

УДК 537.312.62

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В СВЕРХПРОВОДЯЩИХ КОМПОЗИТАХ ТИПА IN SITU

А. Л. Рахманов

Найдены распределения тока и электрического поля, а также потери энергии в скрученном сверхпроводящем композите типа in situ, помещенном в достаточно сильное изменяющееся магнитное поле и несущем транспортный ток. Показано, что в рассматриваемой ситуации скручивание ведет к значительному снижению потерь энергии в композитах с транспортным током. Зависимость потерь энергии и распределения электрического поля от шага скрутки носит пороговый характер. Они слабо зависят от шага скрутки при больших L ; если же L становится меньше некоего порогового значения, зависящего от транспортного тока, то происходит перестройка распределения электрического поля, а потери энергии резко снижаются.

Новым перспективным видом сверхпроводящих материалов являются неупорядоченные композиты, изготавливаемые методами in situ, порошковой металлургии и т. п. на основе сверхпроводящих соединений группы А15 [1, 2]. Данный тип композитов в литературе обычно называют сверхпроводниками типа in situ.

Композит типа in situ представляет собой смесь сильно вытянутых вдоль общей оси сверхпроводящих включений в матрице из нормального металла. В силу своей структуры рассматриваемый композит является анизотропным материалом, содержащим большое число сверхпроводящих элементов, распределенных в среднем равномерно по объему образца. Для макроскопического описания подобную систему естественно рассматривать как сплошную однородную анизотропную среду. В рамках модели критического состояния [3] сверхпроводящие свойства такой среды можно охарактеризовать критической плотностью сверхпроводящего тока. При этом продольная (вдоль оси вытяжки) критическая плотность тока j_s существенно отличается от поперечной $j_{s\perp}$. Как правило, $j_s \gg j_{s\perp}$ [2, 3]. Природа токов j_s и $j_{s\perp}$ достаточно подробно обсуждалась в литературе [1-4], и здесь мы не будем останавливаться на данной проблеме. С точки зрения изучаемой далее макроскопической электродинамики появление тока $j_{s\perp}$ — основное отличие композитов типа in situ от хорошо изученных в литературе сверхпроводящих композитов с регулярной структурой сверхпроводящих элементов [5], у которых $j_{s\perp} = 0$.

Для снижения потерь и неупорядоченные, и упорядоченные сверхпроводящие композиты скручиваются вокруг оси вытяжки с винтовым шагом $L > 2\pi R_0$, где R_0 — радиус композитного провода [5, 6]. И в экспериментах, и в приложениях наиболее часто встречается ситуация, в которой провод с транспортным током I помещается в поперечное изменяющееся магнитное поле $B_a(t)$. Скрутка существенно усложняет описание электродинамики подобных систем.

В работах [7, 8] задача о распределении электромагнитного поля и потерях энергии в скрученных композитах типа in situ решена для ряда предельных случаев при $I=0$. В [9] получено решение поставленной задачи в области малых магнитных полей. В данной работе при весьма общих допущениях получено аналитическое решение уравнений электродинамики и найдены потери в скрученном композите типа in situ в области больших полей B_a . Показано, что в этой

ситуации скручивание существенно снижает потери в композите с транспортным током. Зависимость потерь от шага скрутки носит пороговый характер — если величина L превышает некое, зависящее от транспортного тока значение, то плотность потерь резко растет.

Распределение электрического поля

Рассмотрим скрученный провод радиуса R_0 с током $I < I_s = \pi R_0 j_s$ в поперечном поле $B_a(t)$ ($I \ll 2\pi R_0 \dot{B}_a / \mu_0$). Если внешнее поле не мало [8]

$$B_a > B_{r\perp} \sim \frac{L}{4\pi} \mu_0 j_{s\perp}, \quad (1)$$

то магнитный поток полностью проникает в провод и уже при $I=0$ во всем его объеме наводится сверхпроводящий ток. Характерное значение $B_{r\perp} \lesssim 10^{-1} \div 10^{-2}$ Тл. Тогда [5, 8] если скорость изменения поля \dot{B}_a не очень велика ($\dot{B}_a \ll \mu_0 j_s R_0 / \tau_0$, где $\tau_0 = \mu_0 L^2 \sigma_{\perp} / 8\pi^2$ — характерное время затухания нормального тока в скрученном композите, σ_{\perp} — поперечная электропроводность композита в нормальном состоянии), то влияние переменной компоненты нормального тока на производную магнитного поля по времени мало и для определения электрического поля E можно воспользоваться уравнением:

