

УДК 536.24.02

## ОПТИМАЛЬНАЯ ФОКУСИРОВКА ТЕПЛОвого ПОТОКА НЕОДНОРОДНОЙ ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДОЙ (ЗАДАЧА О «ТЕРМОЛИНЗЕ»)

Л. В. Гибянский, К. А. Лурье, А. В. Черкаев

Работа посвящена оптимальному проектированию теплопроводящего тела, изготовленного из двух материалов с различными коэффициентами теплопроводности. Требуется так распределить эти материалы, чтобы максимизировать или минимизировать тепловой поток через «окно» на границе тела. Необходимые условия оптимальности показывают, что наряду с зонами, занятыми чистыми материалами (фазами), в оптимальном проекте выделяются области, заполненные анизотропным композитным материалом, составленным из чередующихся тонких слоев исходных фаз. Результаты переносятся на задачи оптимального проектирования с другими функционалами цели, на задачи оптимального проектирования для сред с поглощением. Приводятся и обсуждаются численные результаты.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается плоская прямоугольная область  $S = \{(x, y) : x \in [-1, 1], y \in [-a, a]\}$ . На ее верхнюю границу  $\Gamma_1$  ( $y = a$ ) падает однородный тепловой поток  $\mathbf{q}$  единичной интенсивности; другие части границы либо теплоизолированы (т. е. поток тепла через эту часть границы, которую мы будем обозначать  $\Gamma_2$ , равен нулю), либо поддерживаются при постоянной температуре (эту часть будем обозначать  $\Gamma_3$ ). Область заполнена двумя изотропными материалами с различными коэффициентами теплопроводности  $u_-$  и  $u_+$  соответственно ( $0 < u_- < u_+ < \infty$ ).

Температурное поле может быть найдено из краевой задачи

$$\mathbf{q} = -D(x, y) \cdot \nabla T, \quad \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (1)$$

$$D(x, y) = [u_- \chi_-(x, y) + u_+ \chi_+(x, y)] E, \quad (2)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -1 \text{ на } \Gamma_1, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad T = 0 \text{ на } \Gamma_3,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе;  $\chi_-(x, y)$  и  $\chi_+(x, y)$  — характеристические функции областей  $S_-$  и  $S_+$ , занятых соответственно материалами  $u_-$  и  $u_+$

$$\chi_{\mp}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in S_{\mp}, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin S_{\mp}. \end{cases} \quad (3)$$

Эти материалы необходимо распределить по области так, чтобы максимизировать функционал

$$I = \int_{\Gamma_3} \rho(\Gamma) \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (4)$$

Здесь  $\rho(\Gamma)$  — некоторая весовая функция. В частности, если взять эту функцию в виде

$$\rho(\Gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in \Gamma_0 \subset \Gamma_3, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \Gamma_0. \end{cases} \quad (5)$$

то задача сведется к максимизации теплового потока через «окно»  $\Gamma_0$  на границе области.

Таким образом, рассматривается проблема оптимального распределения материальных констант по области, занятой теплопроводящим телом; известно, что в задачах оптимизации такого типа возникают многомерные скользящие режимы управления: оптимальная граница между областями, занятыми материалами  $u_-$  и  $u_+$ , является [1] обобщенной кривой, плотно заполняющей некоторой области ненулевой меры.

Это явление может быть пояснено следующими физическими соображениями.

Чтобы получить требуемое температурное поле, необходимо создать благоприятные условия для прохождения теплового потока максимальной интенсивности в некотором предпочтительном направлении и уменьшить этот поток в перпендикулярном направлении; все это должно быть сделано в каждой точке области. Следовательно, теплопроводность оптимальной среды должна в каждой точке области зависеть от направления, т. е. должна быть тензорной функцией координат, и сам материал должен быть анизотропным. В то же время среди исходных материалов (фаз) нет анизотропных. Единственно возможный путь — создать требуемые материалы искусственно, конструируя некоторый составленный из исходных фаз композит, т. е. материал с микроструктурой. Простейший из таких композитов — слоистый. Его эффективные коэффициенты теплопроводности в направлениях вдоль и поперек слоев отличаются друг от друга. Отметим, что рассматриваемая задача не содержит параметров, которые могли бы ограничить размер включений одного материала в другой, например ширину чередующихся слоев в слоистом композите. Поэтому естественно ожидать, что оптимальное значение функционала будет достигаться на таком разбиении области на части, что зоны, занятые каждой из исходных фаз, будут чередоваться бесконечно часто. Именно такое поведение управления подразумевается под многомерным скользящим режимом; области, в которых линия раздела фаз представляет собой обобщенную кривую, полностью соответствуют интуитивной идее о среде с микроструктурой.

