

## К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОГО ЛЯПУНОВСКОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПО ОДНОЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

*П. С. Ланда, В. И. Четвериков*

Излагается усовершенствованный алгоритм вычисления максимального ляпуновского показателя по одной экспериментальной реализации. Предложены методы эффективного уменьшения необходимого числа выборок, а также снижения затрат машинного времени. Показана необходимость вычисления максимального характерного размера аттрактора в фазовом пространстве реконструированной системы в качестве критерия правильности получаемых значений ляпуновского показателя. Осуществлена проверка предложенных методов на известных уравнениях Ресслера, на основе которой установлена возможность в 10 и более раз снизить объем необходимых вычислений, а также более чем в 3 раза уменьшить число выборок по сравнению с известными алгоритмами вычислений. На примере реализаций, снятых по огибающей хаотических колебаний в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью, продемонстрированы способы преобразования экспериментальных данных, позволяющих произвести вычисления ляпуновского показателя для случая сложного пичкового режима генерации.

Наиболее полной количественной характеристикой степени сложности хаотического поведения и структуры аттрактора в фазовом пространстве является спектр ляпуновских характеристических показателей. Положительность хотя бы одного из них служит критерием стохастичности динамики системы. Знание спектра ляпуновских характеристических показателей динамической системы полезно как с теоретической, так и с практической точек зрения. В последнем случае наибольший интерес представляет изучение связи спектра ляпуновских характеристических показателей с параметрами системы, что открывает широкие возможности по управлению статистическими характеристиками колебательных процессов. Естественным является и желание получать информацию о такой связи непосредственно из эксперимента. Однако в противоположность заметному прогрессу, достигнутому в технике вычислений ляпуновских характеристических показателей с помощью алгоритмов, основанных на численном интегрировании системы модельных дифференциальных уравнений, в технике определения ляпуновских характеристических показателей непосредственно из натурного эксперимента имеется серьезное отставание. Это обусловлено главным образом тем, что лишь сравнительно недавно появилось строгое математическое обоснование возможности восстановления (реконструкции) структуры аттракторов по одной экспериментальной реализации [1, 2]. Использувавшиеся до этого методики основывались на применении весьма громоздкого оборудования для одновременной записи временных реализаций большого числа динамических переменных [3, 4].

В настоящее время лишь в одной работе [5] дано описание алгоритма для вычисления ляпуновских характеристических показателей по одной экспериментальной реализации. Там же приведены программа FET1 для вычисления максимального ляпуновского характеристического показателя и результаты ее апробации на реализациях, полученных путем численного интегрирования модельных уравнений ряда хорошо изученных аттракторов. Каких-либо све-

дений о результатах апробации подобных алгоритмов на реализациях, полученных из натуральных экспериментов, в литературе пока нет. Это обусловлено, как нам кажется, рядом трудностей. Главная связана с необходимостью съема с экспериментальной установки достаточно больших массивов данных, содержащих десятки и даже сотни тысяч отсчетов. Другая трудность обусловлена тем, что обработка этих массивов при вычислении ляпуновских характеристических показателей, как правило, требует больших затрат машинного времени на высокопроизводительных компьютерах. Поэтому актуальными являются, во-первых, поиск путей уменьшения числа экспериментальных данных, необходимых для получения приемлемой точности вычисления ляпуновских характеристических показателей, и, во-вторых, выявление возможностей по снижению затрат машинного времени. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Основой алгоритмов вычисления ляпуновских характеристических показателей по одной реализации является процедура реконструкции аттрактора [5], строгим теоретическим обоснованием которой является теорема Такеуса [1]. В процессе выполнения этой процедуры, сделанные через равные промежутки времени  $DT$  дискретные отсчеты исследуемой динамической переменной  $y_i$  распределяются по группам из  $N$  отсчетов. Расстояние между отсчетами в каждой группе  $\tau = TAU \cdot DT$  ( $TAU=1, 2, 3$  и т. д.) называется временной задержкой процедуры реконструкции. Суть самой процедуры реконструкции состоит в том, что значение динамической переменной  $y_i$  в каждой группе отсчетов объявляется проекцией фазовой точки, связанной с данной группой, на  $i$ -ю координатную ось в  $N$ -мерном фазовом пространстве. В результате этого одномерная реализация как бы скручивается в  $N$ -мерный спиралевидный аттрактор, являющийся метрическим аналогом реального аттрактора при условии равенства их фазовых пространств.

