

Очевидно, эти результаты, полученные для простейшей модели, качественно верны и для реальных приборов. Неравенство кинетических коэффициентов электронов и дырок может лишь незначительно изменить численный коэффициент в (8) и (9), а неоднородность электрического поля по толщине ОПЗ легко учесть, заменяя величину w на толщину эффективного слоя умножения.

Сильное увеличение поперечного диффузионного расплывания носителей заряда указывает на необходимость учета этого эффекта при анализе умножения (в частности, при выводе критерия пробоя) в полупроводниковых приборах с неоднородной ОПЗ, т. е. практически во всех реальных приборах. Этот же эффект должен определять пространственную разрешающую способность метода наведенного тока при анализе однородности лавинного пробоя. Наконец, гигантское усиление бокового дрейфа в магнитном поле открывает возможность наблюдения новых магнитоэлектрических явлений при пробое полупроводниковых приборов в сравнительно слабых магнитных полях (из (9) следует, что $L_H > w$ при $M \approx 10^3$ и $B \gtrsim 3$ Тл), когда квадратичные по полю эффекты типа магнитосопротивления еще незаметны. Возможно, например, что именно рассмотренным эффектом объясняется изменение напряжения поверхностного пробоя германиевых диодов на $\pm 25\%$ в зависимости от ориентации магнитного поля с $B = 1.5$ Тл, наблюдавшееся в работе [2].

Литература

- [1] *Зи С.* Физика полупроводниковых приборов. М.: Мир, 1984, т. 1. 455 с.
 [2] *Анупольд А. Ю., Горюнов М. Н., Дмитриева А. И.* РИЭ, 1968, т. 13, № 6, с. 1079—1084.

Всесоюзный электротехнический институт им. В. И. Ленина
 Москва

Поступило в Редакцию
 1 февраля 1986 г.

К ДВУХСТОРОННЕЙ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

М. В. Давидович

При численном решении краевых задач электростатики особое значение приобретают оценки погрешностей находимых решений. Применение вариационных принципов позволяет во многих практически важных случаях свести нахождение искомых параметров задачи к получению стационарных значений некоторых функционалов [1-6], а определение погрешностей — к их двусторонним оценкам [1-3]. Для получения таких оценок исходную задачу необходимо решать двумя встречными один другому методами (определяющими искомый параметр с недостатком и избытком), реализация которых сопряжена с необходимостью строить полные системы функций, в одном случае удовлетворяющих краевым условиям (в методе Рунта), а в другом — уравнению Эйлера (в методе Трефтца) либо краевым условиям преобразования Фридрихса [6].

В настоящей работе предлагается способ оценки погрешности функционалов электростатики при нахождении их стационарных значений только методом Трефтца. Получены также соответствующие оценки для функционалов швингеревского типа.

Рассмотрим квадратичный функционал

$$\Lambda(u) = \int_{\Omega} \epsilon \nabla u \nabla u^* d\Omega, \quad (1)$$

определенный для функций, непрерывно дифференцируемых в $M+1$ -связной области Ω с поверхностью $S = S_0 + S_1 + \dots + S_M$, заполненной средой со скалярной проницаемостью ϵ . Пусть требуется определить матрицу частичных емкостей системы M металлических тел с поверхностями S_n , ограниченной поверхностью экрана S_0 (необязательно замкнутой). Искомые $M(M+1)/2$ частичные емкости C_{mn} можно найти, решая, например, краевые задачи

с комбинацией всевозможных граничных условий, когда потенциал относительно экрана равен единице на некоторых проводниках и нулю на остальных (таких комбинаций тоже $M(M+1)/2$). Согласно методу Трефтца, при $\varepsilon=1$ в классе действительных функций имеем [1]

$$\Delta\Lambda = \Lambda(u_0) - \Lambda(u) = \oint_S (u_0 - u) \frac{\partial u_0}{\partial n} dS \geq 0, \quad (2)$$

