

УДК 539.4

## УПРОЧНЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ЗА СЧЕТ ЛОКАЛЬНОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА НА КОНЦЕ ТРЕЩИНЫ

А. А. Бульбич

Описан локальный фазовый переход (ЛФП) на конце трещины в твердом теле. Определены величина и форма области ЛФП, его вклад в вязкость разрушения. Указана область фазовой диаграммы, в которой должен находиться кристалл для того, чтобы произошло трансформационное упрочнение.

Концентрация напряжений на неоднородностях в твердом теле (дислокациях, трещинах, порах и т. д.) может локально перевести вещество в другую фазу. ЛФП на дислокациях наблюдался в гадолиниевом феррите-гранате [1], в сплаве  $Ni_4Mo$  [2].

ЛФП на трещинах был обнаружен в  $ZrO_2$ . Особый интерес вызвало сопровождаемое ЛФП повышение прочности этого вещества в 4—6 раз (по сравнению с  $ZrO_2$ , легированным таким (небольшим) количеством примеси, чтобы ЛФП при тех же условиях не происходил) [3, 4].

Композиты на основе керамик  $Al_2O_3$ ,  $NB$  с добавлением  $ZrO_2$  показали увеличение прочности в 2—3 раза [5]. Это открывает путь создания сверхпрочных композитных материалов при использовании трансформационно-упрочняющих добавок.

Упрочняющее действие ЛФП было объяснено в [4, 6] тем, что часть энергии разрушения тратится на образование новой фазы. Однако в этих работах размеры области ЛФП и поглощаемая им энергия считались константами, известными заранее. С другой стороны, очевидно, что эти величины зависят от характера и величины нагружения трещины и связаны с термодинамическими характеристиками вещества. Упрочняющее действие ЛФП велико в том случае, если слой новой фазы аккумулирует достаточно большую энергию. Это означает, что ФП должен быть существенно первородным и собственные деформации в области ЛФП не малы. Они создают дополнительное сложное напряженное состояние, которое влияет как на равновесие трещины, так и на положение границы ЛФП, подлежащей определению.

Решение такой задачи может быть получено методами плоской теории упругости. В работе автора [7] было показано, что в случае ФП II рода функция напряжения остается бигармоничной в низкосимметричной фазе, что позволило, используя методы плоской теории упругости, построить приближенное решение для случая ЛФП II рода.

В настоящей работе предложен вариант плоской трансформационной теории упругости, позволяющий решить задачи о ЛФП I и II рода; исследовано упрочнение вещества, испытывающего ЛФП, который списывается в рамках теории Ландау [8].

### 1. Бигармоничность функции напряжений тела, испытывшего фазовый переход

Для того чтобы использовать методы плоской теории упругости, необходимо доказать, что в низкосимметричной фазе тела можно ввести функцию напряжений  $U(x, y)$ , которая будет бигармонической. Такое доказательство для случая ФП II рода в однородном температурном поле содержится в [7].

В настоящей работе приведено более общее доказательство, позволяющее описать случай ФП II рода и неоднородное стационарное температурное поле, а также выведено соотношение для смещений.

Рассмотрим свободную энергию

$$F = \int_V \{f_{\text{гпр}}(u_{ik}) + f(\eta) + A\eta^2 u_{ii}\} dV, \quad (1)$$

где  $V$  — объем тела,  $f_{\text{гпр}}(u_{ik}) = \lambda u_{ii}^2/2 + \mu u_{ik}^2$ ,  $\eta$  — параметр порядка (ПП)

$$f(\eta) = \frac{1}{2} \alpha \eta^2 + \frac{1}{4} \beta \eta^4 + \frac{1}{6} \gamma \eta^6, \quad (2)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  — коэффициенты. Будем считать  $\gamma \equiv 0$ ,  $\beta > 0$  для ФП II рода и  $\beta < 0$ ,  $\gamma > 0$  для ФП I рода.  $A$  — стрикционный коэффициент,  $u_{ik}$  — тензор деформации.