Вообще говоря, вид оптимальной микроструктуры также подлежит определению, но для данной задачи известно [1, 2], что оптимальный проект будет составлен только из слоистых (самых анизотропных) композитов.

Возвращаясь к исходной задаче, рассмотрим эффективный тензор теплопроводности слоистого композита. Он задается хорошо известными формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0 &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \\ \lambda_1 &= (m_1 u_-^{-1} + m_2 u_+^{-1})^{-1}, \quad \lambda_2 = m_1 u_- + m_2 u_+, \\ m_1 + m_2 &= 1, \quad 0 \leq m_1 \leq 1, \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные числа тензора  $\mathbf{D}_0$ ;  $m_1, m_2$  — концентрации в композите материалов  $u_-$  и  $u_+$ ;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — единичные векторы нормали и касательной к слоям;  $\varphi$  — угол между  $\mathbf{e}_1$  и осью  $x$ . Исключая концентрации  $m_1$  и  $m_2$  из (6), получим, что собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  связаны соотношением

$$u_- \leq \lambda_1 = \frac{u_- u_+}{u_- + u_+ - \lambda_2} \leq u_+. \quad (7)$$

Поле температур в композитной области определится из уравнения (1), в котором  $\mathbf{D}$  должен быть заменен на  $\mathbf{D}_0$ .

Теперь, чтобы максимизировать значение функционала, нужно подобрать функции  $\lambda_2(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  (значение  $\lambda_1(x, y)$  найдется из (7)); иначе говоря следует в каждой точке рассматриваемой области определить оптимальные значения концентраций исходных материалов в слоистом композите и направление слоев.

## 2. Необходимые условия оптимальности

Расширенный функционал [3] задачи имеет вид

$$I = \int_{\Gamma_3} \rho(\Gamma) \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \iint_S \mu \nabla \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla T dS. \quad (8)$$

Варьируя  $J$  по  $T$  и учитывая граничные условия, получим сопряженную задачу для множителя Лагранжа  $\mu$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \nabla \mu = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \nabla \mu = 0 \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2; \quad \mu = \rho(\Gamma) \text{ на } \Gamma_3. \quad (10)$$

**З а м е ч а н и е.** Сопряженная задача (9), (10) описывает поле «температуры»  $\mu$  внутри области, нижняя грань которой ( $y = -a$ ) поддерживается при «температуре»  $\rho(\Gamma)$ . Эта задача отличается от исходной, связанной с температурой  $T$ ; таким образом, имеем дело с несамосопряженной задачей оптимального проектирования.

Необходимые условия стационарности по управлениям  $\lambda_2(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  имеют вид

$$\nabla \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial \varphi} \cdot \nabla T = 0; \quad (11)$$

$$\nabla \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial \lambda_2} \cdot \nabla T \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \lambda_2 = u_-, \\ = 0, & \text{если } u_- < \lambda_2 < u_+, \\ \leq 0, & \text{если } \lambda_2 = u_+. \end{cases} \quad (12)$$

Разложим векторы  $\nabla T$ ,  $\nabla \mu$  по собственным ортам  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  тензора  $\mathbf{D}_0$  (см. (6))

$$\nabla T = |\nabla T|(\mathbf{e}_1 \cos \psi + \mathbf{e}_2 \sin \psi), \quad \nabla \mu = |\nabla \mu|(\mathbf{e}_1 \cos \eta + \mathbf{e}_2 \sin \eta), \quad (13)$$

$\psi$  и  $\eta$  — углы, образуемые векторами  $\nabla T$ ,  $\nabla \mu$  с осью  $\mathbf{e}_1$ .