$$\text{rot } E = -\dot{B}_a. \quad (2)$$

При характерных значениях параметров ($j_s = 10^9 \div 10^{10}$ А·м⁻², $R_0 = 10^{-3} \div 10^{-4}$ м, $\sigma_{\perp} = 10^7 \div 10^8$ Ом⁻¹·м⁻¹, $(2\pi R_0 / L)^2 = 0.1$) уравнение (2) применимо при $\dot{B}_a \ll 10^3 \div 10^6$ Тл/с.

В цилиндрических координатах R, φ, z общее решение уравнения (2) удобно записать в виде

$$E = -\dot{B}_a R \sin \varphi e_z + \frac{L}{2\pi} \dot{B}_a \text{grad } f(R, \varphi), \quad (3)$$

где e_z — единичный вектор вдоль оси z , совпадающей с осью провода; угол φ

отсчитывается от направления внешнего поля (рис. 1), а f — подлежащая определению функция. Решение (3) должно удовлетворять уравнению непрерывности тока

$$\text{div } j(E) = 0 \quad (4)$$

и граничному условию на поверхности провода $j_r(R_0) = 0$, где i_r — R -компонента тока. Из этого условия, очевидно, следует, что

$$E_R(R_0) = 0. \quad (5)$$

В нескрученном проводе E и j направлены вдоль оси вытяжки, совпадающей с осью z . Соответственно $\text{grad } f = 0$. Переменное поле $B_a(t)$ наводит в областях $y > 0$ и $y < 0$ (рис. 1) электрическое поле E_z разного знака. Соответственно [5, 7, 8] в скрученном проводе ток не может течь только вдоль оси вытяжки, а должен перетекать из волокна в волокно и в поперечном направлении. Так как, смещаясь вдоль оси вытяжки волокон, мы попадаем то в область $y > 0$, то в область $y < 0$. Это перетекание возможно без существенной перестройки распределения электрического поля, если плотность наведенного поперечного тока меньше критической. С уменьшением шага L поперечный ток достигает значения $j_{s\perp}$ [7, 8]. При этом в композите должна наводиться значительная поперечная компонента электрического поля E_{\perp} . Ниже рассматривается такая ситуация, когда скручивание приводит к существенной перестройке поля E в проводнике.

Как легко понять [3, 5, 9], при $j_s \gg j_{s\perp}$ уже малая компонента электрического поля E_{\parallel} , направленная вдоль осей волокон, $E_{\parallel} \ll E_{\perp}$ возбуждает в ком-

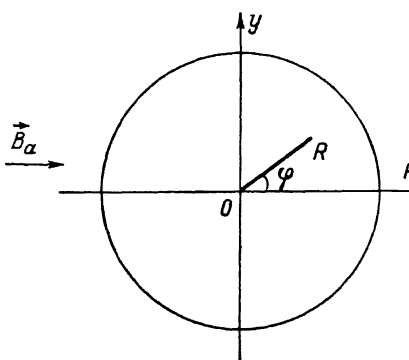


Рис. 1. Геометрия задачи.

позите продольный ток $j_{\parallel} \simeq j_s$. С другой стороны, если в проводе имеется большое поперечное электрическое поле E_{\perp} и $(E_{\perp}/E_{\parallel})^2 \gg 1$, то поперечная компонента тока j_{\perp} также достигает критического значения $j_{s\perp}$. Тогда связь векторов \mathbf{j} и \mathbf{E} можно представить в виде [3, 7]

$$\mathbf{j} = \frac{E_{\parallel}}{E_{\parallel}} j_s + \frac{E_{\perp}}{E_{\perp}} j_{s\perp}. \quad (6)$$

С помощью ортов цилиндрической системы координат $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_{\varphi}$ можно записать

$$\frac{E_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \mathbf{e}_{\parallel} = \frac{\mathbf{e}_z + \frac{2\pi R}{L} \mathbf{e}_{\varphi}}{\sqrt{1 + (2\pi R/L)^2}},$$

$$E_{\perp}/E_{\perp} = \mathbf{e}_R \cos \gamma_1(R, \varphi) + \mathbf{e}_n \sin \gamma_1(R, \varphi), \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{e}_R, \quad (7)$$

где $\eta(R, \varphi)$ — подлежащая определению функция.