В (2) отброшены слагаемые  $\sim (\nabla\eta)^2$ , в то же время в (1) оставлены слагаемые  $\sim u_{ik}$ ;  $u_{ik}^2$  — степени производных от вектора смещения. Это допустимо, когда масштаб, на котором меняется деформация,  $L \gg r_0$  — корреляционного радиуса [7].

Подчеркнем то обстоятельство, что задача, несмотря на отсутствие членов  $\sim (\nabla\eta)^2$  в (1), (2), является неоднородной в силу неоднородности  $u_{ik}$ .

Дифференцируя плотность (1) по  $u_{ik}$  и  $\eta$ , получаем для ФП II рода

$$\begin{aligned} \lambda u_{jj} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik} + A\eta^2 \delta_{ik} &= \sigma_{ik}, \\ \alpha\eta + \beta\eta^3 + 2A\eta(u_{xx} + u_{yy}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{ik}$  — тензор напряжения. Найдем теперь  $u_{ij}$  из (3)

$$u_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + u_{ij}^{(0)}, \quad (4)$$

где  $s_{ijkl}$  — тензор податливости низкосимметричной фазы,

$$u_{xx}^{(0)} = u_{yy}^{(0)} = A\alpha/[2\beta(\lambda + \mu)], \quad u_{xy}^{(0)} = 0. \quad (5)$$

Выражая теперь в (4)  $\sigma_{kl}$  обычным образом через производные от функции напряжений [9] и пользуясь условием совместности, получим для случая ФП II рода

$$\Delta\Delta U(x, y) = 0. \quad (6)$$

В рамках теории Ландау [8]  $\alpha = \alpha_1(T - T_c)$ , где  $\alpha_1$  — коэффициент,  $T_c$  — температура ФП,  $T$  — температура. Условия совместности приводят к требованию  $\partial^2 u_{xx}/\partial y^2 + \partial^2 u_{yy}/\partial x^2 = 0$  или  $\Delta\alpha = 0$ . Поэтому бигармоничность выполняется при условии  $\Delta T(x, y) = 0$ . При этом, разумеется, в (1) следует учесть слагаемое, описывающее тепловое расширение.

Во многих случаях поведение ПП при ФП I рода хорошо описывается формулой

$$\eta^2 = \begin{cases} \eta_0^2 - b(\alpha_{\text{вф}} - \alpha_0), & \alpha_{\text{вф}} \leq \alpha_0, \\ 0, & \alpha_{\text{вф}} > \alpha_0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\alpha_{\text{вф}} = \alpha + 2A(u_{xx} + u_{yy}), \quad (8)$$

$b > 0$  — коэффициент;  $\alpha_0$  — то значение  $\alpha$ , при котором происходит ФП, т. е. ПП в точке ФП испытывает скачок  $\eta_0$ , причем  $\eta_0$  близко к значению ПП при насыщении, а при дальнейшем понижении температуры происходит медленное нарастание ПП, которое хорошо аппроксимируется выражением (7). Такое

поведение демонстрирует поляризацию у сегнетоэлектриков KDP, KHP, BaTiO<sub>3</sub> [10], SbSI [11].

Используя (2), получим <sup>1</sup>

$$\tau_0^2 = \frac{3|\beta|}{4\gamma}, \quad \alpha_0 = \frac{3\beta^2}{16\gamma}, \quad b = \frac{2}{|\beta|}, \quad (9)$$

(6) хорошо выполняется при больших  $|\beta|$ .

