zeta, \quad \delta_{mp}^\pm = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{m+p}].$$

В случае дифракции плоской волны  $b_m^{\pm(n)}$  имеет вид

$$b_m^{\pm(n)} = \frac{i\eta}{2} (-1)^m \varphi_m (\cos(\alpha + \psi)) e^{i k a_n \sin \alpha} (e^{\tau_n \sin \alpha} \pm 1) \sin(\alpha + \psi),$$

а громоздкие выражения для матричных элементов  $V_{mp}^{\pm(nl)}$  и  $W_{mp}^{\pm(nl)}$  можно найти в [5]. Свойства матричного оператора системы (13) [5] позволяют для ее решения применить метод редукции (так же как и к (8)), а значит, получить в принципе любую наперед заданную точность расчета характеристик рассеянного поля.

С помощью метода перевала нетрудно получить выражение для рассеянного ограниченной решеткой поля в дальней зоне

$$H_s \sim \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} B(\cos \varphi) \sin \varphi e^{i(kr - \pi/4)}, \quad (14)$$

где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты точки наблюдения, угол  $\varphi$  отсчитывается от плоскости решетки (оси  $Oy$ ), а  $B(\xi)$  имеет вид

$$B(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(\xi) \sum_{l=0}^{M+N-1} \begin{cases} G_p^{+(M-l)} e^{ik(a_{M-l-1} - a_M) \cos^+(\xi)} - G_p^{-(M-l)}, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} + \psi, \\ G_p^{-(1-N+l)} e^{ik(a_{1-N} - a_{1-N+l}) \cos^+(\xi)} - G_p^{+(1-N)}, & \psi - \frac{\pi}{2} < \varphi < 0. \end{cases}$$

Отметим, что свойства функции  $\varphi_p(\xi)$  [3, 5] обеспечивают очень быструю сходимость ряда (7). Вследствие этого порядок редукции системы (8) и  $n$ -го блока системы (13) даже при весьма высокой точности вычислений характеристик рассеянных полей на ЭВМ ( $\sim 0.1\%$ ) редко превышает величину  $\sim \text{entier}(2\eta)$ .

### Приближенные формулы для периодической решетки из узких лент

Пусть периодическая решетка из наклонных лент (рис. 1, а) не имеет волноводных областей между соседними лентами, т. е.  $2d/l \ll \sin \phi$ . Коэффициент отражения основной волны  $|a_0|$  и его фаза  $\arg(a_0)$  (в градусах) в зависимости от частотного параметра  $\kappa = l/\lambda$  представлены на рис. 2 для структуры с параметрами  $\phi = 45^\circ$ ,  $d/l = \bar{d} = 0.25$  при нормальном падении волны на решетку. На частотах  $\kappa_1 = 0.8949$  и  $\kappa_2 = 0.99665$  имеет место полное отражение, т. е.  $|a_0| = 1$ , а  $|b_0| = 0$  ( $|b_0|$  — коэффициент прохождения основной волны).

Получим приближенные формулы для амплитуд дифракционных гармоник (5) поля, отраженного периодической решеткой из узких по сравнению с длиной волны лент. Для этого преобразуем выражение (9) для матричных элементов системы (8).

Используя теорему о свертке, представим произведение  $\varphi_m(\zeta) \varphi_n(\zeta)$  в виде

$$\varphi_m(\zeta) \varphi_n(\zeta) = \frac{1}{8(\pi\eta)^2} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{mn}(\tau) e^{-i\zeta\tau} d\tau, \quad (15)$$

где

$$Q_{mn}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t) f_n(\tau - t) dt.$$

Отметим, что функция  $\varphi_m(\xi)$  является преобразованием Фурье финитной функции  $f_m(t)$

$$f_m(t) = 4\eta m^{-1/2} \begin{cases} T_m(\sqrt{1-\sigma^2}), & m = 2n - 1, \\ i\sigma U_{m-1}(\sqrt{1-\sigma^2}), & m = 2n, \end{cases} \quad |\sigma| < 1, \\ f_m(t) = 0, \quad |\sigma| > 1,$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\sigma = t/\eta$ , а  $T_m(\sigma)$  и  $U_m(\sigma)$  — полиномы Чебышева I и II рода соответственно.