Из уравнения (11) получим

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \sin(\psi + \eta) = 0. \quad (14)$$

Отсюда для анизотропного режима управления ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) имеем  $\psi = -\eta + \pi k$ ,  $k=0, 1, \dots$ , что означает, что одна из главных осей тензора  $\mathbf{D}_0$  является биссектрисой угла между векторами  $\nabla T$  и  $\nabla \mu$  [3]. Условие Вейерштрасса [3] показывает, что для рассматриваемого случая оптимален режим  $\psi = -\eta$ .

Из уравнения (12), учитывая (13), (14), получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = u_+, & \text{ если } \operatorname{tg}^2 \psi > u_+/u_-, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = u_-, & \text{ если } \operatorname{tg}^2 \psi < u_-/u_+, \\ \lambda_1^2/(u_+u_-) = \operatorname{tg}^2 \psi, & \text{ если } u_-/u_+ \leq \operatorname{tg}^2 \psi \leq u_+/u_-. \end{aligned} \quad (15)$$

Оптимальное распределение материалов, таким образом, определяется углом между градиентами  $\nabla T$  и  $\nabla \mu$ . Плохо проводящий материал  $u_-$  располагается в тех зонах, где этот угол мал и векторы  $\nabla T$  и  $\nabla \mu$  почти сонаправлены; хорошо проводящий материал  $u_+$  заполняет те зоны, в которых градиенты  $\nabla T$  и  $\nabla \mu$  почти антипараллельны, а анизотропные слоистые композиты оптимальны в тех областях, где эти векторы почти перпендикулярны. В этих последних зонах нормаль к слоям направлена по биссектрисе угла между  $\nabla T$  и  $\nabla \mu$ ; оптимальные слоистые композиты стремятся надлежащим образом повернуть вектор теплового потока.

### 3. Численные результаты

Для получения решения задачи оптимизации была использована следующая итерационная схема.

По известному из предыдущей итерации распределению  $\lambda_2^{(k)}(x, y)$ ,  $\varphi^{(k)}(x, y)$  рассчитывались функции  $T^{(k)}(x, y)$ ,  $\mu^{(k)}(x, y)$ . Последние функции использовались для расчета следующего приближения  $\lambda_2^{(k+1)}$ ,  $\varphi^{(k+1)}$  с использованием уравнений (11), (12). Сходимость контролировалась по значению  $I^{(k)}$  функционала на  $k$ -й итерации, и для окончания процесса использовался критерий

$$|(I^{(k+1)} - I^{(k)})/I^{(k)}| \leq \varepsilon = 0.001.$$

Как правило, для сходимости процесса было достаточно 10—12 итераций. Численные результаты представлены на рис. 1—5. Будем рассматривать следующие типы граничных условий.

а. Пусть грани  $x=-1$ ,  $x=1$  теплоизолированы, а нижняя грань  $y=-a$  поддерживается при нулевой температуре. Общий тепловой поток, падающий на верхнюю границу области, фокусируется в «окне» на нижней грани. На рис. 1, а, б показано распределение векторных линий  $\nabla T$  (см. (1), (2)) и  $\nabla \mu$