Повторяя теперь те же рассуждения, получаем бигармоническую функцию напряжений в случае ФП I рода, для которого справедливо (7). Это обстоятельство позволяет выразить  $U(x, y)$  через потенциалы Колосова—Мухелишвили  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  — функции комплексной координаты  $z = x + iy$ . При этом компоненты тензора напряжений и граничные условия первой основной задачи теории упругости остаются обычными [9], выражение же для смещений изменяется. Интегрируя (4), получим:

$$2\mu(u + iv) = \bar{x}\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + Cz, \quad (10)$$

где  $\bar{x} = (\bar{\lambda} + 3\mu)/(\bar{\lambda} + \mu)$ . В случае ФП II рода  $\bar{\lambda} = \lambda - 2A^2/\beta$ ,  $C = \mu A \alpha / [\rho(\bar{\lambda} + \mu)]$ ; в случае же ФП I рода  $\bar{\lambda} = \lambda - 2A^2b$ ,  $C = -\mu A \bar{\eta}^2 / (\lambda + \mu)$ , где  $\bar{\eta}^2 = \eta_0^2 - b(\alpha - \alpha_0)$ . Последнее слагаемое (10) связано с собственной деформацией при ФП.

Полученные результаты позволяют применять методы плоской теории упругости к задачам, в которых вещество испытывает ФП.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим трещину  $L$  длиной  $2a$ , расположенную вдоль оси  $x$ , симметрично относительно начала координат, раскрытую за счет напряжения на бесконечности  $\sigma_{yy}(\infty) = P$  (рис. 1). Вблизи концов  $L$  имеются области  $\Sigma^+$ , ограниченные контурами  $\Gamma$ , внутри которых вещество находится в низкосимметричной фазе  $\eta \neq 0$ , а в области  $\Sigma^-$  в высокосимметричной:  $\eta = 0$ .

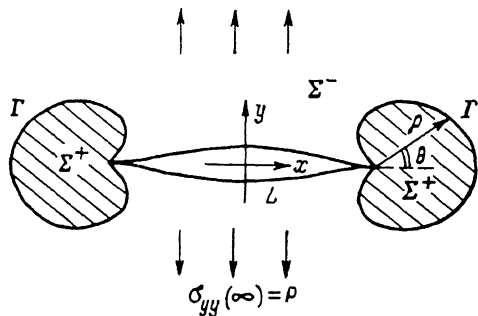


Рис. 1. Локальный фазовый переход II рода на концах трещины.

Заштрихована область  $\Sigma^+$ , испытывавшая ЛФП, находящаяся в низкосимметричной фазе  $\eta \neq 0$ . В области  $\Sigma^-$  — высокосимметричная фаза  $\eta = 0$ .  $\Gamma$  — фазовая граница. Плоскость растягнута на бесконечности  $\sigma_{yy}(\infty) = P$ .

Наличие собственной деформации в области  $\Sigma^+$  приводит к возникновению сложного напряженного состояния, уменьшающего концентрацию напряжений на конце трещины и, таким образом, повышающего вязкость разрушения  $K_{Ic}$ . Определением поправки к  $K_{Ic}$ , связанной с собственной деформацией в области  $\Sigma^+$ , исчерпывается задача в случае ЛФП II рода.

Отметим, что в случае ЛФП I рода исследуемое вещество имеет сложную кинетику, характеризующуюся несколькими временами релаксации: упругой подсистемы  $\tau_y$ , III  $\tau$  и  $\tau'$ , причем время релаксации III  $\tau$  из состояния  $A$  в состояние  $B$  (рис. 2, а) может быть много меньше времени  $\tau' B \rightarrow A$  (рис. 2, б).

В общем случае прочность в таком теле зависит от предыстории нагружения. Однако в рамках статической постановки задачи может быть оценена прочность вещества в ряде предельных случаев. Остановимся на случае  $\tau_y \sim \tau \ll \tau'$ , который, по-видимому, и реализуется в  $ZrO_2$ .

<sup>1</sup> Формулы (9) ставят (7) в соответствие с результатами, получающимися в рамках теории Ландау. Это, однако, не обязательно; (7) справедливо в области насыщения III, где теория Ландау уже не применима и соотношения (9) отсутствуют, но имеется первое из уравнений (3).