Подставляя (6) и (7) в (4) и пренебрегая членами $\sim (2\pi R/L)^2 \ll 1$, получим уравнение для η

$$R \operatorname{tg} \eta \frac{\partial \eta}{\partial R} - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 1. \quad (8)$$

Это уравнение имеет одно тривиальное решение $\eta = -\varphi + C$ (где C — постоянная), которое не удовлетворяет граничному условию (5). Решая (8) стандартным способом, легко получить, что при $\eta \neq -\varphi + C$ его решение удовлетворяет функциональному соотношению

$$R \cos \eta = g(\eta + \varphi), \quad (9)$$

где $g(x)$ — непрерывная функция.

Согласно (5), $\eta(R_0, \varphi) = \pi/2 + \pi k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Из (9) следует, что $g(\varphi + \pi/2 + \pi k) = 0$ при произвольном φ , а тогда $g(x) \equiv 0$. Соответственно $\cos \gamma_1(R, \varphi) = 0$, $E_R = 0$, и из (3) имеем

$$f = \psi(\varphi). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (3), с точностью до членов $\sim (2\pi R/L)^2$ получим

$$\mathbf{E} = -\dot{B}_a (\psi' - R \sin \varphi) \mathbf{e}_{\parallel} - \frac{L}{2\pi R} \dot{B}_a \psi' \cdot \mathbf{e}_n. \quad (11)$$

Если решение (11) справедливо во всем объеме, то из условия отсутствия особенности E при $R \rightarrow 0$ следует, что $\psi' = 0$. Тогда $E_{\perp} < E_{\parallel}$ и ток j_{\perp} не достигает своей критической величины $j_{s\perp}$. При этом зависимость $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ (6) не применима, а данная ситуация соответствует случаю больших L , когда влияние скрутки на электродинамику мало. Существует и другая возможность. Действительно, зависимость (6) имеет особенность на линиях, где E_{\parallel} или E_{\perp} обращаются в нуль. Тогда если внутри проводника существует некая область, ограниченная кривой $R = R_1(\varphi)$, на которой E_{\parallel} или E_{\perp} равны нулю, то внутри этой области решение (11) не применимо. Решение уравнений (2), (4) здесь следует искать независимо и сшивать по непрерывности с (11) при $R = R_1$.

По аналогии с рассмотренными в [8, 9] предельными случаями заключаем, что на границе внутренней области $E_{\parallel} = 0$. Перебором возможных ситуаций легко убедиться, что только в этом случае уравнения (2) и (4) имеют решение с $E_{\perp}^2 \gg E_{\parallel}^2$. Следуя той же аналогии, можно «угадать» и решение во внутренней области. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что оно соответствует $\eta = -\varphi$ в формуле (7) и $E_{\parallel} = 0$ во всей внутренней области. Тогда из (3) и (7) имеем

$$\mathbf{E} = \frac{L}{2\pi} \dot{B}_a (\mathbf{e}_R \cos \varphi - \mathbf{e}_n \sin \varphi). \quad (12)$$

Это решение совпадает с результатом, полученным в работе [8] для частного случая $I=0$ при $L \ll 2\pi R_0 j_s / j_{s\perp}$. Так как $E_{\parallel}=0$ при $R=R_1$, то из (11) следует, что $\varphi'(\varphi)=R_1 \sin \varphi$ и во внешней области

$$E = -\dot{B}_a (R - R_1) \sin \varphi \cdot e_1 - \frac{L}{2\pi} \dot{B}_a \frac{R_1}{R} \cdot \sin \varphi. \quad (13)$$

Границу областей $R_1(\varphi)$ можно найти, вычислив магнитное поле в композите (см. ниже).

Итак, в достаточно сильно скрученном проводе сечение разбивается на две области: внутреннюю, где $E_{\parallel}=0$, и внешнюю, где $E_{\parallel} \neq 0$ и $|j_{\parallel}| \simeq j_s$. Этот результат не зависит от величины транспортного тока. Отметим еще, что, согласно (6), при $E_{\parallel}=0$ остается открытым вопрос о величине j_{\parallel} во внутренней зоне.

