УДК 530.145

ЭХО В ДИНАМИКЕ $SU(1,1)$ ПРИ МАЛЫХ ВРЕМЕНАХ ОБРАТИМОЙ ДЕФАЗИРОВКИ

Э. А. Мухамадиев

Найденный методом Вея—Нормана оператор эволюции квантовой системы с гамильтонианом, линейным по генераторам $SU(1, 1)$, используется для вычисления формы двухимпульсного осцилляторного эха с учетом расфазировки осцилляторов во время действия импульсов.

При вычислении параметров сигналов эха (интенсивности, времени возникновения, формы и т. д.) иногда можно пренебречь поперечной обратимой релаксацией T_2^* во время действия возбуждающих импульсов [1]. Это приближение справедливо, когда длительность импульсов $\Delta t \ll T_2^*$, т. е. когда резонансная частота Раби ω_R много больше спектральной ширины неоднородно-уширенной линии. Однако для многих объектов это не так [2-4]. Теоретическое описание особенностей формирования сигналов светового эха в двухуровневой системе при возбуждении протяженными импульсами было впервые представлено в [5]. В данной работе рассматривается квантовая система, описываемая гамильтонианом, линейным по генераторам группы $SU(1, 1)$, и вычисляется форма осцилляторного эха в случае $\Delta t \gg T_2^*$.

1. Эволюция

Рассмотрим гамильтониан вида

$$H = \hbar\omega 2K_0 + \beta K_+ \exp(-i\Omega_0) + \beta^* K_- \exp(i\Omega_0), \tag{1}$$

где $K_0 = {}^1/_2 (a^+a + {}^1/_2)$, $K_+ = {}^1/_2 (a^+)^2$, $K_- = {}^1/_2 a^2$; a^+ и a — бозонные операторы рождения и уничтожения; $\Omega_0 = \int_0^t \omega_0 dt'$; $\omega_0 = 2\omega - \Delta\omega$; $\beta = |\beta| \exp(i\delta) \in C$.

Если $\Delta\omega \ll 2\omega$, то гамильтониан (1) может описывать (в приближении вращающейся волны) квантовый осциллятор с частотой ω, квадрупольный момент которого взаимодействует с градиентом классического внешнего поля с частотой ω_0 (например, одномодовый вырожденный параметрический усилитель с классической накачкой [6]). Тогда $\Delta\omega$ — расстройка, $|\beta|$ — константа взаимодействия.

Пусть $H = H_0 + V$, где $H_0 = \hbar\omega 2K_0$. Тогда оператор эволюции $U(t, 0) = U_0(t, 0) U_I(t, 0)$, где $U_0 = \exp(-i\Omega K_0)$, $\Omega = \int_0^t 2\omega dt' = \Omega_0 + \Delta\omega t$. Оператор $U_I(t, 0)$, соответствующий гамильтониану взаимодействия

$$H_I = U_0^{-1} V U_0 = \beta K_+ \exp(i\Delta\omega t) - \beta^* K_- \exp(-i\Delta\omega t), \tag{2}$$

будем искать в виде [1, 7, 8]

$$U_I = \exp\{2g_0(t) K_0\} \exp\{g_+(t) K_+\} \exp\{g_-(t) K_-\}, \tag{3}$$

где функции g_0, g_+, g_- должны быть найдены из уравнений движения на U_I

$$\dot{U}_I U_I^{-1} = \frac{1}{i\hbar} H_I \equiv \lambda K_+ - \lambda^* K_-, \quad U_I(t, 0)|_{t=0} = \hat{1}, \tag{4}$$

$\lambda = (\beta/i\hbar)\exp(i\Delta\omega t)$, а точка над U_I обозначает дифференцирование по t.

Используя закон умножения в алгебре Ли $su(1, 1)$

$$[K_+, K_-] = -2K_0, \quad [K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \tag{5}$$

и известную формулу [1]

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \ldots, \tag{6}$$

получим систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка (из коэффициентов при K_0, K_+ и K_-)

$$\begin{gathered} \dot{g}_+ e^{2g_0} + g_+^2 \dot{g}_- e^{2g_0} = \lambda, \\ \dot{g}_- e^{-2g_0} = -\lambda^*, \\ \dot{g}_0 = \dot{g}_- g_+, \quad g_0(0) = g_+(0) = g_-(0) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Положив $\dot{g}_0 = u$, ее можно свести к одному уравнению Риккати

$$\dot{u} - u^2 + i\Delta\omega u + |\lambda|^2 = 0, \quad u(0) = 0. \tag{8}$$

Выше (для ясности изложения) описан известный алгебраический (Вея—Нормана) метод решения эволюционных задач квантовой механики.