Подставим (15) в формулу (9) и поменяем порядок интегрирования по  $\zeta$  и  $\tau$ . Интеграл по  $\zeta$  вычислим с помощью теоремы о вычетах и в итоге получим

$$A_{mn} = \frac{i}{8\pi^2 \kappa} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau_p} [\tilde{\gamma}^2(\xi_p^-) S_{mn}(-\xi_p^-) + (-1)^{m+n} \tilde{\gamma}^2(\xi_p^+) S_{mn}(\xi_p^+)], \quad (16)$$

где

$$S_{mn}(\xi) = \int_0^{\infty} Q_{mn}(\tau) e^{i\xi\tau} d\tau. \quad (17)$$

причем  $S_{mn}(\xi) = S_{mn}(\xi)$ , а безразмерные величины  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\gamma}_p$  и  $\xi_p^{\pm}$  имеют вид

$$\tilde{\gamma}(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \tilde{\gamma}_p = \sqrt{1 - (m/\kappa + \sin \alpha)^2},$$

$$\xi_p^{\pm} = \left( \frac{m}{\kappa} + \sin \alpha \right) \sin \psi \pm \tilde{\gamma}_p \cos \psi.$$

Величина  $S_{mn}(\pm \xi_p^{\pm})$  с ростом  $|p|$  убывает, поскольку подынтегральная функция в (17) содержит экспоненциальный множитель  $e^{-|\operatorname{Im} \xi_p^{\pm}| \tau}$ , если  $p \notin [-m^-, m^+]$ , где  $m^{\pm} = \operatorname{entier}(\kappa(1 \mp \sin \alpha))$ . Будем в (16) пренебрегать членами суммы с индексами  $p \notin [-m^-, m^+]$ .

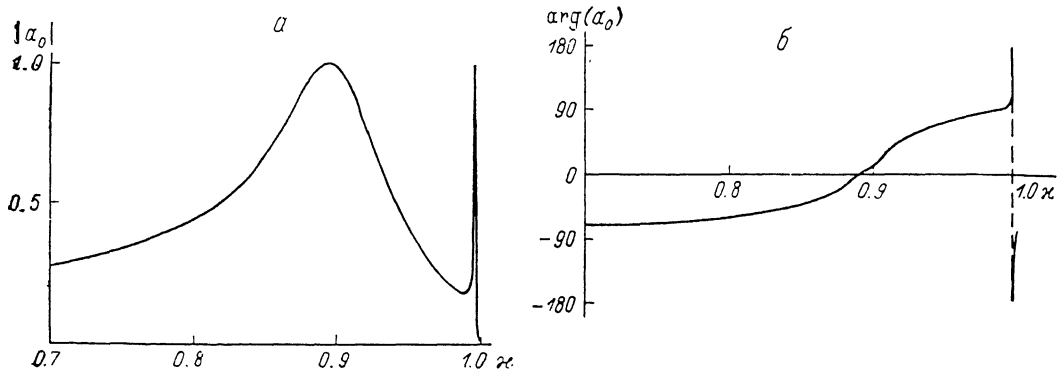


Рис. 2. Дисперсионная зависимость коэффициента отражения основной волны (а) и фазовые характеристики  $a_0$  (б).

Преобразуем формулу (17), учитывая, что  $f_m(t)$  — финитная функция. Изменив порядок интегрирования и введя новую переменную  $\rho = (\tau - t) \eta^{-1}$ , получим

$$S_{mn}(\xi) = \eta^2 \int_{-1}^1 d\sigma f_n(\sigma \eta) e^{i\eta\xi\sigma} \int_{-\sigma}^1 d\rho f_m(\rho \eta) e^{i\eta\xi\rho}. \quad (18)$$