Величина максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$  определяется по изменению расстояния между двумя соседними витками спирали реконструированного аттрактора в направлении максимального разбегания траектории. В программе FET1 [5] это осуществляется следующим образом. Первоначально выбирается исходная фазовая точка на реконструированном аттракторе, соответствующая началу реализации. Из этой точки приводится вектор ограниченной длины, концом которого является точка на ближайшем витке реконструированного аттрактора. Переместив начало и конец вектора вдоль траектории на величину  $EVOLV$ , называемую временем эволюции, получаем эволюционировавший вектор (см. рис. 4, а в [5]). В начале этого вектора строится так называемый вектор-заместитель, после перемещения которого на  $EVOLV$  получается второй эволюционировавший вектор. Вновь отыскивается вектор-заместитель, и вся процедура многократно повторяется, пока текущая фазовая точка не дойдет до конца траектории. Текущее значение ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1(k)$  определяется как усредненный вдоль пройденного отрезка траектории логарифм отношения длины эволюционировавшего вектора к длине соответствующего вектора-заместителя, деленный на  $DT$  [5]. Максимальный ляпуновский характеристический показатель  $\lambda_1$  считается вычисленным и равным  $\lambda_1(k)$ , после того как  $\lambda_1(k)$  при некотором  $k$  достигнет установившегося, не зависящего от дальнейшего увеличения  $k$  значения. При этом может быть  $k < NP$ , где  $k$  — номер текущего отсчета,  $NP$  — полное число отсчетов на реализации.

В программе FET1 процедура замещения эволюционировавшего вектора заключается в переборе всего массива данных реализации, при котором находится наименьший по длине и имеющий наименьший угол отклонения вектор-заместитель.

Нами в процессе работы были введены некоторые изменения в программу FET1, целью которых было сокращение времени счета, уменьшение числа необходимых экспериментальных данных, а также более четкий выбор исходных параметров алгоритма, позволяющих оценить степень достоверности вычисляемых значений ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$ . Основным критерием правильности вычисленного значения  $\lambda_1$ , как и в работе [5], являлась его устойчивость по отношению к изменению исходных параметров алгоритма в достаточно широких пределах их значений.

Первым шагом по модификации программы FET1 явилось введение параметра  $LOC = SCALMX/DNX$ .  $SCALMX$  — используемый в программе FET1 исходный параметр, характеризующий максимально допустимую длину вектора-заместителя при выполнении процедуры замещения;  $DNX$  — максимальный характерный размер хаотического аттрактора. Выбирая вместо  $SCALMX$  в качестве исходного параметра алгоритма параметр  $LOC$ , мы тем самым фиксируем масштаб вектора начального отклонения от основной (ведущей) траектории на шкале характерных размеров аттрактора в фазовом пространстве системы. Для более точной характеристики локальных свойств процесса разбега траекторий на аттракторе необходимо уменьшать параметр  $LOC$ , причем степень выбираемой локальности можно выражать в процентах от размера аттрактора  $DNX$ . Сделать это безотносительно к значению  $DNX$ , зная лишь параметр  $SCALMX$ , невозможно. Величина  $DNX$  определяется в процессе вычисления  $\lambda_1$ . Ее выход на установившееся значение происходит

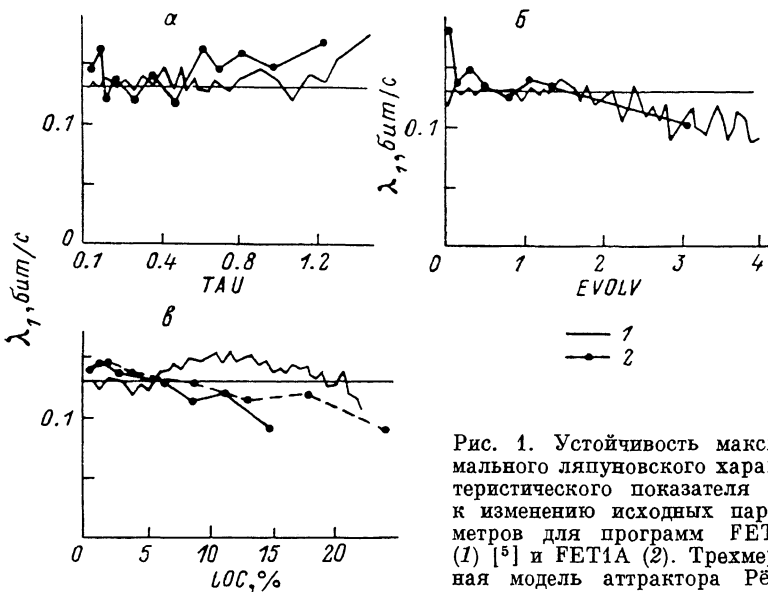


Рис. 1. Устойчивость максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$  к изменению исходных параметров для программ FET1 (1) [5] и FET1A (2). Трехмерная модель аттрактора Рёсслера.

