

УДК 539.189.548.4

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ЭНЕРГИИ СИММЕТРИЧНЫХ БИЭКСИТОНОВ

*Н. Н. Пенжина, Т. К. Ребане*

Произведен теоретический анализ зависимости энергии биэкситона в изотропном кристалле от отношения эффективных масс электрона и дырки  $\sigma$ . Получены новые аналитические верхняя и нижняя границы полной энергии биэкситона, а также его энергии связи (и диссоциации). На основе разложения энергии в ряд типа Борна—Оппенгеймера построена аппроксимационная формула, предсказывающая энергию связи биэкситонов при произвольных  $\sigma$  с погрешностью в несколько процентов.

За последние 20 лет выполнено значительное число работ, посвященных квантовомеханическим расчетам биэкситонов [1-7] — молекулоподобных нейтральных комплексов, состоящим из двух связанных между собой экситонов. Характерной особенностью теории биэкситона является необходимость детального учета одновременного и взаимно скоррелированного движения всех четырех частиц, входящих в его состав: при сравнимых по величине эффективных массах электрона  $m_e$  и дырки  $m_h$  сильно возрастают неадиабатические эффекты и адиабатическое приближение становится непригодным. В этой связи возникают значительные вычислительные трудности и появляются заметные погрешности расчетов, особенно вблизи значения  $\sigma=1$  (где  $\sigma=m_e/m_h$ ), соответствующего молекуле позитрония  $e^-e^-e^+e^+$ . Это видно на примере расчетов энергии диссоциации молекулы позитрония на два атома позитрония  $e^-e^+$ . Вариационные расчеты различных авторов дали для этой энергии значения 0.11 [6], 0.95 [2], 0.12 [7] и 0.20 эВ [1]. Методом функции Грина было получено значение 0.41 эВ [3], а с помощью адиабатического метода 0.22 эВ [4]. Только в последние годы было достигнуто согласие результатов вариационных и невариационных методов: прецизионные многопараметрические вариационные расчеты [6] подтвердили значение полной энергии основного состояния позитрония, равное  $-0.51515$  а. е., и энергию его диссоциации 0.41 эВ, полученную в работе [3] методом функции Грина.

Учитывая эти новые данные для молекулы позитрония, а также имеющиеся прецизионные расчеты энергии молекулы водорода с неподвижными [8] и движущимися [9] ядрами, можно считать, что в настоящее время в ряду экситонных молекул известны надежные значения энергии для трех «эталонных» биэкситонов, соответствующих значениям  $\sigma=0, 1/1836.1527$  и 1.

Здесь показывается, что использование свойства выпуклости [10] энергии как функции параметра, линейно входящего в гамильтониан, позволяет по энергиям этих эталонных систем надежно установить границы, внутри которых лежат энергия биэкситона и энергия его диссоциации при произвольных значениях  $\sigma$ . Предлагается также уточненная аналитическая аппроксимация для энергии биэкситона при всех  $\sigma$ .

# 1. Вспомогательные соотношения для энергии биэкситона

В методе эффективной массы биэкситон в изотропном кристалле описывается гамильтонианом

$$H(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2} \left[ \frac{1}{m_h} (\Delta_1 + \Delta_2) + \frac{1}{m_e} (\Delta_3 + \Delta_4) \right] + \frac{e^2}{\kappa} \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{34}} - \frac{1}{r_{13}} - \frac{1}{r_{14}} - \frac{1}{r_{23}} - \frac{1}{r_{24}} \right), \quad (1)$$

где  $\kappa$  — диэлектрическая проницаемость кристалла,  $\mathbf{r}$  — совокупность радиус-векторов дырок ( $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ ) и электронов ( $\mathbf{r}_3$  и  $\mathbf{r}_4$ ). Будем рассматривать низшее собственное значение гамильтониана (1), которое обозначим через  $E(m_e, m_h; \kappa)$ . Оно имеет физический смысл полной энергии биэкситона и не изменяется ввиду симметрии гамильтониана (1) при перестановке электронов и дырок. Поэтому

$$E(m_e, m_h; \kappa) = E(m_h, m_e; \kappa). \quad (2)$$

Чтобы использовать обобщенное соотношение выпуклости [10] для вывода границ энергии биэкситона, требуется иметь гамильтониан, линейно зависящий от параметра  $\sigma$ . С этой целью произведем в (1) масштабирование координат всех частиц. Имеем

$$H\left(\frac{\hbar^2 \kappa}{m_e e^2} \mathbf{r}\right) = \frac{m_e e^4}{\hbar^2 \kappa^2} H(\mathbf{r}; \sigma). \quad (3)$$