В дальнейшем ограничимся областью изменения параметров  $\kappa \leq 1$  и  $\alpha \approx 0$ , т. е. именно той областью, где имеет место режим полного отражения. Тогда дифракционные гармоники с номерами  $m_0 = \pm 1$  близки к режиму скольжения ( $\kappa = 1$ ) вдоль решетки. Сохраним в системе уравнений (8) два первых уравнения и найдем их приближенное решение. В точке скольжения  $\gamma_{m_0} = 0$ . Выделим в формуле (16) два члена суммы, соответствующие  $p = \pm 1$

$$A_{mn} = \frac{1}{\tilde{\gamma}_{+1}} a_{mn}(\xi_{+1}^{\pm}) + \frac{1}{\tilde{\gamma}_{-1}} a_{mn}(\xi_{-1}^{\pm}) + \bar{A}_{mn}.$$

Для малых  $\eta$  и  $|\xi| < 1$  из (18) получим значения  $S_{mn}$  с точностью  $O(\eta^3)$ , необходимой для изучения явления полного отражения

$$S_{11}(\xi) = \eta^2 \left[ \pi^2 + 8i\eta\xi \left( \frac{\pi}{6} + \frac{32}{45} \right) \right] + O(\eta^4),$$

$$S_{12}(\xi) = S_{21}(\xi) = i8\sqrt{2} \eta^2 \left( \frac{16}{45} + i \frac{\pi^2}{32} \eta\xi \right) + O(\eta^4),$$

откуда простыми алгебраическими преобразованиями находятся  $a_{11}$  и  $\bar{A}_{11}$ , а  $a_{12}$  и  $\bar{A}_{12}$  оказываются порядка  $o(\eta^3)$  (при нормальном падении волны).

После ряда преобразований получим следующее выражение для амплитуды нулевой гармоники (основной волны)  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{-ixv^2 \sin^2 \psi}{1 - 2v^2 \frac{\cos^2 \psi - (1 - x^2) \sin^2 \psi}{\sqrt{1 - x^2}} + Bv^3 \cos \psi [2 \cos^2 \psi - 3(2 - x^2) \sin^2 \psi] - ixv^2 \sin^2 \psi}, \quad (19)$$

где

$$v = \pi \bar{d}, \quad B = \frac{16}{3\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{32}{15\pi} \right) = 2.0016362.$$

Как легко видеть из (19), коэффициент отражения равен единице, если

$$1 - 2v^2 \frac{\cos^2 \psi - x^2 \sin^2 \psi}{x} + Bv^3 \cos \psi [2 \cos^2 \psi - 3(1 + x^2) \sin^2 \psi] = 0, \quad (20)$$

где  $x = \sqrt{1 - x^2}$ . Условие (20) представляет собой кубическое уравнение относительно  $x$  и может быть решено по формулам Кардано. Следует только учесть физическую реализуемость решений, т. е. корни  $x$ , должны удовлетворять неравенству  $0 < x_i < 1$ . Тут же отметим, что условие (20) одновременно с выполнением равенства  $|a_0| = 1$  налагает требование на фазу  $a_0$

$$\arg(a_0) = \pi m, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

что подтверждается численным счетом по формулам строгого решения (рис. 2, б).

Аналитическое решение (20) весьма громоздко, приводить его здесь нецелесообразно. Анализ уравнения (20) показывает, что в исследуемой области параметров  $\bar{d}$  и  $x$  (напомним,  $\bar{d}$  предполагается малым) уравнение имеет три вещественных корня:  $0 < x_1 < 1$ ,  $x_2 < 0$  и  $x_3 > 1$ . Тогда  $x_1$  дает частоту полного отражения  $x_1$  (рис. 2а), а  $x_2$  и  $x_3$  физического смысла не имеют. Однако при увеличении  $\bar{d}$  (а значит, и  $\eta$ )  $x_2$  возрастает и возникает ситуация, когда  $x_2$  переходит через нуль в область положительных величин. Это соответствует частоте  $x_2$  (рис. 2, а) режима полного отражения; при этом значения  $\bar{d}$  уже достаточно велики и достоверные результаты следует получать, используя численный алгоритм на основе точных формул строгого решения задачи.