Значения TAU и EVOLV даны в единицах среднего орбитального периода.  $ANM=10^\circ$ . Прямой горизонтальной линией отмечено точное значение  $\lambda_1=0.13$  бит/с.

при прохождении текущей фазовой точкой отрезка, обычно составляющего 2—6 % от длины всей реализации. Величина  $SCALMX$  корректируется в процессе вычисления  $DNX$ .

Второй шаг по модификации программы FET1 был направлен на сокращение времени вычисления ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$ . Для этого использовалось свойство малой чувствительности алгоритма вычисления  $\lambda_1$  к небольшим изменениям угла отклонения вектора-заместителя от замещаемого эволюционировавшего вектора. Численные эксперименты на трехмерной модели аттрактора Рёсслера [6] показали, что основная часть (до 70 %) из выбранных алгоритмом векторов-заместителей при  $LOC=0.05 \div 0.1$  отклонена от замещаемых эволюционировавших векторов на угол, меньший  $12\text{--}17^\circ$ . С другой стороны, среднее отклонение вектора-заместителя на угол до  $10^\circ$  практически не влияет на величину вычисляемого значения  $\lambda_1$ .

Указанные факты были учтены при составлении программы FET1A путем введения дополнительного исходного параметра  $ANM$ . Его функция заключается в следующем. Если в процессе перебора массива данных встречается подходящей длины вектор, угол отклонения которого от текущего эволюционировавшего вектора меньше  $ANM$ , то он сразу объявляется вектором-заместителем и процесс перебора прекращается. Выигрыш во времени счета составляет в среднем 5—8 раз. Рис. 1, на котором для сравнения приведены результаты работы [5], показывает, сколь невелики потери, понесенные при этом. Из рис. 1, а видно,

что величина временной задержки  $TAU$  при реконструкции аттрактора должна выбираться в пределах  $0.1-0.5$  средней величины орбитального периода. Время эволюции  $EVOLV$  не должно выходить за пределы  $0.3-1.8$  орбитального периода (рис. 1, б). Параметр  $LOC$  должен быть порядка  $3-10\%$  (рис. 1, в). Резкий спад величины  $\lambda_1$  при увеличении параметра локальности  $LOC$  выше  $12\%$  обусловлен свойствами трехмерного аттрактора Ресслера — расхождением удаленных траекторий в среднем по аттрактору меньше, чем расхождение близких траекторий. Сам аттрактор представляет собой «плоскую» (в трехмерном пространстве) ленту, шириной, составляющей в среднем  $30\%$  от его поперечника, в которой растягивание вдоль потока отсутствует [6]. Удаленным на величину порядка ширины ленты траекториям просто некуда расходиться, отсюда — заниженное значение  $\lambda_1$ . Заметное расхождение с результатами работы [6] при  $LOC > 12\%$ , по-видимому, связано с тем, что на рис. 6, с в [5] нормировка значений длины, откладываемой по горизонтальной оси, произведена на размер проекции аттрактора. Штриховой ломаной линией на

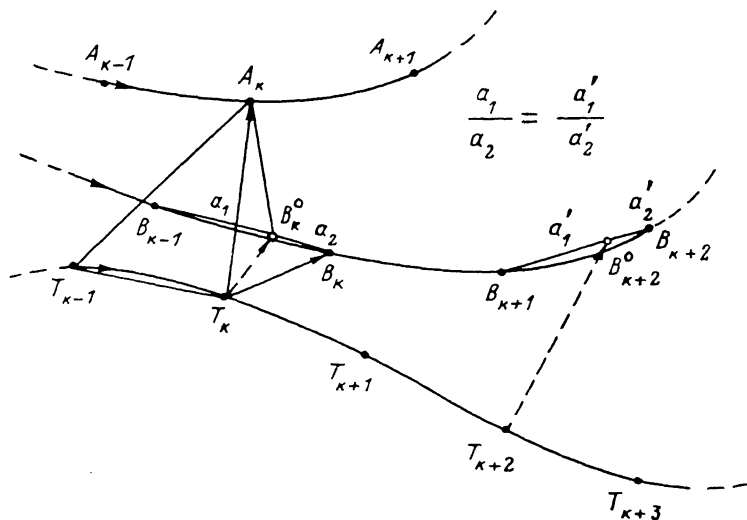


Рис. 2. Линейная интерполяция на реконструированном аттракторе, использованная в программе FET1B.