Рассмотрим фазовую диаграмму вещества, отвечающую свободной энергии  $(I, 2)$  на плоскости  $\alpha-\beta$  (рис. 3). Линия  $I$  отделяет область  $I$  абсолютной устойчивости фазы  $\eta=0$  от области  $II$  сосуществования двух фаз  $\eta=0$  и  $\eta \neq 0$ , причем

$$f(\eta=0)|_{II} < f(\eta \neq 0)|_{II}.$$

Уравнение этой линии  $\alpha = \beta^2/4\gamma$ .<sup>2</sup> На линии  $2$   $\alpha = \alpha_0(\beta)$ ,  $f(\eta=0) = f(\eta \neq 0)$  — это линия ФП I рода; на линии  $3$   $\alpha = 0$ , фаза  $\eta=0$  пропадает. Пусть вещество первоначально находится в части  $II$  фазовой диаграммы в состоянии  $\eta=0$ . В области  $\Sigma_1^+$  рис. 4 оно переводится в части  $III$  и  $IV$  фазовой диаграммы в состояние  $\eta \neq 0$ . При расширении трещины область  $\Sigma_1^+$  перемещается и вещество, которое уже было в  $\Sigma_1^+$ , возвращается в район  $II$  фазовой диаграммы, однако уже в состоянии  $\eta \neq 0$ . Поэтому в процессе образования трещины в разбираемом случае вокруг нее возникает шлейф  $\Sigma_2^+$  (рис. 4), в котором вещество находится в метастабильном состоянии  $B$  ( $\eta \neq 0$ ) (рис. 2, б) в районе  $II$  фазовой диаграммы.

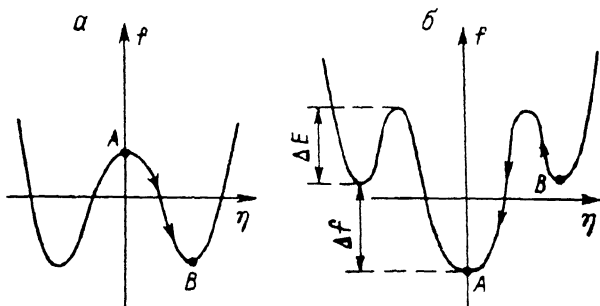


Рис. 2. Зависимости плотности свободной энергии  $f$  от  $\eta$  в области, где фаза  $\eta \neq 0$  абсолютно устойчива (а), и в области, где она метастабильна (б).

В этом случае время релаксации  $\tau$  из состояния  $A$  в состояние  $B$  (а) и  $\tau'$  из  $B$  в  $A$  (б) могут существенно отличаться:  $\tau' \sim \exp(-\Delta E/T)$ .

В области же  $\Sigma_1^+$  вещество в устойчивом состоянии  $B$  ( $\eta \neq 0$ ) (рис. 2, а). Плотность свободной энергии  $f(\Sigma_2^+)$  превышает  $f(\Sigma^-)$ :  $f(\Sigma_2^+) - f(\Sigma^-) = \Delta f$  (рис. 2, б; 3), причем  $\Delta F = \int_{\Sigma_2^+} \Delta f dV$  пропорционально площади поверхности трещины и должно включаться в поверхностную энергию при расчете прочности. Очевидно,

$$\sigma_{\text{эф}} = \sigma_0 + 2\rho_0 \Delta f, \quad (11)$$

$\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho_0$  — ширина шлейфа.

Максимальное значение  $\Delta f$  мы, очевидно, получим, если вещество первоначально находилось в области  $II$  фазовой диаграммы, вблизи линии  $I$ . Тогда

$$\Delta f \leq \frac{|3|^3}{48\gamma}. \quad (12)$$

Таким образом, в случае ЛФП I рода задача определения прочности сводится к оценке величины  $\rho_0$  (11).

### 3. Основные соотношения

Будем искать решение для  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  в виде

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z), \quad (13)$$

где  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  — обычные [9] решения для трещины в среде без ФП.