Заменой $u = -\dot{v}/v$ уравнение (8) сводится к линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение

$$u = |\lambda|^2 [\exp(\xi t) - 1]/[p_2 \exp(\xi t) - p_1], \tag{9}$$

где

$$p_{1,2} = {}^1/_2(-i\Delta\omega \pm \xi), \quad \xi = \sqrt{\omega_R^2 - \Delta\omega^2} \quad (\omega_R = 2|\lambda|). \tag{10}$$

Функции g_-, g_+, g_0 имеют вид

$$g_- = \frac{2\beta^*}{i\hbar} \frac{\operatorname{sh}\left(\xi \frac{t}{2}\right)}{A(t)}, \quad g_+ = \frac{2\beta}{i\hbar\xi^2} \operatorname{sh}\left(\xi \frac{t}{2}\right) A(t), \quad g_0 = \ln\left\{\frac{\xi^2 \exp(i\Delta\omega t)}{A^2(t)}\right\}, \tag{11}$$

где

$$A(t) = \xi \operatorname{ch}\left(\xi \frac{t}{2}\right) + i\Delta\omega \operatorname{sh}\left(\xi \frac{t}{2}\right). \tag{12}$$

Как видно из формулы (10), особенностью $SU(1, 1)$-динамики является необычная зависимость обобщенной частоты Раби от величины расфазировки $\Delta\omega$ (обусловленная различием коммутационных соотношений алгебры $su(1, 1)$ и спиновой алгебры $su(2)$).

Хотя гамильтониан (1) записан в приближении вращающейся волны, мы все же можем в рамках этой модели учитывать расстройки порядка резонансной частоты Раби $\omega_R = 2|\beta|/\hbar$, так как обычно $\omega_R \ll \omega_0$ даже для такой сильной (классической) накачки, которую мы рассматриваем. Следовательно, при $\omega_R \sim \Delta\omega \ll \omega_0$ возможна ситуация, когда частота Раби ξ будет уменьшаться с ростом расстройки, или даже станет равной нулю, т. е. спектр квантового осциллятора не изменится, несмотря на наличие взаимодействия, описываемого гамильтонианом (2).

2. Отклик

Вычислим квадрупольный момент $q\langle K_+ + K_-\rangle$ квантовой системы (1) после воздействия двух импульсов (с промежутком τ) длительностью соответственно Δt_1 и Δt_2 (рис. 1). С момента времени $t=0$ до $t=t_1$ (и с $t=t_2$ до $t=t_3$) система описывается гамильтонианом H (состояние изменяется под действием оператора $U = U_0 U_I$), а в промежутке между импульсами и после них — гамильтонианом H_0, т. е. идет свободная эволюция под действием U_0.

Обозначим начальное состояние $|\Psi(0)\rangle$. Тогда $|\Psi(t)\rangle=\tilde{U}(t, 0)|\Psi(0)\rangle$, где

$$\tilde{U}=U_0(t, t_3)\,U(t_3, t_2)\,U_0(t_2, t_1)\,U(t_1, 0)=U_0(t, 0)\,U_I(t_3, 0)\,U_I^{-1}(t_2, 0)\,U_I(t_1, 0)=$$
$$=\exp\{(2g_0^3-i\Omega)K_0\}\exp\{g_+^3K_+\}\exp\{g_-^{23}K_-\}\exp\{-g_+^2K_+\}\exp\{2g_0^{12}K_0\}\times$$
$$\times\exp\{g_+^1K_+\}\exp\{g_-^1K_-\} \tag{13}$$
$$(g_n^{ij}\equiv g_n^i-g_n^j\equiv g_n(t_i)-g_n(t_j);\quad i, j\in\{1, 2, 3\},\quad n\in\{0, +, -\}).$$