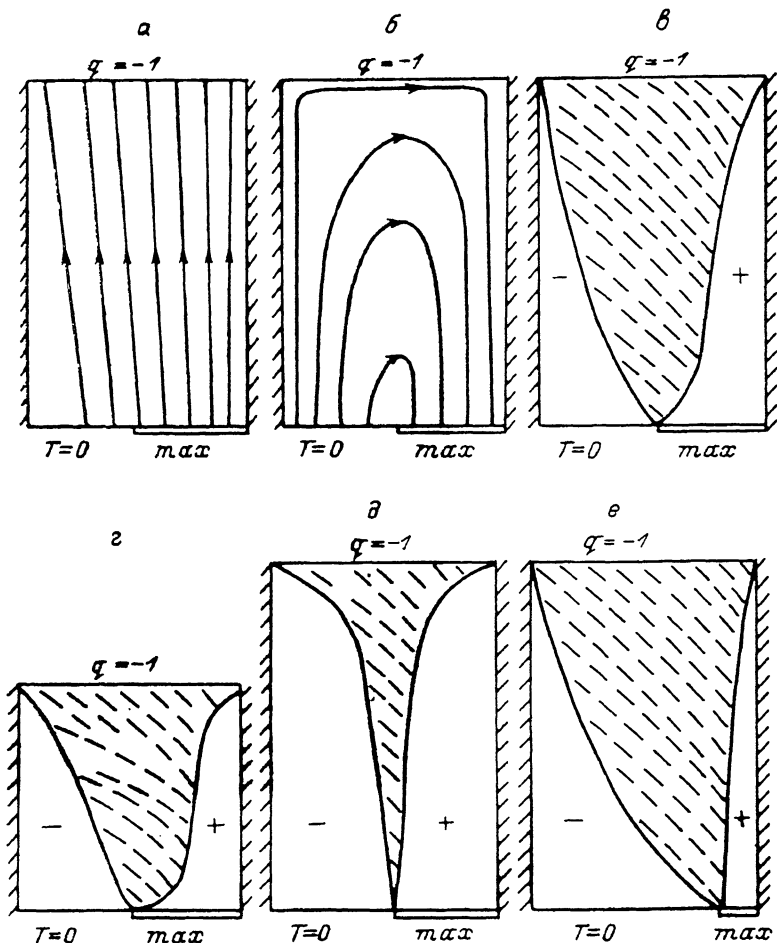


Рис. 1. а — векторные линии  $\nabla T$ ; б — векторные линии  $\nabla \mu$ ; в —  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 1.89$ ,  $I_0 = 1$ ; г —  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1$ ,  $I = 1.79$ ,  $I_0 = 1$ ; д —  $u_+/u_- = 2$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 1.53$ ,  $I_0 = 1$ ; е —  $u_+/u_- = 2$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 1.27$ ,  $I_0 = 0.33$ .

(см. (9), (10)). Все векторные линии  $\nabla T$  начинаются на нижней грани и упираются в верхнюю грань; линии  $\nabla \mu$  начинаются на той части нижней грани, где  $\rho = 0$ , и идут к той части, где  $\rho = 1$ . Внешние векторные линии  $\nabla \mu$  следуют вдоль левой боковой и верхней грани и возвращаются на нижнюю грань по правой боковой грани (рис. 1, б).

Легко видеть, что левая часть рассматриваемой области занята материалом  $u_-$ , так как там угол  $2\psi$  между векторами  $\nabla T$  и  $\nabla \mu$  близок к нулю; в правой части рассматриваемой области  $\nabla T$  и  $\nabla \mu$  почти антипараллельны и эта зона занята материалом  $u_+$ . Области  $u_-$  и  $u_+$  контактируют на нижней грани; эти области разделены анизотропной зоной, где угол  $\psi$  близок к  $\pi/4$ ; последняя зона захватывает всю верхнюю грань.

Внутри анизотропной зоны оптимальны слоистые композиты; угол наклона слоев равен  $-\pi/4$  вдоль верхней грани области; слои направлены вдоль штриховых линий (рис. 1, в). Концентрация материала  $u_-$  в слоях плавно меняется от 1 на границе зоны материала  $u_-$  до 0 на границе зоны материала  $u_+$ .

Фокусирующее действие «термолинзы» определяется следующими факторами: (i) тепловой поток вытесняется из зоны плохо проводящего материала  $u_-$ ; (ii) анизотропная зона поворачивает векторные линии  $\nabla T$  в требуемом направлении благодаря преломляющему действию слоев, наклоненных под соответствующим углом; (iii) зона, заполненная хорошо проводящим материалом  $u_+$ , притягивает и концентрирует линии  $\nabla T$ .

На рис. 1, *а—е* показаны оптимальные проекты «термолинзы» и значения функционала  $I$  для различных значений параметров (значение функционала, соответствующее изотропному телу, обозначено  $I_0$ ).