<sup>2</sup> Отметим во избежание недоразумения, что такие уравнения линии могут быть получены в предположении близости к трикритической точке  $\alpha = \beta = 0$  на фазовой диаграмме. Уже в рамках этого  $\beta$  считается тем не менее большим. Требование близости к трикритической точке возникает как условие применимости теории Ландау; в области же, где она не применима, могут быть получены аналогичные результаты и все качественные выводы сохраняются.

Одним из достаточных условий устойчивости решения (оно следует из требования положительной определенности матрицы вторых производных от плотности свободной энергии (1)) является неравенство  $e < 1$ , где  $e = 2A^2 / |\beta| (\lambda +$

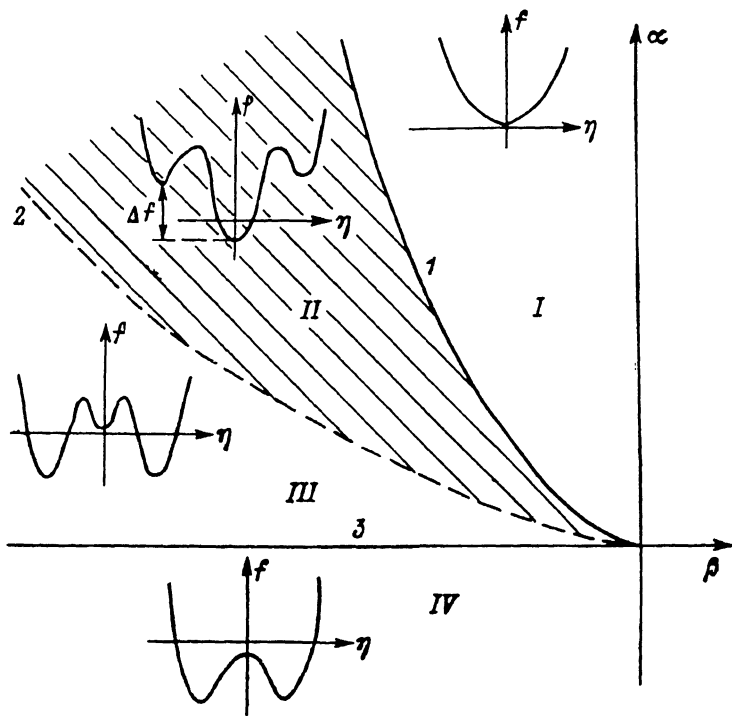


Рис. 3. Фазовая диаграмма вещества на плоскости коэффициентов  $\alpha - \beta$  в модели (2).

В области I абсолютно устойчива фаза  $\eta = 0$ , а в области IV — фаза  $\eta \neq 0$ ; области сосуществования фаз II, III разделены линией 2 ФП I рода  $\alpha = \alpha_0 = 3\beta^2 / 16\gamma$ . В каждой области приводится зависимость плотности свободной энергии  $f$  от ПП  $\eta$ . Вещество, состояние которого отвечает заштрихованной области, испытывает трансформационное упрочнение.

$+\mu)$  [7, 12]. При нарушении этого неравенства ФП становится собственно ферроэластическим, причем III становится как  $\eta$ , так и  $u_{ik}$ . При этом линейная теория упругости становится неприменимой.

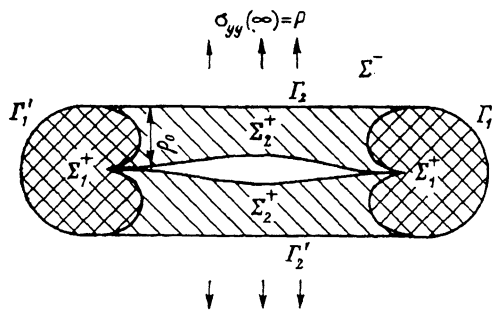


Рис. 4. Локальный фазовый переход I рода при  $\tau_y \sim \tau \ll \tau'$ .