### Результаты численного анализа

Исследуем зависимость частот  $x_1$  и  $x_2$  от относительной ширины лент  $\bar{d}$  и угла их наклона  $\psi$ . На рис. 3, а кривая 1 соответствует  $x_1$ , кривая 2 —  $x_2$ , а штриховой кривой изображена линия уровня, на которой  $|a_0| = 0.707$ , что дает возможность определить ширину резонансной кривой по уровню половинной мощности. Добротность резонансов для  $x_1$  и  $x_2$  существенно различна; это видно как на дисперсионной зависимости (рис. 2, а), так и по ходу линий уровня (рис. 3, а); угол наклона лент ( $\psi = 45^\circ$ ) для этих зависимостей одинаков.

При  $\bar{d} < 0.354$  (слева от вертикальной штрихпунктирной прямой) решетка не имеет волноводных областей между лентами. Хорошо видно, что при увеличении  $\bar{d}$  точки  $x_1$  и  $x_2$  смещаются в сторону более длинных волн. Если  $\bar{d} > 0.386$ , то значение  $|a_0|$  в интервале  $0.74 \leq x < 1.0$  всегда превышает уровень 0.707 (рис. 3, а). Следовательно, с увеличением ширины лент (и появлением волноводных областей) основная часть падающего поля отражается решеткой. При небольших значениях  $\bar{d}$  характер рассеяния другой: величина коэффициента отражения изменяется в значительных пределах для того же диапазона частот. Способность решеток из наклонных лент в пределах, близких к максимальным, изменять прозрачность при изменении геометрических параметров и длины волны падающего поля позволяет использовать их в различных областях техники СВЧ, в частности в качестве частотных и поляризационных фильтров и экранов.

Если  $\bar{d} \rightarrow 0$  (рис. 3, а), то значения  $x_1$  и  $x_2$  стремятся к единице. Отметим, что  $x = 1.0$  является точкой скольжения — в определенном смысле «особой»



точкой»: здесь возникают две распространяющиеся пространственные гармоники (плюс и минус первая).

Зависимость частот полного отражения  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  от угла наклона лент  $\psi$  (в градусах) для решетки с  $\bar{d}=0.25$  показана на рис. 3, б. Изменения  $\kappa_2$  (штриховая кривая) сравнительно невелики, поэтому соответствующая  $\kappa_2$  координатно-масштабная ось изображена справа. Из физических соображений очевидно, что поперечная решетка ( $\psi=0$ ) полностью прозрачна для нормально падающей Н-поляризованной волны; поэтому для  $\psi=0$  значения  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  на рис. 3, б отсутствуют. Вертикальной штрихпунктирной прямой показана граница существования волноводных областей между лентами; их нет при  $\psi > 30^\circ$ . С ростом  $\psi$  значение  $\kappa_2$  (сплошная кривая) смещается в сторону более высоких частот, достигая  $\kappa_1 = 1.0$  при  $\psi = 90^\circ$ . Таким образом, для простой ленточной решетки значение  $\kappa_1$  совпадает с точкой скольжения плюс—минус первой пространственной гармоники.