рис. 1, в приведены полученные нами результаты при аналогичной нормировке длины вектора-заместителя. В этом случае получается более лучшее сходство результатов.

Легко понять и выигрыш по времени счета. Подавляющее большинство (до  $80\%$ ) векторов-заместителей отыскиваются в пределах тонкого слоя ленты аттрактора, заключающего в себе плоскость  $T_{k-1}T_kA_k$  (рис. 2), образованную эволюционировавшим вектором  $T_kA_k$  и отрезком  $T_{k-1}T_k$ , соединяющим две соседние точки ведущей траектории, одна из которых  $T_k$  является началом этого вектора. Наибольшая доля затрат машинного времени приходится на поиск векторов-заместителей в области складки аттрактора, которая по площади занимает лишь небольшую его часть [6].

Третий шаг по модификации программы FET1 был направлен на уменьшение числа необходимых экспериментальных данных с одновременным дополнительным снижением затрат машинного времени. Для этого использовалась процедура линейной интерполяции на реконструированном аттракторе (рис. 2).

При поиске вектора-заместителя необходимо выполнить два противоречивых требования: малости длины вектора-заместителя и малости угла его отклонения от замещаемого эволюционировавшего вектора. Принципиально наиболее простой способ выполнения этих требований заключается в увеличении числа отсчетов  $NP$ . При этом либо увеличивается длина реализации, когда сохраняется отрезок времени между отсчетами, либо, наоборот, сохраняется длина реализации за счет увеличения частоты отсчетов. В первом случае возрастает число витков реконструированного аттрактора, во втором увеличи-

вается плотность точек на каждом витке. Выбор того или иного пути осуществляется экспериментально. Однако когда увеличение числа отсчетов ограничено техническими возможностями экспериментатора, полезным может оказаться следующий прием.

На рис. 2 изображены три наиболее близко расположенных витка реконструированного аттрактора. На нижнем витке — ведущей траектории — расположена текущая фазовая точка  $T_k$ . Необходимо произвести замещение эволюционировавшего на предыдущем шаге эволюции вектора  $T_k A_k$ . Расположенные на более близком витке (траектория  $B$ ) точки  $B_{k-1}$  и  $B_k$  не могут быть использованы для построения вектора-заместителя, так как получающиеся углы отклонения от вектора  $T_k A_k$  (например, угол  $A_k T_k B_k$ ) превышают  $ANM$ . Поскольку более близкой в направлении вектора  $T_k A_k$  траектории нет, то в программах FET1 и FET1A процедура замещения не будет осуществлена и в качестве начального вектора для следующего шага эволюции будет взят вектор  $T_k A_k$ , что из-за нару-

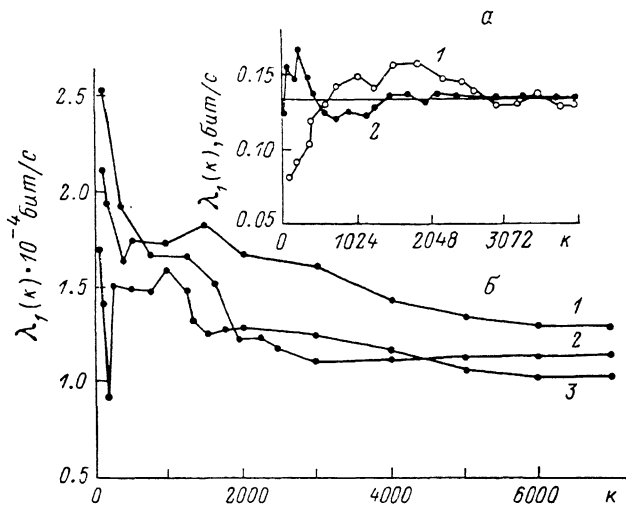


Рис. 3. Сравнение темпов сходимости процесса вычисления максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$  по программам FET1 (1) и FET1B (2) (трехмерная модель аттрактора Рёсслера  $NP=4096$ ) (а) и по программе FET1B (неавтономный генератор с инерционной нелинейностью,  $TAU=EVOLV=1$ ,  $LOC=0.08$ ,  $NP=7000$ ) (б).