где u — приближенное, а u_0 — точное решение задачи (везде далее точные значения будем снабжать индексом «0»). Обозначим $\eta = \max_{r \in S=S'+S''} |u_0 - u|$ при $r \in S=S'+S''$, где r — радиус-вектор; S' , S'' — части поверхности, на которых соответственно $u_0=1$ и $u_0=0$. Очевидно, что заряды на поверхностях S' и S'' связаны соотношением $Q'_0 = -Q''_0 = Q_0$. Из (2) в силу знакопостоянства производной по нормали $\partial u_0/\partial n$ на каждой из поверхностей S' и S'' следует

$$\Delta\Lambda \leq \oint_S |u_0 - u| \left| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right| dS \leq 2Q_0\eta.$$

Поскольку $Q_0 = \Lambda(u_0)$, найдем оценку (при $2\eta < 1$)

$$\delta = \Delta\Lambda/\Lambda \leq 2\eta(1 - 2\eta)^{-1}, \quad (3)$$

дающую верхнюю границу для $\Lambda(u_0)$. В силу равномерной сходимости метода Трефтца [1] величина η стремится к нулю с ростом числа пробных базисных функций, а ее значение находится с любой требуемой точностью после решения краевой задачи практически без заметного увеличения объема вычислений. Если ε непрерывна, за исключением, быть может, поверхности $\tilde{S}^{(\pm)}$, на которой она меняется скачком, то, как нетрудно видеть, оценка (3) справедлива, если пробные функции u_k удовлетворяют уравнению Эйлера

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} u_k = 0$$

и граничным условиям для потенциала на $\tilde{S}^{(\pm)}$. Представим потенциал в виде

$$u(r) = \oint_{S-S_0} G(r|r') \sigma(r') dS', \quad (4)$$

где $G(r|r')$ — функция Грина исходной среды в экране S_0 (при отсутствии проводников S_n). Для простейших (в частности, полосковых) структур с прямоугольными границами она легко находится методом Фурье (см., например, [6, 7]). Разложения поверхностной плотности заряда σ по соответствующим базисам определяют разложения потенциала по функциям с вышеперечисленными свойствами.

Если решать уравнение (4), например, методом коллокаций, то для полной емкости поверхности S' также справедлива оценка (3), так как (в силу формулы Грина)

$$Q_0 - Q = \oint_{S'} \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \oint_S (u_0 - u) \frac{\partial u_0}{\partial n} dS.$$

Соотношение (3) справедливо и при представлении $u(r)$ в виде суммы потенциалов, расположенных внутри поверхностей S_n фиктивных зарядов, которые целесообразно определять методом коллокаций, так как такой путь сразу дает для них линейную систему уравнений и не требует вычисления интегралов.

Аналогичные оценки применимы и к зарядовым функционалам, получающимся по известной методике работы [1] для интегрального оператора уравнения (4) (или подстановкой (4) в функционалы типа (1) с естественными граничными условиями на поверхностях S_n) с последующим исключением зависимости от амплитуды пробных функций. Рассмотрим, например, положительный функционал

$$C = \frac{\left| \oint_{S_1} \sigma(r) dS \right|^2}{\oint_{S_1} \oint_{S_1} \sigma^*(r) \cdot G(r|r') \sigma(r') dS dS'}, \quad (5)$$

следующий из (4) и определяющий емкость одиночного проводника ($M=1$) в экране [6]. Будем реализовать его стационарное значение в классе положительных функций, удовлетворяющих условию

$$\oint_{S_1} \sigma(r) dS = 1. \quad (6)$$

При разложении σ по функциям σ_k с коэффициентами X_k ($k=1, 2, \dots, N$) получим алгебраическую формулировку задачи

$$C = \left(\sum_{k=1}^N P_k X_k \right)^2 \left(\sum_{k,l=1}^N R_{kl} X_k X_l \right)^{-1},$$