Провод в поперечном поле ($I=0$)

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда транспортный ток в проводе отсутствует. В работах [7-9] подобная ситуация изучена в пределе малого шага скрутки

$$a = \frac{L j_{s\perp}}{2\pi R_0 j_s} \ll 1. \quad (14)$$

Здесь мы откажемся от ограничения (14), но по-прежнему будем полагать, что $(2\pi R_0/L)^2 \ll 1$ и $j_s \gg j_{s\perp}$, поскольку эти неравенства выполняются для любого интересующего нас здесь композитного материала.

Для определения границы областей запишем уравнение Максвелла для z -компоненты магнитного поля

$$\frac{1}{R} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = \mu_0 j_R, \quad \frac{\partial B_z}{\partial R} = -\mu_0 j_{\varphi}. \quad (15)$$

Во внешней области $E_R=0$, соответственно и $j_R=0$. Компонента тока j_{φ} складывается из φ -компонент продольного и поперечного токов. При $0 < \varphi < \pi$ $j_{\varphi} = j_{s\perp} - 2\pi R j_s / L$. Поскольку $B_z=0$ при $R=R_0$, то из (15) для внешней зоны получим

$$B_z = \mu_0 \left[\frac{j_s \pi (R^2 - R_0^2)}{L} - j_{s\perp} (R - R_0) \right], \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (16)$$

Аналогично можно найти B_z и при $\pi < \varphi < 2\pi$, учитывая, что здесь j_{\parallel} меняет знак.

В том же приближении во внутренней зоне $j_R = j_{s\perp} \cos \varphi$, $j_{\varphi} = -j_{s\perp} \sin \varphi$. Тогда из (15) найдем

$$B_z = \mu_0 j_{s\perp} R \sin \varphi. \quad (17)$$

Сшивая (16) и (17) по непрерывности при $R=R_1(\varphi)$, получим

$$R_1/R_0 = a(1 - |\sin \varphi|) + \sqrt{a^2(1 - |\sin \varphi|)^2 + 1 - 2a}. \quad (18)$$

Этот результат справедлив при $a < 1/2$. Если $a=1/2$, то $R_1(\pi/2)=0$. Соответственно решение (14), имеющее особенность в нуле, в этом случае неприменимо. Следовательно, если шаг скрутки $L > \pi R_0 j_s / j_{s\perp}$, то решение уравнений электродинамики с $E_{\perp}^2 \gg E_{\parallel}^2$ отсутствует.

При $a < 1/2$ для удельной мощности потерь в проводе имеем

$$Q = \frac{\dot{B}_a^2}{\pi R_0^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_{R_1}^{R_0} R dR \left[j_s (R - R_1) \sin \varphi + j_{s\perp} \frac{LR_1}{2\pi R} \sin \varphi \right] + \frac{L}{2\pi} j_{s\perp} \int_0^{R_1} R dR \right\}. \quad (19)$$

Элементарные вычисления показывают, что, как и при $a \ll 1$ [8], во всем диапазоне $0 < a < 1/2$ с точностью $\sim 2-3\%$

$$Q = Q_0 = \frac{L}{2\pi} j_{s\perp} \dot{B}_a. \quad (20)$$

Так, при $a \ll 1$ $Q=Q_0(1+0.15a)$, а при $a \simeq 0.5$ $Q=0.98Q_0$.

Случай $a > 1/2$ следовало бы рассмотреть отдельно. Однако в этом нет необходимости. Действительно, если композит нескручен, то в области больших магнитных полей удельная мощность потерь в нем $Q_1 = 4R_0 j_s B_{\parallel} / 3\pi$ [5, 10]. При $a = 0.5$ отличие Q_1 от Q_0 составляет менее 15 %.

Итак, с уменьшением шага скрутки L потери в проводе мало меняются вплоть до порогового значения $L = L_c = \pi R_0 j_s / j_{s1}$. При $L < L_c$ потери убывают пропорционально шагу скрутки.

Провод с транспортным током в магнитном поле

Легко понять, что сверхпроводники в критическом состоянии, т. е. с ВАХ вида (6), являются системами с памятью и распределение тока и поля в них зависит от предыстории образца, например от порядка включения тока I и поля B_a . Естественно, что здесь возможны самые разнообразные комбинации. Ниже рассматривается одна из наиболее типичных ситуаций.