шения требования малости вектора-заместителя даст уменьшение вычисленного текущего значения ляпуновского характеристического показателя. Обойти эту трудность позволяет следующая процедура построения вектора-заместителя. На одном из близкорасположенных к текущей точке  $T_k$  витке реконструированного аттрактора выбираются две ближайшие к  $T_k$  соседние точки. Затем находится точка пересечения  $B_k$  отрезка  $B_{k-1}B_k$ , соединяющего эти две точки с плоскостью  $T_k A_k B_k^o$ , перпендикулярной плоскости  $T_k A_k T_{k-1}$ . Если угол  $A_k T_k B_k^o$  меньше  $ANM$ , то вектор  $T_k B_k^o$  выбирается в качестве вектора-заместителя. После его эволюции эволюционировавший вектор  $T_{k+2} B_{k+2}^o$  (на рис. 2  $EVOLV=2$ ) строится аналогично путем пропорционального деления отрезка  $B_{k+1}$  и  $B_{k+2}$ , полученные путем сдвига на  $EVOLV$  точек  $B_{k-1}$  и  $B_k$ . В программе FET1B могут использоваться и реальные векторы, полученные путем соединения точек на витках реконструированного аттрактора, соответствующих реальным отсчетам. На рис. 2 этой ситуации соответствует вектор  $T_k A_k$ , изображенный сплошной линией.

Описанный прием позволяет существенно сократить число требуемых экспериментальных данных. Особенно он эффективен, когда ляпуновская размерность аттрактора близка к 2 и все его витки образуют плоскую ленту. В этом случае подходящим для построения вектора-заместителя является любой ближайший к текущей точке аттрактора независимо от плотности и расположения на нем экспериментальных точек.

Иллюстрацией сказанного является рис. 3, а. Вычисления проводились при использовании массива данных из 4096 элементов, примерно по 20 точек на средний орбитальный период. Видно, что программа FET1B обеспечивает приемлемую точность вычисления  $\lambda_1$  при прохождении примерно 1/3 массива данных, в то время как программа FET1 использует для этого вдвое большую длину траектории. Время вычисления  $\lambda_1$  по программе FET1B оказалось в 17 раз меньше. Это обусловлено тем, что практически все векторы-заместители находились в процессе перебора лишь первой половины массива данных. Использование в программе FET1B лишь части массива данных длиной 1536 элементов позволило вычислить  $\lambda_1$  с точностью до 2 % и убедиться при этом в сходимости процесса вычислений. Следует уточнить, что точки на рис. 3 соответствуют максимумам некоего колебательного процесса, характеризующего сходимость текущего значения ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1(k)$ . Следовательно, кривые на рис. 3 являются как бы огибающими сверху этого колебательного процесса, а его период однозначно связан со средним орбитальным периодом хаотических колебаний.

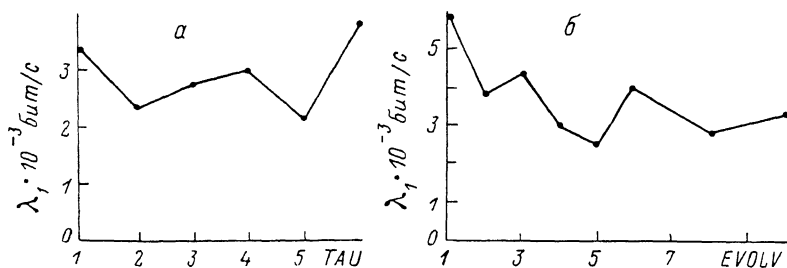


Рис. 4. Иллюстрация неустойчивого поведения максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1$ , вычисляемого с помощью экспериментальных реализаций, снятых по огибающей стохастических колебаний в генераторе с инерционной нелинейностью.  $NP=4096$ .

Разработанные модификации программы FET1 использовались далее при вычислении максимального ляпуновского характеристического показателя по экспериментальным реализациям, снятым на неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью [7]. В стохастическом режиме генератора реализация представляет собой чередование пиковых цугов с высокочастотным заполнением и отрезков с нулевой амплитудой огибающей (см. рис. 3, в в [7]). Длины этих отрезков и пиковых цугов распределены по случайному закону. Все реализации были сняты по огибающей с использованием 6-разрядного АЦП при длине массива из  $NP=4096$  элементов. Длина одной реализации соответствовала 100—200 пиковым цугам. Временной интервал между отсчетами был равен  $DT \approx 2.4 \cdot 10^{-5}$  с. Частота высокочастотного заполнения 130 кГц. Длительность одного пика составляла в среднем примерно  $1.2 \cdot 10^{-4}$  с.