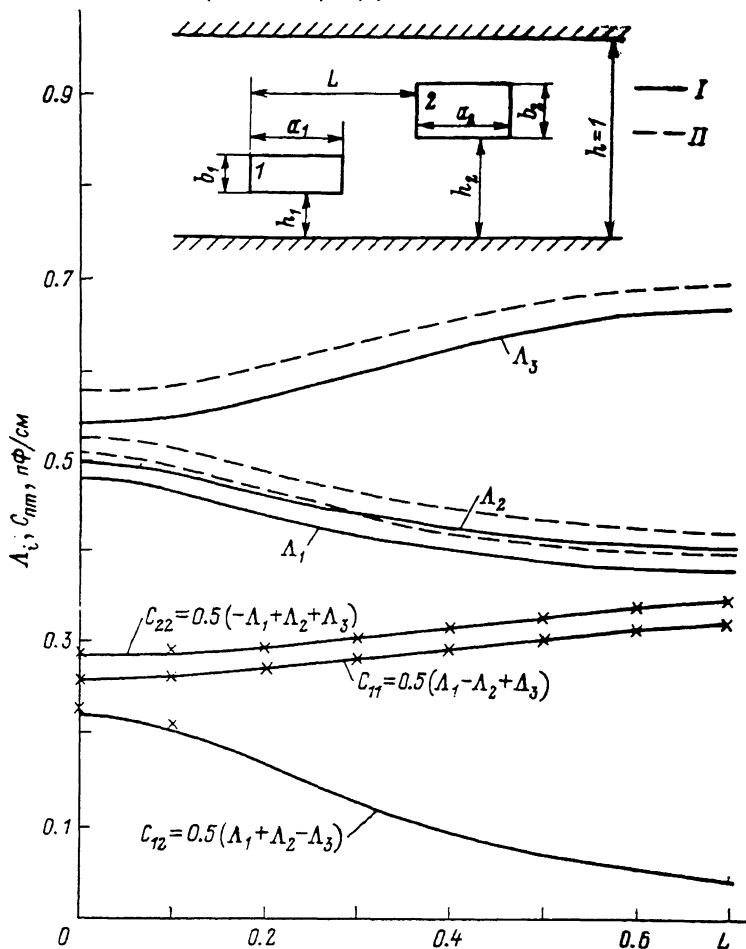


Рис. 1. Результаты вычисления (I) с оценкой верхних границ функционалов (II) при $a_1 = a_2 = h_1 = 0.25$, $b_1 = 0.15$, $b_2 = 0.2$, $h_2 = 0.55$.

Крестики — измерения в воздушной ванне.

которая с условием (6) приводит к линейной системе уравнений

$$\sum_{k=1}^N P_k X_k = 1,$$

$$\sum_{k=1}^N R_{lk} X_k - \frac{1}{C} P_l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

определяющей C с недостатком. Используя формулу Грина и условие (6), найдем

$$\frac{C_0 - C}{C_0 C} = \oint_{S_1} u (\sigma - \sigma_0) dS = \oint_{S_1} (u - C^{-1}) (\sigma - \sigma_0) dS.$$

Обозначив $\eta' = \max |u - C^{-1}|$ при $r \in S_1$, получим

$$\frac{C_0 - C}{C_0 C} \leq \eta' \oint_{S_1} |\sigma - \sigma_0| dS \leq \eta' \oint_{S_1} (\sigma + \sigma_0) dS = 2\eta',$$

откуда (при $2C\eta' < 1$) имеем оценку

$$\delta' = (C_0 - C) C^{-1} \leq 2C\eta' (1 - 2C\eta')^{-1}. \quad (7)$$

На рис. 1, 2 приведены результаты вычислений частичных емкостей с оценками погрешностей для двухпроводной прямоугольной линии в экране и двухпроводной экранированной микрополосковой линии. В первом случае использовался метод Трефтца с базисом в виде потенциалов нитей, равномерно расположенных внутри проводников на контурах, подобных S_1 и S_2 . В вычислениях использовалось 32 базисные функции. Контурные интегралы вычислялись численно. Функционалы Δ_i соответствуют граничным условиям с единичным