Здесь введен новый гамильтониан

$$H(\mathbf{r}; \sigma) = -\frac{1}{2} [\sigma (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_3 + \Delta_4] + \left( \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{34}} - \frac{1}{r_{13}} - \frac{1}{r_{14}} - \frac{1}{r_{23}} - \frac{1}{r_{24}} \right). \quad (4)$$

Его низшее собственное значение, которое обозначим через  $\varepsilon(\sigma)$ , связано с полной энергией биэкситона соотношением

$$E(m_e, m_h; \kappa) = \frac{m_e e^4}{\hbar^2 \kappa^2} \varepsilon(\sigma). \quad (5)$$

Из (2) и (5) вытекает следующее свойство симметрии функции  $\varepsilon(\sigma)$ :

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \varepsilon\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (6)$$

Отсюда следует, что функцию  $\varepsilon(\sigma)$  достаточно задать на интервале  $0 \leq \sigma \leq 1$ ; это определяет ее при всех положительных значениях  $\sigma$ .

# 2. Аналитические границы для энергии биэкситона

Перейдем к выводу границ для функции  $\varepsilon(\sigma)$ . Вводя сокращенные обозначения для операторов кинетической энергии дырок и электронов и для оператора потенциальной энергии

$$T_h(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} (\Delta_1 + \Delta_2), \quad T_e(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} (\Delta_3 + \Delta_4), \\ V(\mathbf{r}) = \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{34}} - \frac{1}{r_{13}} - \frac{1}{r_{14}} - \frac{1}{r_{23}} - \frac{1}{r_{24}}, \quad (7)$$

представим гамильтониан (4) в виде

$$H(\mathbf{r}; \sigma) = T_e(\mathbf{r}) + \sigma T_h(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Средние значения операторов (7), вычисленные с точной собственной функцией  $\psi(\mathbf{r}; \sigma)$  основного состояния этого гамильтониана, обозначим через  $T_h(\sigma)$ ,  $T_e(\sigma)$  и  $V(\sigma)$ . При этом

$$T_e(\sigma) + \sigma T_h(\sigma) + V(\sigma) = \varepsilon(\sigma). \quad (9)$$

Из теоремы вириала и из теоремы Гельмана-Феймана [11] получим

$$2T_e(\sigma) + 2\sigma T_h(\sigma) + V(\sigma) = 0, \quad \varepsilon'(\sigma) = T_h(\sigma). \quad (10), (11)$$

Из трех последних формул получим выражения средних значений операторов (7) через функцию  $\varepsilon(\sigma)$  и ее производную

$$T_h(\sigma) = \varepsilon'(\sigma), \quad T_e(\sigma) = -\varepsilon(\sigma) - \sigma\varepsilon'(\sigma), \quad V(\sigma) = 2\varepsilon(\sigma). \quad (12)$$

Составим гамильтониан вида (8)  $H(\mathbf{r}; \sigma + \Delta\sigma)$ , в котором значение  $\sigma$  заменено значением  $\sigma + \Delta\sigma$ . Вычислим среднее значение этого гамильтониана с пробной волновой функцией  $\psi(\beta\mathbf{r}; \sigma)$ , получаемой из точной собственной функции  $\psi(\mathbf{r}; \sigma)$  оператора  $H(\mathbf{r}; \sigma)$  умножением координат всех частиц на масштабный множитель  $\beta > 0$ . С учетом свойств однородности операторов (7) получим

$$\langle \psi(\beta\mathbf{r}; \sigma) | H(\mathbf{r}; \sigma + \Delta\sigma) | \psi(\beta\mathbf{r}; \sigma) \rangle / \langle \psi(\beta\mathbf{r}; \sigma) | \psi(\beta\mathbf{r}; \sigma) \rangle = \beta^2 T_e(\sigma) + \beta^2 (\sigma + \Delta\sigma) T_h(\sigma) + \beta V(\sigma) \geq \varepsilon(\sigma + \Delta\sigma). \quad (13)$$

Неравенство в правой части (13) написано с учетом вариационного принципа для собственного значения оператора  $H(\mathbf{r}; \sigma + \Delta\sigma)$ . С помощью (12) это неравенство можно записать в виде

$$\beta^2 [\varepsilon'(\sigma) \Delta\sigma - \varepsilon(\sigma)] + 2\beta\varepsilon(\sigma) \geq \varepsilon(\sigma + \Delta\sigma). \quad (14)$$