На первом этапе с помощью программ FET1 и FET1A была осуществлена проверка устойчивости вычисляемых значений первого ляпуновского показателя  $\lambda_1$  к изменению исходных данных (рис. 4). Проверка показала отсутствие устойчивости  $\lambda_1$  к изменению  $TAU$  и  $EVOLV$ , что обусловило невозможность выбора какого-либо конкретного набора значений исходных параметров алгоритма для проведения исследований.

Полученный отрицательный результат обусловлен несколькими причинами. Основной из них явилась весьма сложная форма огибающей стохастического сигнала, снимаемого с генератора. Эта сложность главным образом определялась существованием участков нулевой амплитуды огибающей, а также сильным (до 30—70 %) отличием высоты соседних пиков. Последнее обстоятельство приводит к нарушению одного из важнейших условий используемых алгоритмов: следующие друг за другом витки реконструированного аттрактора не должны слишком сильно расходиться в фазовом пространстве [5].

Для удовлетворения этого условия потребовалось бы производить оцифровку не по огибающей, а по истинной реализации высокочастотного стохастического

сигнала. Однако для этого потребовалось бы существенно (на 1—2 порядка) увеличить быстродействие АЦП и емкость буферной памяти устройства оцифровки.

Для разрешения возникших трудностей и обеспечения правильности работы процедуры реконструкции аттрактора были предложены два вида преобразования имеющихся реализаций.

Для осуществления первого преобразования был использован факт малости прочности предельного цикла и неизохронности исследуемого генератора [8], что позволило представить колебания в виде гармонического сигнала с медленно меняющейся по случайному закону амплитудой. Суть самого преобразования заключалась в том, что реализация, полученная по измерениям огибающей, домножалась на синусоидальный сигнал с частотой, равной частоте высокочастотного заполнения пиков. Одновременно с этим на основе квадратичной интерполяции было осуществлено увеличение числа точек на восстановленной таким образом реализации. Одному периоду высокочастотного сигнала соответствовали три точки. Увеличение числа точек было необходимо для обеспечения правильности работы процедуры реконструкции аттрактора, поскольку на одном интервале между двумя последовательными отсчетами на экспериментальной реализации, снятой по огибающей, укладывались примерно три периода сигнала высокочастотного заполнения. Столь малой плотности отсчетов, как свидетельствуют результаты работы [3], а также наши исследования на моделях аттракторов Рёслера, для правильной реконструкции аттрактора явно недостаточно. С другой стороны, расчеты показывают, что выбор числа точек на период больше трех не приводит к увеличению точности вычисления ляпуновского показателя, а лишь обуславливает неоправданный рост затрат машинного времени.

Второй вид преобразования заключался в отбрасывании точек, соответствующих нулевой амплитуде огибающей. На возможность этого указывают следующие соображения. Исследуемому режиму генератора соответствует один положительный ляпуновский показатель [7], и размерность аттрактора близка к 2. В этом случае поток траекторий образует как бы двумерную поверхность, от которой небольшая часть траекторий отходит резко в сторону. Эти траектории отрываются от основного потока, и движение фазовой точки по ним, подобное движению по петле сепаратрисы седло—фокуса [9], как раз и соответствует отрезкам реализации с нулевой амплитудой огибающей. В этих областях высокочастотные почти периодические колебания генератора срываются. При попадании фазовой (текущей) точки на такую отрывную траекторию возможны два варианта. В первом начало зондирующего вектора лежит на витке аттрактора, принадлежащем двумерной поверхности, а конец на отрывной траектории. Эволюция такого вектора во времени приводит к чрезвычайно быстрому росту его длины, что может дать очень завышенные значения ляпуновского характеристического показателя. При возникновении таких ситуаций подобно тому, как это делалось в работе [5], вычисляемые значения логарифма отношения длин эволюционировавшего и начального векторов не подставляются в процедуру суммирования при вычислении ляпуновского характеристического показателя по формуле (9) из [5]. При втором варианте и начало и конец зондирующего вектора лежат на отрывной траектории. В этом случае при эволюции длина вектора не изменяется, что дает нулевой вклад в процедуру суммирования. Эти обстоятельства и позволяют исключить из расчета все точки (кроме одной), соответствующие нулевой амплитуде огибающей, при сохранении информации об общей длине реализации по времени, необходимой для подсчета ляпуновского характеристического показателя. Такая процедура позволяет в 2—4 раза повысить информативность массива экспериментальных данных. Техническая реализация процедуры исключения в устройстве оцифровки весьма проста и состоит во введении в схему логического условного оператора, пропускающего в ячейки буферной памяти лишь одну точку с нулевой амплитудой огибающей, разделяющую два соседних пиковых дуга.