Проект, показанный на рис. 1, *г* отличается от «базового» проекта рис. 1, *а* меньшей длиной фокусирующего элемента. Рис. 1, *д* представляет проект,

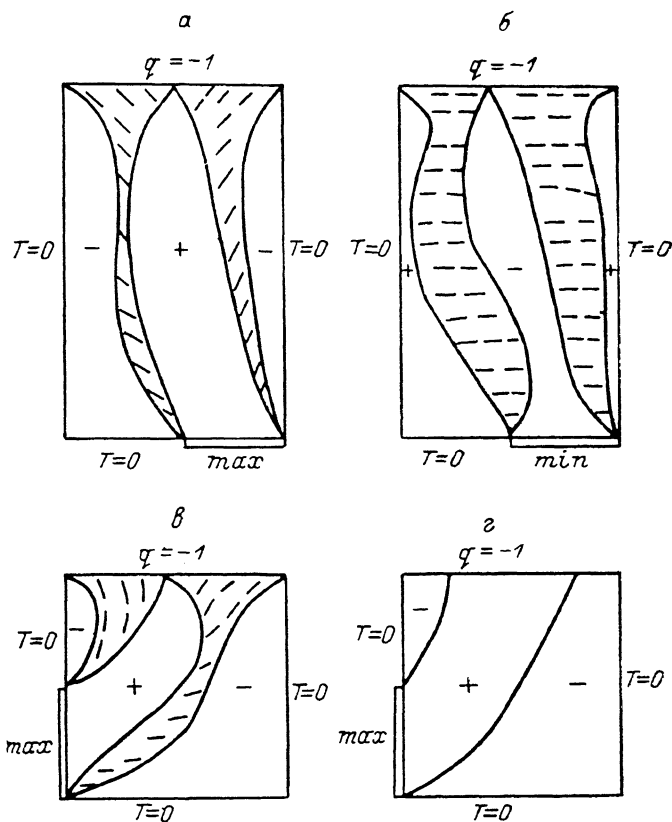


Рис. 2. *а* —  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 0.34$ ; *б* —  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 8 \cdot 10^{-5}$ ; *в* —  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1$ ,  $I = 0.727$ ,  $I_0 = 0.11$ ; *г* —  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1$ ,  $I = 0.639$ ,  $I_0 = 0.11$ .

изготовленный из материалов, для которых отношение  $u_+/u_-$  в 5 раз меньше, чем для базового варианта. Рис. 1, *е* показывает проект «термолинзы», имеющей в 4 раза меньшую, чем на рис. 1, *а*, ширину «окна», через которое требуется пропустить тепловой поток.

Так как общий тепловой поток через нижнюю грань задан, то задача максимизации его части, проходящей через «окно», совпадает с задачей минимизации теплового потока, проходящего через оставшуюся часть нижней грани.

б. Пусть боковые грани и нижняя грань поддерживаются при нулевой температуре.

Представлены численные решения задач максимизации теплового потока через окно, расположенное либо на нижней грани (рис. 2, *а*), либо на боковой грани (рис. 2, *в*). Плохо проводящий материал  $u_-$  оказывается в любом случае примыкающим к той части границы, на которой поддерживается нулевая температура, кроме, конечно, самого «окна», к которому, наоборот, примыкает зона хорошо проводящего материала  $u_+$ . Плохо проводящий материал умень-

шает потери тепла через границу, а хорошо проводящий уменьшает тепловое сопротивление в предпочтительном направлении.

Рис. 2, б представляет решение задачи минимизации теплового потока через «окно». В этом проекте тепло отводится как через боковые грани, так и через часть нижней грани; к этой части границы примыкает хорошо проводящий материал  $u_+$ .

На рис. 2, в показан оптимальный проект тела, осуществляющего поворот теплового потока: «окно», поток через которое максимизируется, расположено на боковой грани; этот проект дает значение функционала, в 8 раз превышающее соответствующее значение для однородного тела, изготовленного из изотропного материала.