Мы получили верхнюю границу величины  $\varepsilon(\sigma + \Delta\sigma)$ , справедливую при всех  $\beta > 0$ . Оптимальное значение  $\beta$  соответствует исчезновению производной по  $\beta$  от левой части неравенства (14) и равно

$$\beta = \varepsilon(\sigma) / [\varepsilon(\sigma) - \varepsilon'(\sigma) \Delta\sigma]. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (14) дает оптимальную верхнюю границу для величины  $\varepsilon(\sigma + \Delta\sigma)$

$$\varepsilon(\sigma + \Delta\sigma) \leq [\varepsilon(\sigma)]^2 / [\varepsilon(\sigma) - \varepsilon'(\sigma) \Delta\sigma]. \quad (16)$$

Разложив обе части неравенства (16) по степеням  $\Delta\sigma$ , имеем

$$\varepsilon(\sigma) + \varepsilon'(\sigma) \Delta\sigma + \frac{1}{2} \varepsilon''(\sigma) (\Delta\sigma)^2 + \dots \leq \varepsilon(\sigma) + \varepsilon'(\sigma) \Delta\sigma + [\varepsilon'(\sigma) \Delta\sigma]^2 / \varepsilon(\sigma) + \dots \quad (17)$$

Слагаемые  $\varepsilon(\sigma)$  и  $\varepsilon'(\sigma) \Delta\sigma$  в обеих частях неравенства взаимно компенсируются. Сохраняются только члены порядка  $(\Delta\sigma)^2$  и выше. Сократим теперь обе части неравенства на  $(\Delta\sigma)^2$  и устремим затем  $\Delta\sigma \rightarrow 0$ . В результате получим следующую оценку сверху для второй производной функции  $\varepsilon(\sigma)$ :

$$\varepsilon''(\sigma) \leq 2 [\varepsilon'(\sigma)]^2 / \varepsilon(\sigma). \quad (18)$$

Так как  $\varepsilon(\sigma) \leq 0$ , то из (18) вытекает неравенство

$$[-1/\varepsilon(\sigma)]'' \leq 0. \quad (19)$$

Это означает, что величина  $f(\sigma) = -1/\varepsilon(\sigma)$  как функция  $\sigma$  изображается графиком, выпуклость которого обращена вверх. Поэтому линейная интерполяция (или экстраполяция) функции  $f(\sigma)$  по двум ее значениям, заданным в некоторых точках  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , дает нижнюю или верхнюю границу ее значения в произвольной точке  $\sigma$

$$f(\sigma) \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} \frac{[(\sigma - \sigma_1) f(\sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_1) f(\sigma_1)]}{(\sigma_2 - \sigma_1)}. \quad (20)$$

Верхний знак неравенства следует брать, когда значение  $\sigma$  лежит на отрезке между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а нижний знак, — когда  $\sigma$  лежит вне этого отрезка. Переходя от  $f(\sigma)$  к  $\varepsilon(\sigma)$ , получим из (20)

$$\varepsilon(\sigma) \geq \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \varepsilon(\sigma_1) \varepsilon(\sigma_2)}{[(\sigma - \sigma_1) \varepsilon(\sigma_1) + (\sigma_2 - \sigma) \varepsilon(\sigma_2)]} \quad (21)$$

Таким образом, мы получили простую аналитическую формулу для верхней и нижней границ функции  $\varepsilon$  по заданным ее значениям в каких-либо двух эталонных точках  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Для верхней границы  $\varepsilon(\sigma)$  можно получить также формулу, применение которой требует информации только об одной эталонной системе. Положив в (16)  $\sigma = \sigma_0$ ,  $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_0$ , получим для  $\varepsilon(\sigma)$  верхнюю границу

$$\varepsilon(\sigma) \leq [\varepsilon(\sigma_0)]^2 / [\varepsilon(\sigma_0) - \varepsilon'(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0)]. \quad (22)$$

В силу (11) производная  $\varepsilon'(\sigma)$  связана с кинетической энергией дырок. Поэтому для применения формулы (22) достаточно знать функцию  $\varepsilon$  и среднее значение  $T_h$  в некоторой эталонной точке  $\sigma_0$ . В качестве примера рассмотрим случай  $\sigma_0 = 1$ . Ввиду симметрии гамильтониана (4) в этой точке кинетические энергии электронов и дырок совпадают. Из двух первых равенств (12) вытекает тогда, что  $\varepsilon'(1) = -\varepsilon(1)/2$ . Верхняя граница (22) для функции  $\varepsilon(\sigma)$  принимает тогда вид

$$\varepsilon(\sigma) \leq 2\varepsilon(1)/(1 + \sigma). \quad (23)$$

Полученные здесь границы для функции  $\varepsilon(\sigma)$  (и связанной с ней полной энергии биэкситона  $E(m_e, m_h; x)$  (5)) представляют собой примеры применения обобщенного соотношения выпуклости [10] для энергии квантово-механических систем.