Пусть по проводу течет ток $I < I_s$ и пусть в начальный момент времени $B_a = 0$. Затем магнитное поле B_a начинает монотонно расти со скоростью \dot{B}_a . Найдем удельную мощность потерь в области достаточно больших полей $B_a > B_{p1}$.

Анализ ситуации в рамках модели критического состояния показывает, что в данном случае возникает распределение тока, схематически изображенное на рис. 2. При $B_a = 0$ ток течет в кольце $R_0 \sqrt{1-i} < R < R_0$, $i = I/I_s$. При включении поля в зоне 1 (рис. 2) наводится компонента поля E_{\parallel} , совпадающая по направлению с направлением транспортного тока. Соответственно здесь наводится дополнительный ток плотности $j_{\parallel} \simeq j_{s2}$, а граница области 1, в которой $j_{\parallel} \simeq j_s$, сдвигается так, что $R_1(\varphi) < R_0 \sqrt{1-i}$. Так как в этой области $E_{\parallel} \neq 0$, то электрическое поле определяется выражением (13). В области 2 транспортный ток в начальный момент времени не протекал. Кроме того, здесь $E_{\parallel} = 0$. Естественно, что в этой области $j_{\parallel} = j_0 \ll j_s$. При $y < 0$ в поле $B_a(t)$ индуцирует ток $j_{\parallel} \simeq -j_s$, направленный в сторону, противоположную транспортному току. Здесь $E_{\parallel} \neq 0$ и справедливо решение (13). Поле E_{\parallel} обращается в нуль при $R = R_1(\varphi)$, где j_{\parallel} меняет знак. В области 3, заключенной между кривыми $R_1(\varphi)$ и $R = R_0 \sqrt{1-i}$, в начальный момент времени протекал ток $j_{\parallel} \simeq j_s$, который естественно продолжает течь и после включения поля. Здесь $E_{\parallel} = 0$ и, как легко показать, поле E определяется формулой (12).

Ниже мы не будем обсуждать предельных случаев большого тока, когда область 1 достигает центра провода и малого тока, когда при $\pi < \varphi < 2\pi$ $R_1 < R_0 \sqrt{1-i}$, поскольку это заняло бы слишком много места.

Решая соответствующие уравнения Максвелла для B_z в областях 1—4 и сшивая решения на границах областей по непрерывности, получим уравнения для определения R_1 в виде

$$\frac{1+i_0}{2a} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - (1 - \sin \varphi) \frac{R_1}{R_0} + 1 - \frac{1}{2a} = C_1, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

$$\frac{1}{a} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - (1 + \sin \varphi) \frac{R_1}{R_0} + 1 - \frac{1}{2a} = C_2, \quad \pi < \varphi < 2\pi,$$

$$C_1 + C_2 = (1 + i_0)(1 - i)/2a, \quad (21)$$

где $i_0 = j_0/j_s$. Для определения постоянных i_0 , $C_{1,2}$ следовало бы решить соответствующие уравнения для компонент магнитного поля B_R и B_{φ} . Однако, как мы знаем (см. предыдущий раздел и работы [8, 9]), $i_0 = 0$ при $I = 0$ и $i_0 \ll 1$ при $I \neq 0$ и $B_a = 0$. Естественно предположить (и точный расчет это подтверждает), что $i_0 \ll 1$ в общем случае. Тогда в (21) i_0 можно не учитывать.

Величина транспортного тока в проводе равна

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0} j_{\parallel} R dR.$$

Последнее соотношение удобно переписать в виде

$$1 + i = \frac{1}{\pi i} \left[2 \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 d\varphi - \int_0^{\pi} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 d\varphi \right]. \quad (22)$$

Величина $R_1(\varphi)$ полностью определяется системой уравнений (21), (22).

Найти численное решение системы (21), (22) при $i_0 \ll 1$ не представляет труда. Однако мы не приводим здесь результатов этих простых расчетов, а ограничимся случаем сильно скрученного провода $a \ll 1$, когда можно получить

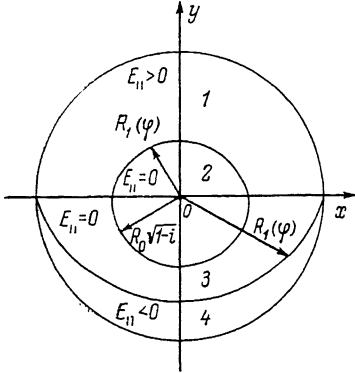


Рис. 2. Провод с током в монотонно растущем поле $B_u(t)$.