Полученные описанными методами «истинные» реализации, восстановленные из реализаций, снятых по огибающей, были использованы в программе FET1B для исследования устойчивости вычисленных значений максимального

ляпуновского характеристического показателя к изменению значений исходных параметров алгоритма.

Первоначально на основании результатов работы [5], а также из результатов исследований 3- и 4-мерного аттрактора Рёсслера были выбраны следующие значения параметров  $EVOLV=1$  и  $TAU=1$ , соответствующие  $1/3$  среднего орбитального периода. Затем была проведена работа по выбору значения параметра  $LOC$ .

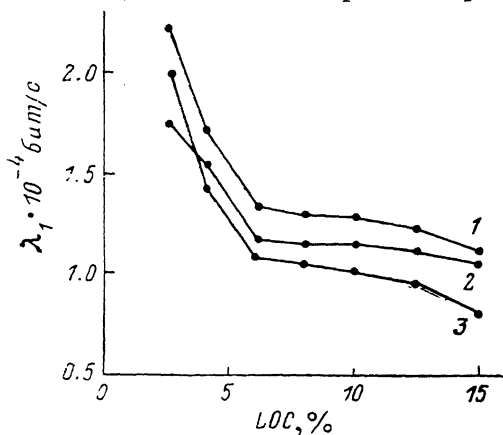


Рис. 5. Зависимость максимального ляпуновского характеристического показателя от параметра локальности, вычисленная для различных значений амплитуды параметрического воздействия на основе «истинной» реализации, восстановленной из огибающей стохастических колебаний ( $TAU=1$ ,  $EVOLV=1$ ).

обусловлен малой разрядностью блока АЦП (6 бит), что обеспечивало точность отсчетов лишь порядка 1.5 %. Для дальнейших расчетов использовалось значение  $LOC=0.08$ . Отбрасывание векторов по минимуму длины осуществлялось на уровне  $LOC < 0.05$ .

На рис. 5 приведены зависимости максимального ляпуновского показателя от параметра  $LOC$ , вычисленные с помощью программы FET1B для трех реализаций, соответствующих различным значениям амплитуды параметрического воздействия [7]. Видно, что в диапазоне значений  $0.06 \leq LOC \leq 0.125$  на всех трех кривых имеет место плато, характеризующее область устойчивости алгоритма по параметру  $LOC$ . При  $LOC > 0.125$  наблюдается уменьшение  $\lambda_1$ , что обусловлено, как уже говорилось ранее (рис. 1, в), сравнимостью длины зондирующего вектора с размером аттрактора. Сильный рост  $\lambda_1$  при  $LOC < 6\%$

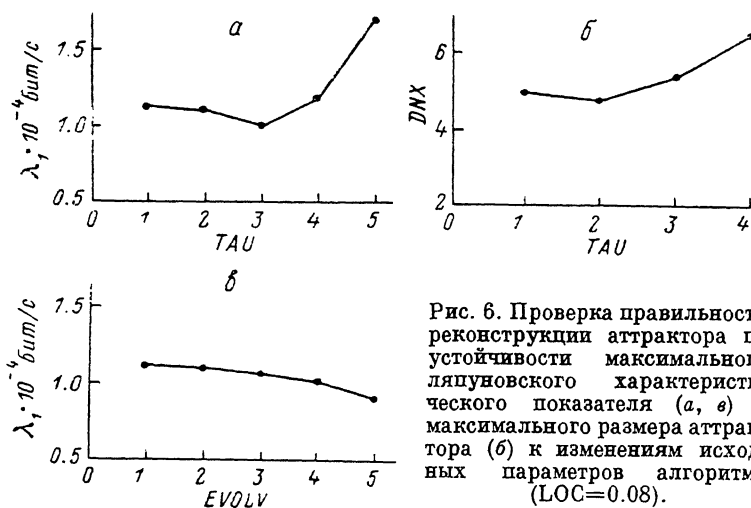


Рис. 6. Проверка правильности реконструкции аттрактора по устойчивости максимального ляпуновского характеристического показателя (а, в) и максимального размера аттрактора (б) к изменениям исходных параметров алгоритма ( $LOC=0.08$ ).

Для оценки степени надежности полученного результата была осуществлена проверка устойчивости вычисляемых значений  $\lambda_1$  к изменению других входных параметров.