### 3. Расчет границ энергии диссоциации биэкситона и сопоставление с результатами других авторов

Наиболее точные из известных нам строгих границ энергии биэкситона были получены в работах [12, 13], где рассматривалась величина

$$W(\sigma) = \left[ E(m_e, m_h; x) - \frac{m_e m_h e^4}{(m_e + m_h) \hbar^2 x^2} \right] / \left[ \frac{m_e m_h e^4}{(m_e + m_h) \hbar^2 x^2} \right], \quad (24)$$

представляющая собой энергию связи биэкситона по отношению к его распаду на два свободных экситона, отнесенную к удвоенной энергии свободного экситона. Определенная таким способом энергия связи отрицательна. Ей следует сопоставить положительную энергию диссоциации биэкситона, которая в этих же единицах равна  $D(\sigma) = |W(\sigma)|$ .

Из (5) и (24) вытекает связь между  $W$  и рассмотренной выше величиной  $\varepsilon$

$$W(\sigma) = 1 + (1 + \sigma) \varepsilon(\sigma). \quad (25)$$

Отсюда ясно, что полученные выше верхняя и нижняя границы для  $\varepsilon(\sigma)$  определяют одновременно и аналогичные границы для  $W(\sigma)$ .

Выведенные в работе [13] границы для  $W(\sigma)$  основываются на доказанном там же дифференциальном неравенстве

$$W''(\sigma) \leq -2W'(\sigma)/(1 + \sigma) \quad (26)$$

точно так же, как наши границы (21) и (23) для  $\varepsilon(\sigma)$  основываются на дифференциальном неравенстве (18).

С учетом (25) неравенство (26) эквивалентно неравенству

$$\varepsilon''(\sigma) \leq -2[\varepsilon(\sigma) + 2(1 + \sigma)\varepsilon'(\sigma)]/(1 + \sigma)^2. \quad (27)$$

Для сравнения качества оценок второй производной  $\varepsilon''(\sigma)$ , даваемых неравенствами (27) и (18), составим разность правых частей этих неравенств. Она равна

$$-2[\varepsilon(\sigma) + (1 + \sigma)\varepsilon'(\sigma)]^2 / [\varepsilon(\sigma)(1 + \sigma)^2] \geq 0. \quad (28)$$

Так как  $\varepsilon(\sigma) \leq 0$ , то эта разность при всех  $\sigma$  положительна (или равна нулю). При этом равенство нулю имеет место только в одной точке — при  $\sigma=1$ , в которой

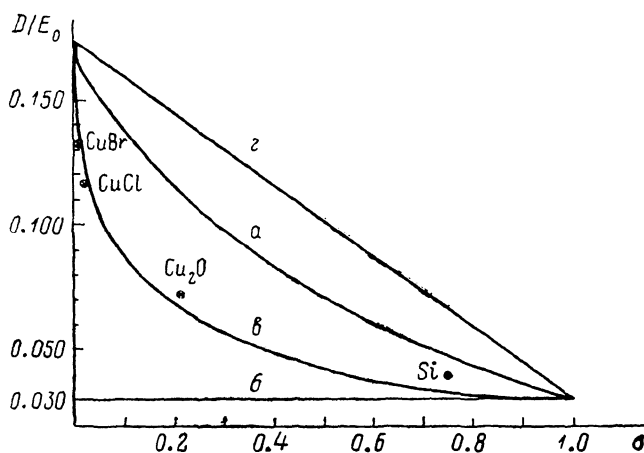
$$(1 + \sigma) \varepsilon'(\sigma) + \varepsilon(\sigma) = 0 \quad (\sigma = 1). \quad (29)$$

Тем самым при всех  $\sigma \neq 1$  наше дифференциальное неравенство (18) точнее, чем неравенство (26). Поэтому точнее и вытекающие из него границы для величины  $\varepsilon$  и связанной с ней величины  $W$  (25).