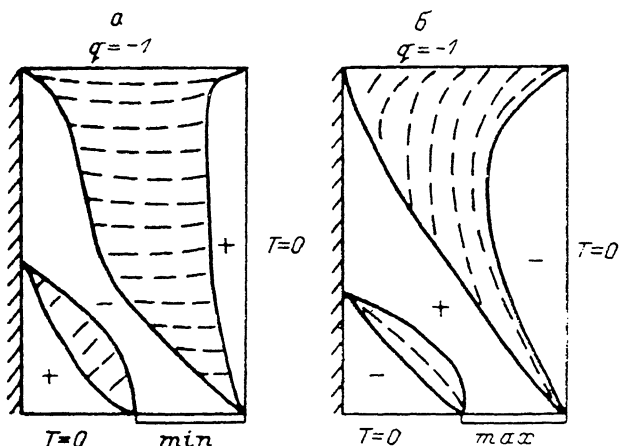


Рис. 3. а —  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 0.72$ ,  $I_0 = 0.08$ ; б —  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 1.3 \cdot 10^{-3}$ ,  $I_0 = 0.08$ .

Сравнение с «квазиоптимальным» проектом (рис. 2, з) дает выигрыш по функционалу на 20 %. «Квазиоптимальный» проект был получен на основе оптимального исключением зон, занятых композитным материалом: в тех точках, где значение концентрации в композите материала  $u_-$  превышало 0.5, ставился материал  $u_-$ ; оставшиеся зоны были заполнены материалом  $u_+$ . Таким образом, был построен простой проект, близкий к оптимальному по значению функционала  $I$ .

в. Рис. 3, а, б представляют оптимальные проекты термолинз для следующих граничных условий: одна из боковых граней теплоизолирована, другая, так же как и нижняя грань, поддерживается при нулевой температуре.

#### 4. Возможные обобщения

а. Требование экстремальности потока тепла через «окно» на границе тела может быть заменено требованием экстремальности некоторых других функционалов от решения, например функционала отклонения температурного поля от заданного. В этом случае изменяется лишь сопряженная система (9), (10), а остальные необходимые условия сохраняют свой вид.

Потребуем, например, чтобы был минимален функционал

$$I = \iint_{S_0} (T - T_0)^2 dS, \quad T_0 = 0; \quad S_0 \in S, \quad (16)$$

т. е. было минимальным среднеквадратичное отклонение температурного поля от заданного нулевого в некоторой области  $S_0$  внутри тела.

Пусть на верхнюю грань по-прежнему падает поток единичной интенсивности, боковые грани теплоизолированы, а нижняя поддерживается при нулевой температуре.

В этом случае сопряженная система будет иметь вид

$$\nabla \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla \mu = \begin{cases} 2(T - T_0), & \text{если } (x, y) \in S_0, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin S_0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \nabla \mu &= 0 \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ \mu &= 0 \text{ на } \Gamma_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение этой задачи, полученное численно для случая, когда  $S_0 = \{(x, y) : x \in [0; 1]; y \in [-a/2, a/2]\}$  показано на рис. 4. Над той областью, которую необходимо поддерживать при температуре, близкой к нулю, образуется «козырек» из плохо проводящего материала, экранирующий область  $S_0$  от падающего сверху потока тепла. Тот поток, который все-таки проникает через этот экран, отводится к нижней грани через зону хорошо проводящего материала, примыкающего к области  $S_0$  снизу. Зоны чистых материалов разделены об-

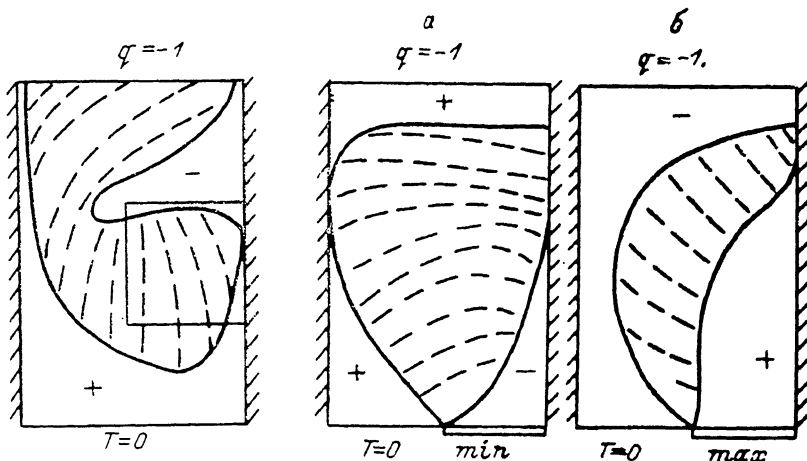


Рис. 4.  $u_+/u_- = 10$ ,  $a = 1.5$ ,  $T_0 = 0$ ,  $S_0 = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [-a/2, a/2]\}$ .