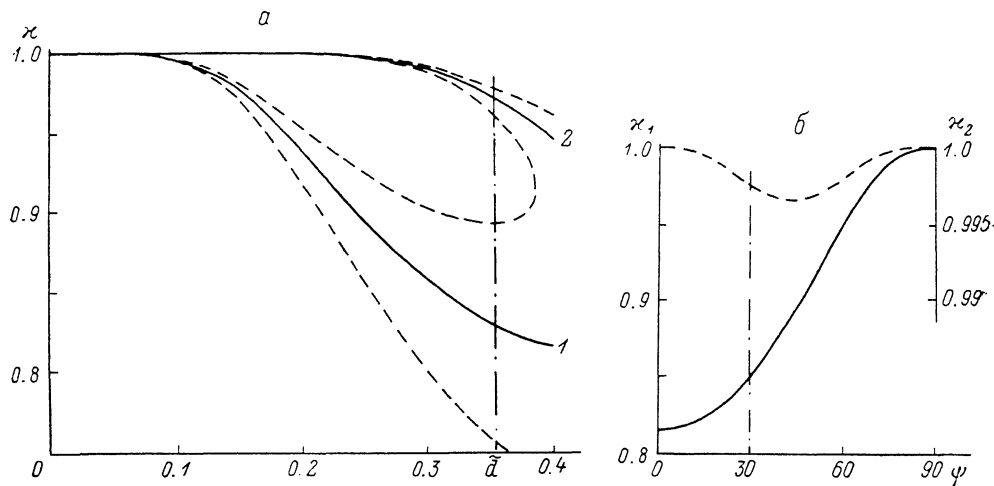


Рис. 3.

Проведение  $\kappa_2$  совершенно иное: кривая имеет минимум при  $\psi = 45^\circ$  ( $\kappa_2 = 0.99665$ ), а при изменении  $\psi$  до 0 или  $90^\circ$  величина  $\kappa_2$  возрастает до единицы.

Переход от решетки без волноводных областей к решетке, имеющей волноводные области, не приводит к каким-либо качественным или количественным изменениям поведения режима полного отражения (рис. 3). Это значит, что физические основы рассматриваемого явления близки к режимам отражения, указанным в [2].

Особый интерес представляет изучение явления полного отражения электромагнитных волн для решеток, имеющих конечное число элементов, так как они являются наиболее адекватной моделью реальных структур. Исследуем рассеяние плоской волны на ограниченной по числу лент решетке при условиях, соответствующих полному отражению.

На рис. 4 представлены кривые для эквидистантной решетки из пяти (сплошная линия) и семи лент (штриховая линия) при нормальном падении волны и геометрических параметрах:  $1/a_{-1} = \bar{d} = 0.25$ ,  $\psi = 45^\circ$  (таких же, как и на рис. 2). Зависимости нормированной амплитуды  $A$  рассеянного поля в дальней зоне в направлении, близком к нормали к плоскости решетки, от  $\kappa$  приведены на рис. 4, а. По содержанию они аналогичны дисперсионной кривой (рис. 2, а). В районе режима полного отражения для периодической решетки существует максимум амплитуды рассеянного поля для структуры из конечного числа лент, причем при увеличении числа элементов ограниченной решетки величина  $\kappa = \kappa_{\text{отр}}$ , соответствующая максимуму на кривой, сдвигается в сторону  $\kappa_1$ .

Диаграммы направленности рассеянного поля в случае максимального отражения волн для пяти ( $\kappa_{\text{отр}} = 0.853$ ) и семи ( $\kappa_{\text{отр}} = 0.870$ ) элементных решеток

изображены на рис. 4, б. Нетрудно видеть, что боковые лепестки у решетки из семи лент достаточно малы; в основном излучение сконцентрировано в направлении, нормальном к плоскости структуры. Используя способ сопоставления свойств ограниченной и бесконечной периодической решеток по уровню амплитуды поля в главном максимуме [5], легко показать, что решетка из семи лент эквивалентна периодической с точностью  $\sim 12\%$ . Несмотря на то что степень совпадения не столь велика, даже у структур с небольшим числом лент режим отражения проявляется достаточно четко.

Таким образом, в ограниченных по числу лент решетках частота  $\chi_{отр}$  сдвигается в область более низких частот по сравнению с величиной  $\chi_1$  для эквивалентной периодической решетки. При увеличении числа элементов ограниченной структуры  $\chi_{отр}$  монотонно возрастает, приближаясь к  $\chi_1$ .

