УДК 537.226

КОЛЕБАНИЯ ДОМЕННЫХ ГРАНИЦ В РЕАЛЬНЫХ СЕГНЕТОЭЛАСТИКАХ

Б. М. Даринский, А. С. Сидоркин

Получен закон дисперсии изгибных колебаний доменных границ в сегнетоэластических кристаллах, содержащих точечные дефекты, для произвольных направлений волнового вектора $\mathbf{k}$ относительно направления спонтанного сдвига $\mathbf{s}$. При $\mathbf{k}$, параллельном $\mathbf{s}$, в области больших k скорость волны изгибных смещений границы близка к скорости волны Рэлея, а в области малых k — к скорости объемной сдвиговой волны.

Среди различных типов упругих поверхностных волн, интенсивно используемых на практике, значительный интерес представляют волны, локализованные вблизи доменных границ в сегнетоэластиках и связанные с изгибными смещениями доменных границ. До сих пор такие волны исследовались в идеализированных бездефектных материалах [1]. Как будет показано ниже, наличие дефектов реального кристалла вносит качественные изменения в рассматриваемые колебания, меняя не только скорость распространения указанных волн, но и сам закон их дисперсии.

При решении данной задачи воспользуемся наиболее общим подходом [2, 3], формирующим результирующую волну в виде совокупности характерного набора объемных волн трехмерного изотропного упругого континуума. Такой подход, заостряя внимание на граничных условиях задачи, позволяет, с одной стороны, глубже понять физическую сторону задачи, а с другой — установить преемственность с традиционно исследуемыми в таком формализме [2, 3] типами волн.

В отличие от распространения рэлеевской волны вдоль свободной поверхности упругого континуума, где все направления распространения волн равноправны, в данном случае существует выделенное направление — направление спонтанного сдвига $\mathbf{s}$ — и естественно ожидать зависимость результата от относительной ориентации волнового вектора $\mathbf{k}$ по отношению к $\mathbf{s}$. Такая зависимость, очевидно, понижает симметрию задачи, с учетом чего результирующее решение естественно искать в виде модифицированного полного набора объемных волн трехмерного упругого континуума.

Для области кристалла, расположенной выше несмещенной границы ($z>0$), такой набор, удовлетворяющий условиям $\operatorname{rot} \mathbf{u}=0$, $\operatorname{div} \mathbf{v}=0$, $\operatorname{div} \mathbf{w}=0$, может быть представлен в виде

$$\mathbf{u}=(ik\cos\varphi,\ ik\sin\varphi,\ -\alpha_\parallel)\,u^+\exp\{i(k_1x+k_2y)-\alpha_\parallel z\},$$
$$\mathbf{v}=(\alpha_\perp\cos\varphi,\ \alpha_\perp\sin\varphi,\ ik)\,v^+\exp\{i(k_1x+k_2y)-\alpha_\perp z\},$$
$$\mathbf{w}=(-ik\sin\varphi,\ ik\cos\varphi,\ 0)\,w^+\exp\{i(k_1x+k_2y)-\alpha_\perp z\}. \tag{1}$$

Здесь $k_1=k\cos\varphi$; $k_2=k\sin\varphi$; угол φ отсчитывается от направления спонтанного сдвига, совпадающего с осью x. Коэффициенты затухания продольной и поперечных волн $\alpha_\parallel=(k^2-\rho\omega^2/(\lambda+2\mu))^{1/2}$, $\alpha_\perp=(k^2-\rho\omega^2/\mu)^{1/2}$; k — волновой вектор; ω — частота колебания; ρ — плотность среды; λ, μ — коэффициенты Ляме.

Для области кристалла, расположенной ниже границы ($z < 0$), соответствующий набор есть

$$\mathbf{u} = (ik\cos\varphi,\ ik\sin\varphi,\ \alpha_\parallel)\, u^- \exp\{i\,(k_1x + k_2y) + \alpha_\parallel z\},$$
$$\mathbf{v} = (-\alpha_\perp\cos\varphi,\ -\alpha_\perp\sin\varphi,\ ik)\, v^- \exp\{i\,(k_1x + k_2y) + \alpha_\perp z\},$$
$$\mathbf{w} = (-ik\sin\varphi,\ ik\cos\varphi,\ 0)\, w^- \exp\{i\,(k_1x + k_2y) + \alpha_\perp z\}. \tag{2}$$

В соответствии с законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \tag{3}$$