Рис. 5. а —  $u_+/u_- = 10$ ,  $\sigma_+/u_- = 10$ ,  $\sigma_-/u_- = 1$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 4.22 \cdot 10^{-2}$ ; б —  $u_+/u_- = 10$ ,  $\sigma_+/u_- = 10$ ,  $\sigma_-/u_- = 1$ ,  $a = 1.5$ ,  $I = 0.8$ .

ластью, занятой слоистым композитом; слои расположены вертикально. Так расположенный композит затрудняет проникновение тепла в зону  $S_0$  слева, но не препятствует стоку тепла из нее к нижней грани.

б. Те же оптимальные задачи могут быть сформулированы и решены для сред с поглощением. В этом случае второе из уравнений системы (1) примет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{q} + \sigma T = 0,$$

где

$$\sigma(x, y) = \chi_-(x, y)\sigma_- + \chi_+(x, y)\sigma_+,$$

$\sigma_-$ ,  $\sigma_+$  — коэффициенты поглощения материалов  $u_-$  и  $u_+$  соответственно.

Легко убедиться, что и для этой задачи оптимальны слоистые композиты, собственные числа эффективного тензора проводимости которых по-прежнему определяются формулой (6), а эффективный коэффициент поглощения  $\sigma_0$  равен

$$\sigma_0 = m_1 \sigma_-^+ m_2 \sigma_+,$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — концентрации в композите материалов  $u_-$  и  $u_+$ . Условие (11) стационарности по углу  $\varphi$  сохранит свой вид, а условие (12) стационарности по управлению  $\lambda_2$  примет форму

$$\nabla \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial \lambda_2} \cdot \nabla T + \frac{\sigma_- - \sigma_+}{u_- - u_+} \mu T \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \lambda_2 = u_-, \\ = 0, & \text{если } u_- < \lambda_2 < u_+, \\ \leq 0, & \text{если } \lambda_2 = u_+. \end{cases}$$

Оптимальные проекты «экрана» и «линзы», соответственно минимизирующие и максимизирующие поток через окно на нижней грани и изготовленные из материалов с ненулевыми коэффициентами поглощения, представлены на рис. 5, а, б. Граничные условия такие же, как и для проекта, представленного на рис. 1: на верхнюю грань падает поток единичной интенсивности, поток через боковые грани равен нулю, на нижней грани  $T=0$ .

В каждом из этих проектов выделяются две зоны: в верхней зоне основное значение имеет поглощение, и эта зона заполнена тем из материалов, который имеет лучший коэффициент поглощения (большой для оптимального проекта «экрана» и меньший для оптимального проекта «линзы») независимо от соотношения между коэффициентами теплопроводности фаз. Нижняя зона устроена так же, как и оптимальная термолинза или экран (ср. рис. 1 и 5). Размеры этой зоны определяются шириной «окна» и соотношениями между коэффициентами теплопроводности и поглощения исходных материалов.

Ясно, что если вертикальный размер «линзы» также подлежит определению, то оптимальный по этому параметру проект будет иметь высоту порядка высоты нижней зоны, в пределах которой эффект от фокусировки потока превышает потери на поглощение.

#### Литература

- [1] Lurie K. A., Cherkaev A. V., Fedorov A. V. J. Opt. Th. Appl., 1982, v. 37, N 4, p. 499—543.
- [2] Райтум М. Е. ДАН СССР, 1978, т. 243, № 2, с. 415—420.
- [3] Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 270 с.

Физико-технический институт  
им. А. Ф. Иоффе АН СССР  
Ленинград

Поступило в Редакцию  
3 сентября 1986 г.

---