Следует еще отметить, что в работе [13] для оценки энергии связи биэкситона использовалось неравенство

$$W''(\sigma) \leq 0, \quad (30)$$

более грубое, чем (26), и, разумеется, более грубое, чем неравенство (18).



Зависимость энергии диссоциации  $D(\sigma)$  биэкситона от отношения эффективных масс электрона и дырки  $\sigma = m_e/m_h$ .

Энергия диссоциации выражена в экситонных атомных единицах.  $E_0$ , где  $E_0 = m_e m_h e^4 / (m_e + m_h) h^2 \kappa^2$ . Энергия связи биэкситона  $W(\sigma) = -D(\sigma)$ .  $a$  — верхняя граница энергии диссоциации по (21),  $б$  — нижняя граница по (23),  $з$  — аппроксимация по (34),  $z$  — верхняя граница из [13].

Наряду с работами [12, 13] следует отметить границы энергии биэкситона, полученные в [14, 15]. Эти границы основываются на монотонном возрастании функции

$$(1 + \sigma) \varepsilon(\sigma) = W(\sigma) - 1 \quad (31)$$

при изменении величины  $\sigma$  и имеют вид

$$\varepsilon(\sigma) \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases} (1 + \sigma_0) \varepsilon(\sigma_0) / (1 + \sigma), \quad \sigma, \sigma_0 \leq 1. \quad (32)$$

Верхний знак неравенства следует брать при  $\sigma \geq \sigma_0$ , а нижний знак — при  $\sigma \leq \sigma_0$ . В частном случае, когда  $\sigma_0 = 1$ , (32) и наша формула (23) эквивалентны, а в общем случае наши границы (21) и (22) точнее, чем границы (32).

На рисунке кривая  $a$  изображает верхнюю границу энергии диссоциации биэкситона  $D(\sigma) = |W(\sigma)|$ , полученную из нашей формулы (21) с использованием известных значений энергий молекулы водорода и позитрония, а прямая линия  $z$  изображает аналогичную границу, полученную в [13] на основе неравенства (30). Нижняя граница энергии диссоциации биэкситона изображена прямой линией  $б$ . В данном случае результаты применения формул (23) и (30) совпадают, так как в расчете этой границы была использована эталонная точка  $\sigma_0 = 1$ , в которой оба неравенства имеют одинаковую точность.

#### 4. Приближенная формула для энергии биэкситона

В работах [16, 17] было найдено, что зависимость энергий кулоновских систем от масс частиц хорошо описывается усеченными разложениями типа Борна—Оппенгеймера. Аналогичный подход — разложение энергии биэкситона в ряд по степеням параметра  $\sigma^{1/2}$  — использовался в работах [12, 13, 18, 19]. Однако при этом точный учет условия симметрии (6) заменялся более слабым условием, налагаемым на первую производную от аппроксимирующей функции в точке  $\sigma=1$ .

Здесь предлагается новая аппроксимация для энергии биэкситона, строго удовлетворяющая условию симметрии и учитывающая уточненное значение энергии молекулы позитрония [3, 5]. Она имеет следующий вид:

$$\varepsilon(\sigma) \approx \sum_{k=0}^N a_k (\sigma^{k/2} + \sigma^{N-k/2}) / (1 + \sigma^{N+1}). \quad (33)$$

Входящие сюда параметры  $a_k$  следует определить из условия совпадения аппроксимации (33) с точными значениями  $\varepsilon(\sigma)$  в  $N+1$  эталонных точках. При этом структура формулы (33) обеспечивает строгое выполнение условия (6) при всех  $\sigma$ .

Используя энергии трех эталонных систем: молекулы водорода с неподвижными [8] и движущимися ядрами (протонами) [9] и молекулы позитрония [3, 5] и положив  $N+1=3$ , мы определили значения коэффициентов:  $a_0 = -1.1744756$ ,  $a_1 = 0.43722725$ ,  $2a_2 = 0.44419670$ . Перейдя затем от величины  $\varepsilon$  к энергии связи биэкситона (25), мы получили для нее следующую аппроксимацию:

$$W(\sigma) \approx 1 + [a_0(\sigma + \sigma^{-1}) + a_1(\sigma^{1/2} + \sigma^{-1/2}) + 2a_2] / (\sigma + 1 + \sigma^{-1}). \quad (34)$$

Она позволяет определить энергию связи биэкситона при всех  $\sigma$  с вероятной погрешностью не более 1—3%. Рассчитанная по этой формуле зависимость энергии диссоциации биэкситона  $D(\sigma) = |W(\sigma)|$  от  $\sigma$  представлена на рисунке кривой *e*. Сравнение с экспериментальными точками, соответствующими энергиям диссоциации биэкситонов в кристаллах CuBr, CuCl и Cu<sub>2</sub>O [13], а также в Si [20], обнаруживает вполне удовлетворительное согласие теории с экспериментом.