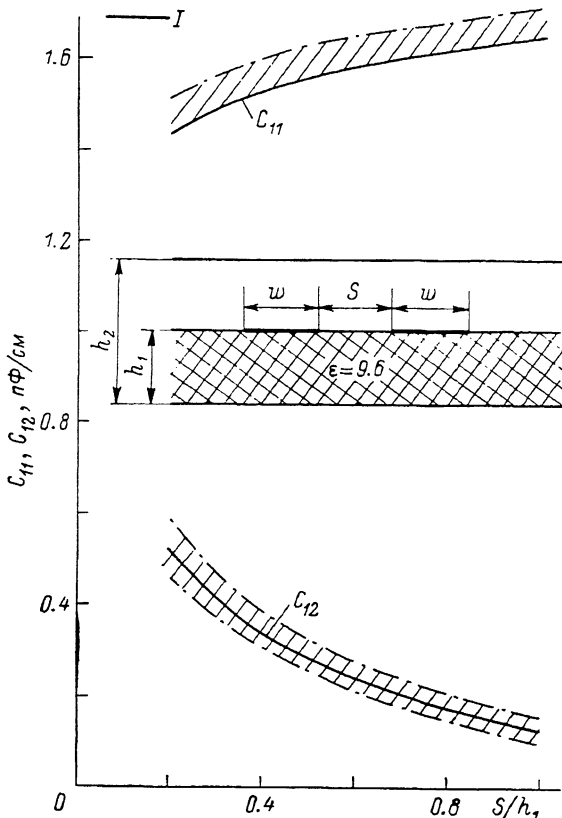


Рис. 2. Результаты вычисления (I) с оценкой погрешности для частичных емкостей на единицу длины (I).

Точные значения лежат в заштрихованных областях. $W/h_1=1$, $h_2/h_1=2$.

потенциалом на первом, втором и обоих проводниках соответственно. Во втором примере решалось уравнение (4) методом коллокаций с разбиением поверхностей полосков на площадки. Используемая функция Грина приведена в работе [7]. В качестве граничных условий рассматривались режимы четного и нечетного возбуждения.

В заключение можно отметить следующее. Оценки погрешностей типа (3), (7) с небольшой модификацией могут быть распространены на другие комбинации граничных условий. Они эффективны при хорошей точности определения приближенного решения (η , $C\eta' \ll 1$). Так, уменьшение числа пробных базисных функций в первом примере до 20 увеличивает погрешность (3) почти в три раза, тогда как значения функционалов уменьшаются лишь в четвертой значащей цифре. В случае оценок зарядовых функционалов существует выбор базиса s_k , от которого зависит характер сходимости. Погрешности будут стремиться к нулю при равномерной сходимости потенциала.

Подчеркнем, что полученные оценки (3), (7) являются верхними границами истинных относительных погрешностей. Определяемые с помощью численной сходимости «погрешности» требуют дополнительной затраты машинного времени и не дают гарантированных результатов, хотя могут быть меньше вышеприведенных.

- [1] Миллин С. Г. Прямые методы в математической физике. М.: ГИТТЛ, 1959. 428 с.
 [2] Куликов Э. Л., Левина Н. Н. РИЭ, 1970, т. 15, № 5, с. 930—933.
 [3] Куликов Э. Л., Левина Н. Н. РИЭ, 1971, т. 16, № 11, с. 2194—2198.
 [4] Иванов В. Н. РИЭ, 1960, т. 5, № 2, с. 224—228.
 [5] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951, т. 1. 476 с.
 [6] Gish D. L., Graham O. IEEE Trans. MTT, 1970, v. 18, N 3, p. 131—148.
 [7] Weiss J. A. Adv. Microwaves, 1974, v. 8, p. 295—320.