Заштрихована область шлейфа  $\Sigma_2^-$ , в которой вещество находится в метастабильном состоянии (B, рис. 2, б), в то время как в области  $\Sigma_1^+$  (двойная штриховка) в стабильном состоянии (B, рис. 2, а). Условия равновесия фазовой границы выполняются в этом случае лишь на частях  $\Gamma_1, \Gamma_1'$  контура  $\Gamma$ .

Оценка величины  $e$  для сегнетоэлектриков [13] показывает, что она может принимать значения как много меньше единицы, так и больше. Неравенство, аналогичное

$$e \ll 1, \quad (14)$$

выполняется, по-видимому, также в гадолиниевом феррите-гранате [1].

Получим решение при условии (14). Граничные условия, из которых определяются  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$ , — это равенство напряжений и смещений на контурах  $\Gamma$  в случае ЛФП II рода (рис. 1) и на  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_1' + \Gamma_2'$  в случае ЛФП

I рода (рис. 4) и отсутствие напряжений на  $L$ . Эти условия с учетом (14) сводятся к известной задаче Шермана [9] об упругой плоскости, в отверстия которой вставлены шайбы из того же материала. Тогда

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\kappa + 1} I_1(z) + \varphi_*(z), \quad \psi_1(z) = \frac{1}{\kappa + 1} I_2(z) + \psi_*(z),$$

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad I_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad (15)$$

где  $\varphi_*$ ,  $\psi_*$  — функции не испытывающие скачка на  $\Gamma$  и определяющиеся интегралом

$$\Phi_*(z) = \Omega_*(z) = \frac{1}{2\pi i (\kappa + 1) \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{t^2 - a^2} I_2'(t) dt}{t-z}, \quad (16)$$

где

$$\Phi_*(z) = \varphi_*'(z), \quad \Psi_*(z) = \psi_*'(z) = \bar{\Omega}_*(z) - \Phi_*(z) - z\Phi_*'(z), \quad \bar{\Omega}_*(z) = \overline{\Omega_*(\bar{z})},$$

черта означает комплексное сопряжение, штрих — дифференцирование

$$h(t) = \overline{g(\bar{t})} + \bar{t}g'(t), \quad t \in \Gamma.$$

Наконец, используя (10) и (14), получаем

$$g(t) = Ct - \Delta\kappa\varphi_0(t), \quad t \in \Gamma, \quad (17)$$

$$\Delta\kappa = \bar{\kappa} - \kappa = 4\mu A^2 / [\beta(\lambda + \mu)^2]$$

в случае ФП II рода. При этом  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  в (13) можно считать малыми поправками к  $\varphi_0$  и  $\psi_0$ .

При ФП I рода при  $t \in \Gamma$  вторым слагаемым в (17) можно пренебречь, однако  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  в (13) уже не являются малыми по сравнению с  $\varphi_0$  и  $\psi_0$ .

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  могут быть взяты, если известен контур  $\Gamma$ . Для его определения имеем дополнительные соотношения

$$\alpha_{\varphi_0}(z)|_{\Gamma} = 0 \quad (18)$$

в случае ЛФП II рода и

$$\Delta\bar{f} - \frac{\tau^2 C u_0}{\kappa + 1} + 4u_0 \operatorname{Re} \{ \Phi_*(z) + \Phi_0(z) \} |_{\Gamma_1, \Gamma'_1} = 0 \quad (19)$$

для ЛФП I рода [14, 15] (в разбираемом случае части  $\Gamma_1$  и  $\Gamma'_1$  границы (рис. 4) успевают стать равновесными, части же  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma'_2$  неравновесны). Здесь  $\Delta\bar{f}$  — скачок плотности свободной энергии,  $u_0$  — скачок компоненты  $u_{xx}$  и  $u_{yy}$  тензора деформации на границе  $\Gamma_1$  и  $\Gamma'_1$ . В рассматриваемом случае

$$\Delta\bar{f} = \eta_0^2 (\alpha_1 - \alpha_0) / 2, \quad u_0 = -A\bar{\eta}^2 / [2(\lambda + \mu)],$$

$\alpha_1 = \alpha_1(\beta)$  — значение  $\alpha_{\varphi_0}(z)$  на внутренней стороне границы  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma'_1$ .