и определением тензора деформации

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{U}=\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$, компоненты тензора напряжений в месте расположения непрогнутой границы при подходе к ней сверху и снизу имеют соответственно следующий вид:

$$\sigma_{13}^+ = [-2\mu ik\alpha_\parallel\cos\varphi u^+ - \mu\,(k^2+\alpha_\perp^2)\cos\varphi v^+ + \mu ik\alpha_\perp\sin\varphi w^+]\exp(ik_1x + ik_2y),$$
$$\sigma_{23}^+ = [-2\mu ik\alpha_\parallel\sin\varphi u^+ - \mu\,(k^2+\alpha_\perp^2)\cos\varphi v^+ - ik\mu\alpha_\perp\cos\varphi w^+]\exp(ik_1x + ik_2y),$$
$$\sigma_{33}^+ = [(2\mu k^2 - \rho\omega^2)\, u^+ - 2i\mu k\alpha_\perp v^+]\exp(ik_1x + ik_2y),$$
$$\sigma_{13}^- = [2\mu ik\alpha_\parallel\cos\psi u^- - \mu\,(k^2+\alpha_\perp^2)\cos\varphi v^- - ik\mu\alpha_\perp\sin\varphi w^-]\exp(ik_1x + ik_2y),$$
$$\sigma_{23}^- = [2\mu ik\alpha_\parallel\sin\varphi u^- - \mu\,(k^2+\alpha_\perp^2)\sin\varphi v^- + ik\mu\alpha_\perp\cos\varphi w^-]\exp(ik_1x + ik_2y),$$
$$\sigma_{33}^- = [(2\mu k^2 - \rho\omega^2)\, u^- + 2i\mu k\alpha_\perp v^-]\exp(ik_1x + ik_2y). \tag{5}$$

В кристалле с дефектами, равномерно распределенными по объему с достаточно высокой объемной плотностью n, так что среднее расстояние между дефектами $l=n^{-1/3} \ll \lambda$, где λ — длина волны изгибных смещений доменной стенки сегнетоэластика, действие дефектов на границу можно учесть через эффективную квазиупругую силу, пропорциональную смещению границы ξ. При этом, согласно расчетам [4], коэффициент квазиупругости

$$C = \varkappa/l^2, \quad \varkappa = 4\pi\mu\varepsilon_0^2 a, \tag{6}$$

где ε_0 — спонтанная деформация, a — эффективный радиус взаимодействия границы с дефектом.

С учетом этого совокупность граничных условий, которым должно удовлетворять смещение границы, можно записать в виде

$$U_1^+ - U_1^- = 2\varepsilon_0\xi,\quad U_2^+ = U_2^-,\quad U_3^+ = U_3^-,\quad 2\varepsilon_0\sigma_{13}^+ = 2\varepsilon_0\sigma_{13}^- = C\xi,\quad \sigma_{23}^+ = \sigma_{23}^-,\quad \sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^-. \tag{7}$$

Подставляя в (7) соотношения (1)—(5), мы получим систему семи однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных u^+, v^+, w^+, u^-, v^-, w^-, ξ. Вводя новые переменные $\mathscr{U}^+=u^++u^-$, $V^+=v^++v^-$, $W^+=w^++w^-$, $\mathscr{U}^-=u^+-u^-$, $V^-=v^+-v^-$, $W^-=w^+-w^-$ и производя очевидные сокращения, указанную систему уравнений можно переписать в виде

$$ik\mathscr{U}^- + \alpha_\perp V^+ - ik\,\mathrm{tg}\,\varphi W^- = 2\varepsilon_0\xi/\cos\varphi,$$
$$ik\mathscr{U}^- + \alpha_\perp V^+ + ik\,\mathrm{ctg}\,\varphi W^- = 0,$$
$$\alpha_\parallel\mathscr{U}^+ - ikV^- = 0,$$
$$-\frac{\alpha_\parallel}{\alpha_\perp}\mathscr{U}^+ - SV^- + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi W^+ = 0,$$
$$-\frac{\alpha_\parallel}{\alpha_\perp}\mathscr{U}^- - SV^+ + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi W^- = C\xi/2\mu ik\alpha_\perp\varepsilon_0\cos\varphi,$$
$$\frac{\alpha_\parallel}{\alpha_\perp}\mathscr{U}^+ + SV^- + \frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\varphi W^+ = 0,$$
$$S\mathscr{U}^- - V^+ = 0. \tag{8}$$