Выберем начальную матрицу плотности равной

$$\rho=\exp(-H_0/kT)/\mathrm{Tr}\,[\exp(-H_0/kT)]. \tag{14}$$

Тогда

$$Q(\Delta\omega)\equiv q\langle K_++K_-\rangle=2q\,\mathrm{Re}\,\langle K_+\rangle=2q\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{Tr}\,\rho}\mathrm{Tr}\,(\rho\tilde{U}^{-1}K_+\tilde{U})\right]. \tag{15}$$

Используя явное выражение (13) для $\tilde{U}$ и формулу (6), получим

$$\tilde{U}^{-1}K_+\tilde{U}=BK_0+\ldots, \tag{16}$$

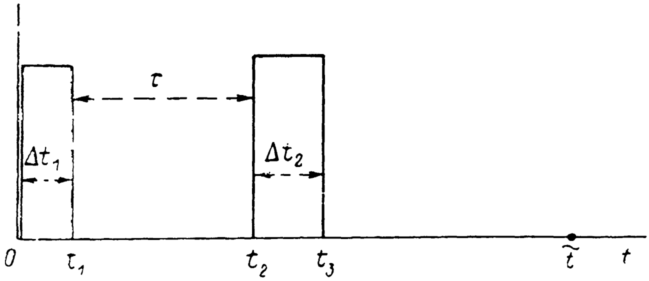

Рис. 1. Импульсы, поданные с интервалом τ.

где

$$B=2C\exp(i\Omega-2g_0^3)\{g_-^{23}-g_-^1C\exp(2g_0^{21})\}, \tag{17}$$
$$C=[1+g_-^{23}\{g_+^1\exp(2g_0^{12})-g_+^2\}]. \tag{18}$$

В формуле (16) опущены члены, пропорциональные K_+ и K_-, так как след в (15) можно вычислить в базисе собственных векторов оператора K_0, в котором $\mathrm{Tr}\,K_+=\mathrm{Tr}\,K_-=0$. Равенство (15) принимает вид

$$Q(\Delta\omega)=q\,\mathrm{Re}\,\{\mathrm{cth}\,(\varkappa/2)\,B\exp(i\Omega)\}, \tag{19}$$

где $\varkappa=\hbar\omega/kT$, а B после подстановки всех функций $g_n(t_i)$ запишется следующим образом:

$$B=\frac{2\beta^*}{i\hbar\xi^2A_1(A_2)^2}\left[\exp(i\Delta\omega(t_2-t_1-t_3))\left\{-(A_1)^2\,\mathrm{sh}_1\left(A_3+\frac{\omega_R^2}{\xi}\mathrm{sh}_{23}\,\mathrm{sh}_2\right)^2\right\}+\right.$$
$$+\exp(-i\Delta\omega t_3)\left\{A_1A_2\xi\,\mathrm{sh}_{23}\left(1+\frac{\omega_R^2}{\xi^2}\mathrm{sh}_1(1+\mathrm{sh}_1)\right)\left(A_3+\frac{\omega_R^2}{\xi}\mathrm{sh}_{23}\,\mathrm{sh}_2\right)\right\}+$$
$$\left.+\exp(i\Delta\omega(t_1-t_2-t_3))\left\{-\omega_R^2(\mathrm{sh}_{23})^2\,\mathrm{sh}_1(A_2)^2\left(1+\frac{\omega_R^2}{\xi^2}(\mathrm{sh}_1)^2\right)\right\}\right], \tag{20}$$

где $\mathrm{sh}_i=\mathrm{sh}\left(\xi\frac{t_i}{2}\right)$, $\mathrm{sh}_{ij}=\mathrm{sh}\left(\frac{\xi}{2}(t_i-t_j)\right)$, а функция $A_i=A(t_i)$ определена в (12).