Итак, найденные здесь с помощью соотношения выпуклости для энергии (18) границы энергии биэкситона, в частности уточненная верхняя граница энергии диссоциации биэкситона, являются полезным дополнением к уже имеющимся границам энергии биэкситона, предложенным в [12—15]. Они позволяют, например, исключить некоторые заведомо неверные значения энергии диссоциации биэкситонов, лежащие вне интервала между строгими верхней и нижней границами. Для быстрых и практических оценок энергии биэкситонов при произвольных значениях  $\sigma$  можно использовать аппроксимацию (34), являющуюся уточненным аналогом усеченного разложения этой энергии в ряд Борна—Оппенгеймера.

В заключение заметим, что наши основные формулы справедливы не только для биэкситонов, но и для многочастичных электронно-дырочных комплексов, содержащих произвольное (но одинаковое) число электронов и дырок. В частности, для таких комплексов остаются в силе все наши формулы для границ энергии, а аналитическая аппроксимация энергии, даваемая формулой (34), будет нуждаться только в конкретизации численных коэффициентов. Поэтому полученные здесь результаты обладают достаточной общностью и могут применяться к разнообразным многочастичным системам.

#### С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Brinkman W. F., Rice T. M., Bell B. // Phys. Rev, 1973, V. B8. N 4. P. 1570—1580.  
 [2] Sharma R. P. // Phys. Rev. 1968. V. 170. N 3. P. 770—772; V. 171. N 1. P. 36—42.

- [3] Lee M. A., Vashishta P., Kalia R. K. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. N 26. P. 2422—2425.
- [4] Vukajlović F. R., Vinitiski S. I. // Phys. St. Sol. (b). 1986. V. 138. N 2. P. 553—557; Phys. Lett. A. 1986. V. 118. N 4. P. 185—187.
- [5] Ho Y. K. // Phys. Rev. 1986. V. A33, N 5. P. 3584—3587.
- [6] Hylleraas E. A., Ore A. // Phys. Rev. 1947. V. 71 N 8. P. 493—496.
- [7] Akimoto O., Hanamura E. // J. Phys. Soc. Jap. 1972. V. 33. N 6. P. 1537—1544.
- [8] Bishop D. M., Cheung L. M. // Adv. Quant. Chem. 1980. V. 12. N 1. P. 1.
- [9] Wolniewicz L. // J. Chem. Phys. 1983. V. 78. N 10. P. 6173—6181.
- [10] Ребане Т. К. // Теорет. и матем. физика. 1983. Т. 56. № 3. С. 432—438.
- [11] Hellmann H. Einführung in die Quantenchemie. Vienna, 1937. 285 S; Feynman R. P. // Phys. Rev. 1939. V. 56. N 4. P. 340—343.
- [12] Adamowski J., Bednarek S., Suffczynski M. // Sol. St. Comm. 1971. V. 9. N 12. P. 2037—2038.
- [13] Adamowski J., Bednarek S., Suffczynski M. // Philos. Mag. 1972. V. 26. N 1. P. 143—151.
- [14] Gutljanski E. D., Khartsiev V. E. // Sol. St. Comm. 1973. V. 12. N 11. P. 1087—1090.
- [15] Гутлянский Е. Д. // Автореф. канд. дис. Ростов н/Д, РГУ, 1982.
- [16] Гурьянов А. В., Ребане Т. К. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. № 5. С. 1698—1701.
- [17] Гурьянов А. В., Пенкина Н. Н., Ребане Т. К. // ФТТ. 1984. Т. 26. № 5. С. 1436—1441.
- [18] Wehner R. K. // Sol. St. Comm. 1969. V. 7. N 5. P. 457—458.
- [19] Handel P. H. // Phys. Rev. 1973. V. B7. N 12. P. 5183—5186.
- [20] Thewalt M. L., Rostoworowski J. A. // Sol. St. Comm. 1978. V. 25. N 10. P. 991.

Ленинградский государственный университет  
Ленинград

Поступило в Редакцию  
21 декабря 1988 г.  
В окончательной редакции  
17 июля 1989 г.