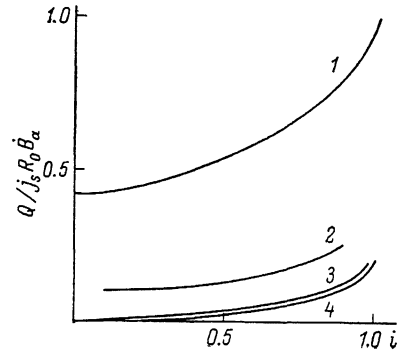


Рис. 3. Зависимость удельной мощности потерь от транспортного тока.

1 — нескрученный провод; 2—4 — проводники, скрученные с различным шагом.

аналитический результат. С точностью до членов порядка a удельная мощность потерь в такой ситуации равна

$$Q(i) = j_s \dot{B}_a R_0 \left\{ \frac{1}{3\pi} (1 - \sqrt{1-i})^2 (2 - \sqrt{1-i}) + a \left[1 + \frac{2(\pi+2)}{\pi^2} \frac{1 - \sqrt{1-i}}{\sqrt{1-i}} + \frac{2-i}{2} + \frac{2}{\pi} (1 - \sqrt{1-i}) \sqrt{1-i} \right] \right\}. \quad (23)$$

Условия $R_1(\varphi) > 0$ при $0 < \varphi < \pi$ и $R_1(\varphi) > R_0 \sqrt{1-i}$ при $\pi < \varphi < 2\pi$ сводятся к неравенствам

$$1 - i > a, \quad i > a,$$

которые и определяют область применимости формулы (23) по параметрам i и a . Если же $1 - i \leq a$, то происходит перестройка распределения тока и поля E , при которой E_{\parallel} становится больше или порядка E_{\perp} . Соответственно влияние скрутки на потери должно резко упасть.

В интересующей нас области достаточно больших магнитных полей потери в нескрученном проводе с транспортным током определяются уравнениями [11]

$$Q_0(i) = j_s \dot{B}_a R_0 \left[\frac{4}{3\pi} (1 - y_0^2)^{3/2} + i y_0 \right],$$

$$i = \frac{2}{\pi} [\arcsin y_0 + y_0 \sqrt{1 - y_0^2}]. \quad (24)$$

На рис. 3 для сравнения показаны зависимости $Q_0(i)$ и $Q(i)$ при $a=0.1$ (2), 0.01 (3) и 0 (4). Видно, что во всей области токов, таких что $1 - i > a$, скрутка снижает потери в несколько раз.

- [1] *Пан В. М., Прохоров В. Г., Шпигель А. С.* Металлофизика сверхпроводников. Киев: Наукова думка, 1984. 189 с.
- [2] *Bevk J., Tinkham M., Habbal F.* et al. IEEE Trans. Magn., 1981, v. 17, N 1, p. 235—242.
- [3] *Carr W. J.* J. Appl. Phys., 1983, v. 54, N 10, p. 5911—5916.
- [4] *Rakhmanov A. L.* J. Phys. D, 1985, v. 18, N 5, p. 919—924.
- [5] *Carr W. J.* AC loss and macroscopic theory of superconductors. New York: Gordon and Breach, 1983. 274 p.
- [6] *Braginski A. I., Wagner G. P.* IEEE Trans. Magn., 1981, v. 17, N 1, p. 242—247.
- [7] *Carr W. J.* J. Appl. Phys., 1983, v. 54, N 11, p. 6549—6552.
- [8] *Rakhmanov A. L.* J. Phys. D, 1986, v. 19, N 2, p. 283—290.
- [9] *Рахманов А. Л.* ЖТФ, 1987, т. 57, № 8, с. 1623—1631.
- [10] *Zenkevitch V. B., Romanjuk A. S., Zheltov V. V.* Cryogenics, 1980, v. 20, N 12, p. 703—710.
- [11] *Зенкевич В. Б., Желтов В. В., Романюк А. С.* Препринт ИВТАН № 4-114. М., 1983. 33 с.

Институт высоких температур
АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
26 декабря 1986 г.