Рис. 6 позволяет оценить степень правильности работы процедуры реконструкции аттрактора. Рис. 6, а показывает, что в диапазоне значений временной задержки  $1 \leq TAU \leq 4$ , соответствующем ее изменению в пределах от  $1/3$  до  $4/3$  величины орбитального периода, процедура реконструкции работает правильно. Лучшими все же следует считать значения  $1 \leq TAU \leq 2$ . Об этом свидетельствуют также результаты (рис. 6, б), иллюстрирующие устойчивость



значений максимального «диаметра» аттрактора  $DNX$  (дан в произвольных единицах) к изменению величины временной задержки.

Отметим, что в работе [6] ничего не говорится о параметре  $DNX$  и об использовании факта его устойчивости к изменению  $TAU$  в качестве критерия верности реконструкции аттрактора. О необходимости расчетов  $DNX$  для выбора значений входных параметров процедуры реконструкции аттрактора свидетельствует увеличение темпа роста  $DNX$  при увеличении  $TAU$  (рис. 6, б).

Рис. 6, в иллюстрирует устойчивость  $\lambda_1$  к изменению параметра эволюции и свидетельствует о правильности выбора его значения ( $EVOLV=1$ ).

На рис. 3, б показана сходимость процесса вычисления максимального ляпуновского характеристического показателя для трех реализаций, соответствующих различным значениям амплитуды параметрического воздействия [7]. Видно, что процесс установления завершается при прохождении примерно 6000 точек. Если использовать массивы по 12 000 элементов, что соответствует восстановлению «истинной» реализации при пяти точках на ее орбитальный период, то выход на установившееся значение  $\lambda_1$  достигается при прохождении вдвое меньшего числа точек. Однако при этом время вычисления существенно (в 3—4 раза) увеличивается, что обусловлено ростом его затрат на поиск векторов-заместителей.

Результаты, представленные на рис. 3—6, свидетельствуют о правильности выбора значений входных параметров для программы FET1B и вычислений максимального ляпуновского показателя. Они свидетельствуют также о возможности использования предложенных методов реконструкции аттрактора путем восстановления «истинной» реализации для колебаний в генераторе из реализации, снятой по их огибающей. Отметим, что такое восстановление необходимо лишь для обеспечения правильности работы процедуры реконструкции путем удовлетворения малой расходимости следующих друг за другом витков реконструированного аттрактора. Существенно, что такая процедура восстановления малочувствительна как к фазе, так и к частоте высокочастотного заполнения. Так, восстановление реализации путем домножения огибающей не на синус, а на косинус привел лишь к незначительным (в пределах 2—4 %) отклонениям вычисленных значений  $\lambda_1$ . Домножение на синусоидальный сигнал в три раза меньшей частоты привело к уменьшению  $\lambda_1$  лишь на 6—14 %. Для окончательного ответа на вопрос о возможности использования предложенных методов восстановления реализации из огибающей необходимо провести детальные исследования на численных моделях хаотических колебаний.

Полученные результаты позволили подтвердить гипотезу о связи порога синхронизации с энтропией Колмогорова [10] (для трехмерных систем энтропия Колмогорова равна положительному ляпуновскому показателю  $\lambda_1$ ). Измерения порога синхронизации для соответствующих режимов в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью были проведены в работе [7]. В частности, кривым на рис. 3, б и 5 соответствуют следующие значения порога синхронизации: 1 — 0.65, 2 — 0.45, 3 — 0.31. Из рисунков видно, что росту порога синхронизации соответствует увеличение энтропии Колмогорова.

## Литература

- [1] Takens F. In: Lecture notes in mathematics. Springer, Berlin, 1981, v. 898.
- [2] Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Show R. Phys. Rev. Lett., 1980, v. 45, N 9, p. 712—716.
- [3] Львов В. С., Предтеченский А. А., Черныш А. И. ЖЭТФ, 1981, т. 80, № 3, с. 1099—1121.
- [4] Лукачук С. Н., Предтеченский А. А. ДАН СССР, 1984, т. 274, № 6, с. 1317—1320.
- [5] Wolf A., Swift J., Swinney H., Vastano J. Physica 16D, 1985, p. 285—317.
- [6] Rössler O. E. Phys. Lett., 1976, v. 57A, N 5, p. 397—398.
- [7] Безаева Л. Г., Капцов Л. Н., Ланда П. С. ЖТФ, 1986, т. 56, № 9, с. 1849—1853.
- [8] Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
- [9] Анищенко В. С. Стохастические колебания в радиофизических системах. 1985.
- [10] Кузнецов Ю. И., Ланда П. С., Ольховой А. Ф., Пермиков С. Н. ДАН СССР, 1985, т. 281, № 2, с. 291—294.