Разность частот полного отражения для периодической и ограниченной решеток  $\Delta = \chi_1 - \chi_{отр}$  зависит от ширины лент, причем с увеличением  $\bar{d}$  величина

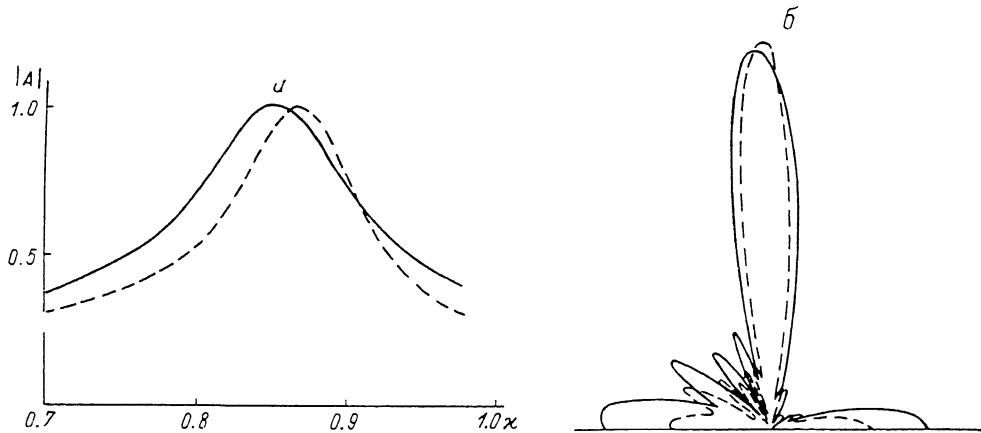


Рис. 4.

$\Delta(\bar{d})$  уменьшается. Например, для 7-элементной решетки  $\Delta(0.15) = 0.036$ ,  $\Delta(0.2) = 0.032$ , а  $\Delta(0.25) = 0.025$ . Отметим, что для малых значений  $\bar{d}$  наряду с основным излучением в области углов  $\varphi \sim 90^\circ$  существует значительное излучение вдоль плоскости решетки.

Нормальное падение волны на периодическую решетку является необходимым условием режима полного отражения (так как при  $\alpha = 0$  осуществляется синфазное возбуждение всех лент решетки). Если же угол падения отличен от нуля, то  $|a_0|$  в максимуме резонансной кривой уже не равен в точности единице. Однако режим резонансного отражения сохраняется, а величина  $\chi_1$  сдвигается в сторону более длинных волн. Такая зависимость будет сохраняться при увеличении  $\alpha$  вплоть до появления первой распространяющейся пространственной гармоники, после чего явление резонансного отражения волны исчезает. Это следует как из приближенных формул для амплитуд дифракционных гармоник, полученных в случае  $\alpha \neq 0$ , так и по результатам расчетов на ЭВМ по формулам строгого решения. Например, для решетки с параметрами  $\bar{d} = 0.25$ ,  $\varphi = 45^\circ$  при  $\alpha = 5^\circ$  величина  $\chi_1 = 0.8678$  (напомним, что при  $\alpha = 0$  величина  $\chi_1 = 0.8949$ ), а  $|a_0| = 0.9596$ ; если продолжать увеличивать угол падения, то при  $\alpha \approx 7^\circ$  возникает минус первая распространяющаяся гармоника и резонансное отражение волн исчезает.

В заключение отметим, что явление полного резонансного отражения  $H$ -поляризованной волны от решетки из наклонных металлических лент представляет значительный интерес как в физическом, так и в прикладном отношении.

Авторы признательны С. А. Масалову, обратившему их внимание на возможность существования режимов полного отражения для решеток с редко расположенными лентами.

## Литература

- [1] Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. Харьков, 1973. 287 с.
- [2] Кириленко А. А., Масалов С. А. и др. В кн.: Прикладная электродинамика. М.: Высшая школа, 1980, в. 4, с. 29—68.
- [3] Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев: Наукова думка, 1984. 240 с.
- [4] Воробьев С. Н., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. ДАН УССР. Сер. А, 1984, № 1, с. 60—64.
- [5] Воробьев С. Н., Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. ДАН УССР. Сер. А, 1984, № 3, с. 67—70.

Институт радиофизики и электроники  
Отделение радиоастрономии  
АН УССР  
Харьков

Поступило в Редакцию  
12 февраля 1986 г.  
В окончательной редакции  
17 февраля 1987 г.