3. Эхо

Эхо — явление, которое по сути своей должно наблюдаться спустя примерно время τ после окончания второго импульса [1]. Два первых члена в (20) — это индукции соответственно от первого и второго импульсов, а они быстро затухают при $t > t_3$, что можно явно показать, проинтегрировав эти выражения по всем расстройкам $\Delta\omega$. Поэтому из всей формулы (20) мы оставим только выражение при $\exp\{i\Delta\omega(t_1-t_2-t_3)\}$, обозначив $\tilde{t} \equiv t_3+t_2-t_1=2\tau+\Delta t_1+\Delta t_2$

$$Q(\Delta\omega)\big|_{t>t_3} \equiv Э(\Delta\omega) = \operatorname{cth}\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\omega_R^3 p}{\xi^2 \rho_1}\operatorname{sh}^2\left(\xi\frac{\Delta t_2}{2}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{\omega_R^2}{\xi^2}\operatorname{sh}^2\left(\xi\frac{\Delta t_1}{2}\right)\right)\cos\left[\Delta\omega(t-\tilde{t})+\omega_0 t+\varphi_1+\delta\right], \tag{21}$$

$$\varphi_1=\left\{\frac{\xi}{\Delta\omega}\operatorname{cth}\left(\xi\frac{\Delta t_1}{2}\right)\right\},\quad \rho_1=\left\{\xi^2\operatorname{cth}^2\left(\xi\frac{\Delta t_1}{2}\right)+\Delta\omega^2\right\}^{1/2} \tag{22}$$

(нас будет интересовать только форма эхо-отклика, поэтому все, что относится к пространственному распределению эха, зашифровано в фазе комплексного числа Э).

Для получения эха нужно проинтегрировать выражение (21) по всем $\Delta\omega$ с какой-нибудь функцией распределения $f(\Delta\omega)$

$$Э=\int_{-\infty}^{\infty} Э(\Delta\omega) f(\Delta\omega)\, d\Delta\omega. \tag{23}$$

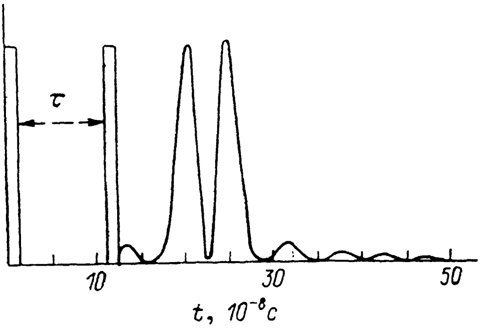

Рис. 2. Результат численного расчета зависимости интеграла (23) от времени.

Положив в (21) параметр расстройки $\Delta\omega=0$ везде, кроме слагаемого $\Delta\omega(t-\tilde{t})$ под знаком косинуса (где он наследуется из оператора свободной эволюции U_0), можно показать, что в результате интегрирования мы получим известное выражение для формы осцилляторного эха (см. формулу (4.59) в [1]). Таким образом, (21) является непосредственным обобщением частного случая, получаемого без учета расфазировки элементарных осцилляторов во время действия возбуждающих импульсов.

На рис. 2 представлена (численно рассчитанная) зависимость интеграла (23) от времени при $T=1$ К, $\omega_0=10^{10}$ Гц, $\omega_R=10^8$ Гц, $\delta=0$, $\Delta t_1=\Delta t_2=10^{-8}$ с, $\tau=10^{-7}$ с для равномерного распределения с шириной $2\omega_R$. Результат — двугорбое осцилляторное эхо, аналогичное двугорбому световому эху, впервые теоретически описанному в [5].

Автор благодарен У. Х. Копвиллему за постановку задачи и постоянную поддержку, С. В. Сазонову за полезные обсуждения и Ю. В. Фофанову за помощь в численных расчетах.

Список литературы

[1] Копвиллем У. Х., Пранц С. В. Поляризационное эхо. М.: Наука, 1985. 256 с.
[2] Lino P. F., Hartman S. R. // Phys. Lett. A. 1973. V. 44. N 2. P. 361—370.
[3] Самарцев В. В. и др. // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. № 6. С. 1979—1986.
[4] Смоляков Б. П., Хаймович Е. П. // УФН. 1982. Т. 136. № 2. С. 317—361.
[5] Самарцев В. В., Трайбер А. С. // ФТТ. 1979. Т. 21. № 9. С. 2784—2795.
[6] Gerry C. C. // Phys. Rev. A. 1987. V. 35. N 5. P. 2146—2149.
[7] Wei J., Norman E. // J. Math. Phys. 1963. V. 4. N 2. P. 575—587.
[8] Dattoli G., Gallardo J., Torre A. // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. N 4. P. 2789—2794.

Тихоокеанский океанологический институт ДВО АН СССР
Владивосток

Поступило в Редакцию
28 апреля 1989 г.