Поступило в Редакцию
 1 октября 1985 г.
 В окончательной редакции
 25 июля 1987 г.

УДК 621.315.592

Журнал технической физики, т. 58, в. 1, 1988

БИСТАБИЛЬНЫЙ ОПТИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ НА ОСНОВЕ СЛОИСТЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ $\text{GaSe}_x\text{Te}_{1-x}$

Г. М. Мамедов, Э. П. Халилова

Впервые явление оптической бистабильности в плоскопараллельной пластине селенида галлия было зарегистрировано в [1-3], где указывалось, что бистабильное поведение плоскопараллельных пластин в области экситонного резонанса связано с эффектом экранирования экситонов при возбуждении большой плотности свободных носителей. Кроме полностью оптических БОУ (бистабильных оптических устройств, свойствами которых при лазерном возбуждении обладают пластины GaSe, существуют гибридные БОУ, относящиеся к разряду оптоэлектронных устройств. Семейство таких БОУ уже достаточно многочисленно [4]. Главной их чертой является удачное сочетание интерферометра Фабри-Перо с другими полупроводниковыми элементами. Полупроводниковые пластины слоистых кристаллов обладают целым рядом нетривиальных свойств, таких как спектральные и температурные осцилляции и колебания фототока; особенности вольт-амперных характеристик (ВАХ), обусловленные интерференционным эффектом, и т. д. [5, 6]. Сочетание указанных свойств позволило предложить новое гибридное БОУ на основе слоистых кристаллов, способное работать в достаточно широкой спектральной области.

В основу работы нового гибридного БОУ положены следующие соображения. В сильных электрических полях при пропускании фототока через образец, изготовленный из слоистого кристалла, можно реализовать ситуацию, в которой термополевой эффект приводит к изменению поглощаемого внутри пластины света, а тем самым и интенсивности проходящего света. При этом могут иметь место отрицательное дифференциальное сопротивление S - или N -типа и переключение в низкоомное состояние [7]. В низкоомном состоянии изменение световой мощности, проходящей через образец, будет линейно зависеть от интенсивности падающего света. Многократные эксперименты подтвердили возможность создания таких гибридных БОУ на основе слоистых кристаллов GaSe, GaTe, $\text{GaSe}_x\text{Te}_{1-x}$.

Для экспериментов изготавливались образцы двух типов: 1) с параллельными естественными гранями толщиной 8—30 мкм, чтобы условие $nL = k\lambda$ выполнялось; 2) с непараллельными гранями (угол наклона граней достигал 10°). В обоих случаях разница между энергией экситонного перехода $E_{\text{экс}}$ в кристаллах GaSe, $\text{GaSe}_{0.95}\text{Te}_{0.05}$ и энергией падающего кванта $h\nu$ для лазерного излучения $\lambda = 0.63$ мкм была достаточно мала, поскольку максимумы экситонного поглощения данных кристаллов находятся при $\lambda = 0.619$ и 0.626 мкм соответственно при резких длинноволновых краях.

На рис. 1 приведены ВАХ резонаторной фотопластины из $\text{GaSe}_{0.95}\text{Te}_{0.05}\langle\text{Ge}\rangle$ при интенсивностях падающего света, равных 3 (1), 1.8 (2), 1.5 мВт (3) и 0 (4). При $I \geq 1.5$ мВт ВАХ содержит падающие участки. Аналогичный вид имеют ВАХ образцов, грани которых непараллельны. Как видно из рис. 1, I вначале с ростом электрического поля фототок резко возрастает, что связано с фотоактивным распадом экситонов и термополевым эффектом, обуславливающим сдвиг края поглощения. Изменяется интенсивность света на выходе образца. Дальнейший рост напряжения на образце приводит к уходу от резонансного экситонного