В случае ЛФП I рода

$$\alpha_{\varphi_0}(z) = \alpha - \frac{2A^2}{\lambda + \mu} \bar{\eta}^2 + \frac{4A}{\lambda + \mu} \left\{ -\frac{C}{\kappa + 1} + \operatorname{Re} \{ \Phi_0(z) + \Phi_*(z) \} \Big|_{\Gamma_1, \Gamma'_1} \right\} = \alpha_1. \quad (20)$$

Величина  $\alpha_1(\beta)$  подлежит определению из (19), (20)

$$\alpha_1 = -\frac{|\beta|^3 (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)}{32A^2 (2\lambda + 3\mu) \gamma}. \quad (21)$$

Используя теперь (20) и (21) при известном  $\Phi_*(z)$ , легко получить уравнение границы.

#### 4. Локальный фазовый переход

В случае ЛФП II рода граница  $\Gamma$  может быть определена определена в первом приближении с помощью функций  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$ , затем с использованием этой границы строятся  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$  и с их помощью корректируется граница.  $K_{\Gamma_c}$  определя-

ется по сингулярности  $\varphi'(z)$  при  $z \rightarrow a$ . Все расчеты выполнены в приближении

$$\rho/a \ll 1. \quad (22)$$

В результате оказалось, что граница  $\Gamma$  имеет форму кардиоиды

$$\rho = 2a \left( \frac{PA}{\bar{a}(\lambda + \mu)} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (23)$$

где  $\bar{a} = a - AP/(\lambda + \mu)$ ;  $\rho, \theta$  — угловые координаты, отсчитанные от правого конца трещины (рис. 1),

$$K_{Ic} = K_{Ic}^0 \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\kappa}{z+1} \right), \quad (24)$$

где  $K_{Ic}^{(0)}$  — вязкость разрушения вещества, не испытывающего ЛФП. Решения (23), (24) имеют место лишь при  $A < 0$ .

В случае ЛФП I рода форма границы, как уже обсуждалось выше, зависит от истории нагружения.

Рассмотрим трещину, «приготовленную» так, что область ЛФП имеет вид, изображенный на рис. 4. Границы  $\Gamma_2$  и  $\Gamma'_2$  описываются выражениями

$$z = x = i\rho_0 (-a \leq x \leq a),$$

а  $\Gamma_1, \Gamma'_1$

$$z = \pm a \pm \rho(\theta) \exp(i\theta) (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \quad \rho(\pm\pi/2) = \rho_0.$$

В интеграле  $I_2(z)$  можно выделить слагаемое  $\sim z$  и остаток  $\hat{I}_2(z)$ . Легко показать, что главный вклад в  $\hat{I}_2(z)$  вносят интегралы по  $\Gamma_2$  и  $\Gamma'_2$ . Пренебрегая интегралами по  $\Gamma_1$  и  $\Gamma'_1$  в  $\hat{I}_2(z)$ , получим  $\rho(\theta) = \rho_0 \cos^2(\theta/2)$

$$\rho_0 = 2a(PA/\alpha_1(\lambda + \mu))^2, \quad (25)$$

таким образом,

$$\sigma_{\text{эф}} = \sigma_0 + \frac{D}{E} K^2, \quad (26)$$

где интенсивность напряжения  $K = P(\pi a)^{1/2}$ ;  $E$  — модуль Юнга;  $D = 32e^3(3 + 2\delta)^2(2 + 3\delta)/\{3\pi(1 + \delta)^2(2 + \delta)^2\}$ ;  $\delta = \lambda/\mu$ .