Здесь

$$S=(2\mu k^2-\rho\omega^2)/2\mu k i\alpha_\perp.$$

Нетрудно видеть, что проведенная замена переменных привела к расщеплению уравнений системы (8), разбив их на две подсистемы: уравнения с номерами три, четыре и шесть из (8) и остальные уравнения. Первая подсистема разрешима только при тривиальном условии $\omega=0$. Условием разрешимости второй подсистемы является равенство нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} ik & \alpha_\perp & -ik\,\mathrm{tg}\,\varphi & -2\varepsilon_0/\cos\varphi \\ ik & \alpha_\perp & ik\,\mathrm{ctg}\,\varphi & 0 \\ -\dfrac{\alpha_\parallel}{\alpha_\perp} & -S & \dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi & -C/ik\alpha_\perp\mu\varepsilon_0\cos\varphi \\ S & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

Раскрывая его с учетом конкретных выражений для $\alpha_\perp$, $\alpha_\parallel$, S, в общем случае имеем

$$4\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c_t^2k^2}}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c_l^2k^2}}-\left(2-\frac{\omega^2}{c_t^2k^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{c_t^2k^2}\left(1-\frac{\omega^2}{c_t^2k^2}\right)\mathrm{tg}^2\,\varphi+$$

$$+\frac{\omega^2}{c_t^2k^2}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{c_l^2k^2}}\,\frac{c}{2\mu\varepsilon_0^2k}\,(1+\mathrm{tg}^2\,\varphi)=0. \tag{10}$$

Здесь $c_t=\sqrt{\mu/\rho}$, $c_l=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ — скорости поперечной и продольной объемных звуковых волн соответственно.

При $C=0$, т. е. в отсутствие дефектов, $\omega=vk$, где скорость волны изгибных смещений v определяется из уравнения

$$4\sqrt{1-\frac{v^2}{c_t^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c_l^2}}-\left(2-\frac{v^2}{c_t^2}\right)^2+\frac{v^2}{c_t^2}\left(1-\frac{v^2}{c_t^2}\right)\mathrm{tg}^2\,\varphi=0. \tag{11}$$

Хорошо видно, что зависимость $\omega=\omega(\mathbf{k})$ здесь анизотропна, так как скорость волны v существенно зависит от направления распространения волны. При $\varphi=0$, т. е. вдоль направления сдвига, распространяется волна Рэлея. На языке двойникующих дислокаций динамика соответствующих смещений определяется взаимодействием ансамбля движущихся краевых дислокаций. При $\varphi\neq0$ к краевым дислокациям подмешиваются винтовые, обусловленные появлением прогибов границы вдоль направления, нормального к сдвигу. При этом скорость волны v растет, локализация волны уменьшается, и при $\varphi=\pi/2$ она переходит в объемную чисто сдвиговую волну со скоростью $v=c_t$.

Как видно из общего уравнения (10), в кристалле с дефектами связь ω с k качественно меняется. Рассмотрим это на примере простейшей ориентации волны с $\varphi=0$, распространяющейся вдоль направления сдвига. Уравнение (10) здесь перейдет в следующее:

$$4\sqrt{1-\frac{v^2}{c_l^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c_t^2}}-\left(2-\frac{v^2}{c_t^2}\right)^2+\frac{v^2}{c_t^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c_l^2}}\,\frac{C}{2\mu\varepsilon_0^2k}=0. \tag{12}$$

Согласно (12), скорость волны теперь уже в общем случае зависит от k. При этом высокочастотные колебания, т. е. колебания в области больших значений волнового вектора распространяются со скоростью волн Рэлея, а скорость низкочастотных колебаний (малые k) приближается к c_t.

Смена режимов колебаний происходит при $C/2\mu\varepsilon_0^2k=a\lambda/l^2\sim1$, что при $a\sim10^{-7}$ см и $l\sim10^{-6}$ см ($n\sim10^{18}$ см$^{-3}$) дает $\lambda\sim10^{-5}$ см.

В заключение отметим, что используемое здесь континуальное описание действия закрепляющих границу дефектов ($\lambda>l$) выполняется вплоть до $l\sim a$, т. е. практически во всей области, где работает приближение геометрической границы.

Список литературы

[1] Даринский Б. М., Сидоркин А. С. // ФТТ. 1987. Т. 29. № 1. С. 3—7.
[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
[3] Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
[4] Сидоркин А. С., Даринский Б. М., Пачевская Г. Н. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1987. Т. 51. № 2. С. 389—392.

Воронежский государственный университет
Воронеж

Поступило в Редакцию
10 апреля 1989 г.