В силу (9), (14) поправка к  $\sigma_0$  мала, поэтому

$$K_{Ic} = K_{Ic}^{(0)}(1 + D/2). \quad (27)$$

## 5. Обсуждение результатов

Малость поправок  $\Delta K_{Ic}$  связана, очевидно, с малостью величины  $e$ , характеризующей вклад III в напряженное состояние тела.

В рамках использованной модели (1) требование положительной определенности плотности (1) приводит к неравенству  $e < 1$ . Отказ от условия (14) с сохранением условия  $e < 1$  существенно усложнит решение задачи, однако не должен качественно изменить результат (26), так как, во-первых, размеры области  $\Sigma_1^+$  определяются главным образом сингулярной частью  $\varphi'_0(z)$ ; во-вторых, результат (26) нечувствителен к тонким деталям, формы  $\Gamma_1$  и определяются лишь шириной  $\rho_0$ . Следовательно,

$$\sigma_{\text{эф}} = \sigma_0 + \frac{D}{E} K^2, \quad K_{Ic} = \frac{K_{Ic}^{(0)}}{\sqrt{1-D}},$$

где безразмерный параметр  $D = D(e, \delta)$  зависит главным образом от  $e$  — интенсивности взаимодействия III с упругой подсистемой и начального состояния тела, т. е. его положения на фазовой диаграмме относительно линий ФП. В общем случае  $D$  зависит также от предистории.

Трансформационное упрочнение, как видно из сказанного выше, осуществляется, если вещество находится в районе II фазовой диаграммы — в том районе фазовой диаграммы, где обе фазы сосуществуют, причем исходная устойчива, а низкосимметричная метастабильна. ЛФП, разумеется, осуществляется не

только в этой области. Если вещество первоначально было в областях *I* и *IV*, то шлейф не образуется, а в области *III* образуется, однако при росте трещины свободная энергия не поглощается, а выделяется, что приводит к уменьшению прочности.

#### Литература

- [1] Власко-Власов В. К., Инденбом М. В. ЖЭТФ, 1984, т. 86, № 3, с. 1084—1091.
- [2] Золотарев С. Н., Сидорова И. Б., Скаков Ю. А., Соловьев В. А. ФТТ, 1978, т. 20, № 3, с. 775—782.
- [3] Lenz L. K., Heuer A. H. Commun. Amer. Ceram. Soc., 1982, v. 65, N 1, p. C192—C194.
- [4] Gupta T. K., Lange F. F., Bechtold J. H. J. Mater. Sci., 1978, v. 13, N 7, p. 1464—1470.
- [5] Claussen N. Zeit. Werkstofftechnik, 1982, v. 13, N 4, p. 138—147.
- [6] Antolovich S. D. Trans. Met. Soc. AIME, 1968, v. 242, p. 2371—2373.
- [7] Бульбич А. А. Письма в ЖТФ, 1986, т. 12, № 11, с. 645—649.
- [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976, с. 486—512.
- [9] Мусхелишвили Н. М. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, с. 707.
- [10] Иона Ф., Ширане Д. Сегнетоэлектрические кристаллы. М.: Мир, 1965, с. 555.
- [11] Герзанич Е. И., Фридкин В. М. Сегнетоэлектрики типа  $A^{\text{IV}}B^{\text{VI}}C^{\text{VII}}$ . М.: Наука, 1982, с. 48.
- [12] Бульбич А. А., Зеленин С. Н., Рафалович В. И. ЖТФ, 1986, т. 56, № 8, с. 1524—1529.
- [13] Бульбич А. А., Зеленин С. Н., Рафалович В. И. Письма в ЖТФ, 1984, т. 10, № 17, с. 1069—1073.
- [14] Ройтбурд А. Л. УФН, 1974, т. 113, № 1, с. 69—104.
- [15] Гринфельд М. А. Изв. АН СССР. Физика земли, 1982, № 1, с. 39—47.

Ростовский-на-Дону  
государственный университет  
научно-исследовательский институт физики

Поступило в Редакцию  
3 ноября 1986 г.