1989 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 31, в. 11
1989 SOLID STATE PHYSICS Vol. 31, N 11

УДК 537.311.31

К ТЕОРИИ МАГНИТНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ СКОРОСТИ ЗВУКА В МЕТАЛЛЕ

И. А. Ахиезер, *Д. П. Белозоров*, *З. А. Спольник*

Осцилляции скорости звука в металле при изменении магнитного поля анализируются в полумикроскопическом подходе на основании модели желе. Показано, что осцилляции скорости звука не выражаются непосредственно через осцилляции намагниченности. Эффективная постоянная магнитоупругого взаимодействия $f=\partial\left\langle s^2\right\rangle/\partial\left\langle M^2\right\rangle$ (s — скорость звука, M — намагниченность) в модели желе оказывается отрицательной в парамагнитной области и положительной в ферромагнитной области, обращаясь в бесконечность на границе этих областей. Амплитуда магнитных осцилляций скорости звука зависит от поперечной составляющей волнового вектора.

Исследованию квантовых осцилляций скорости звука в металле при изменении магнитного поля посвящено большое число работ [1]. Идея используемого при этом подхода заключается в следующем: в выражение для свободной энергии феноменологически вводится энергия магнитоупругой связи; в результате упругие модули и, следовательно, скорость звука связываются с вектором намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ как функцией магнитного поля $\mathbf{H}$. Что же касается вектора намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{H})$, то его осцилляции определяются классической теорией Ландау [2] и ее обобщением на общий закон дисперсии электрона [3].

Между тем такой подход вызывает некоторые сомнения. Дело в том, что сама магнитоупругая связь формируется электронами и потому можно ожидать осцилляций определяющих ее параметров при изменении магнитного поля.

В настоящей работе мы анализируем зависимость скорости звука от магнитного поля и в первую очередь магнитные осцилляции скорости звука исходя из простейшей модели — модели желе (см., например, [4]). В результате оказывается, что осцилляции зависят от волнового вектора звука; иными словами, магнитное поле создает дополнительную дисперсию скорости звука.

Взаимодействие между электронами учитывается нами в модели Ферми-жидкости. В парамагнитной области скорость звука в такой модели убывает, а в ферромагнитной — возрастает при увеличении магнитного поля. При приближении к границе этих областей влияние поля на скорость звука возрастает квадратично по статической восприимчивости (а не линейно по этой величине, как величина зеемановского расщепления).

Мы ограничиваемся наиболее интересным случаем низких температур и сильных магнитных полей ($T \ll \hbar eH/mc$; $-e$, m — заряд и масса электрона); обобщение на конечные температуры не представляет принципиальных трудностей.

1. Исходные соотношения

Акустические колебания в модели желе отождествляются с ионным звуком в электронно-ионной плазме твердого тела. Спектр их находится из уравнения

$$\varepsilon(\mathbf{k},\ \omega) \equiv 1 + 4\pi\varkappa_i(\mathbf{k},\ \omega) + 4\pi\varkappa_e(\mathbf{k},\ \omega) = 0, \qquad (1)$$

где $\varkappa_i$ — ионная электрическая восприимчивость,

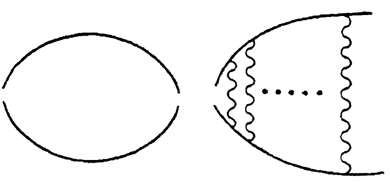
$$4\pi\varkappa_i = -\Omega_i^2/\omega^2, \tag{2}$$

$\Omega_i = (4\pi e_i n_i)^{1/2} m_i^{-1/2}$ — ионная плазменная частота (e_i, n_i, m_i — заряд, плотность и масса иона); $\varkappa_e$ — электронная магнитная восприимчивость.

В отсутствие межэлектронного взаимодействия электронная восприимчивость выражается через Фурье-компоненту простейшей электронной петли P

$$\varkappa(\mathbf{k}, \omega) = e^2/k^2 \cdot P(\mathbf{k}, \omega), \tag{3}$$

представленной на рисунке 1, *а* (сплошным линиям отвечают электронные функции Грина в магнитном поле; по спинорным индексам берется след). Чтобы учесть Ферми-жидкостные эффекты, следует одну из вершин нулевого приближения заменить точной вершинной функцией. Последняя в лестничном приближении представлена на рисунке, *б*; волнистым линиям сопоставляется короткодействующий потенциал или корреляционная функция Ландау, $U + \sigma\sigma' V$ (матрицы Паули σ и σ' отвечают верхнему и нижнему концам волнистой линии).



Квантование орбитального движения электрона в магнитном поле учитывается, следуя работе [5]. В результате мы придем к выражению

$$\varkappa = \frac{e^2}{k^2} \frac{P^+ + V\,[(P^+)^2 - (P^-)^2]}{1 + P^+(U + V) + UV\,[(P^+)^2 - (P^-)^2]}, \tag{4}$$

где P^+ (P^-) отвечает вкладу в P скалярной (z) части фермиевской функции

$$\hat{n} = \left\{\exp\frac{\varepsilon - \sigma_z \dfrac{\Delta}{2} - \zeta - \delta\zeta}{T} + 1\right\}^{-1}, \tag{5}$$

$\delta\zeta$ — перенормировка химического потенциала, учитывающая независимость полного числа электронов от щели Δ в электронном спектре; ось z направлена вдоль магнитного поля.

Мы можем восстановить функции $P^\pm$, если представим их в отсутствие квантующего поля в виде интегралов по электронному импульсу. Соответствующие выражения имеют вид

$$P^\pm = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{\delta\left(\varepsilon - \frac{\Delta}{2} - \zeta - \delta\zeta\right) \pm \delta\left(\varepsilon + \frac{\Delta}{2} - \zeta - \delta\zeta\right)\right\} \frac{\mathbf{kv}}{\mathbf{kv} - \omega - i\nu}, \tag{6}$$

$\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ — скорость электрона; здесь и далее $\hbar = 1$.

2. Общее выражение для скорости звука в магнитном поле

Получим теперь выражения для $P^\pm$, справедливые в областях как парамагнетизма, так и слабого электронного (стонеровского) ферромагнетизма. Для этого мы должны разложить (6) по степеням Δ и $\delta\zeta$, удерживая лишь первые неисчезающие члены (пропорциональные Δ^2 и $\delta\zeta$). Далее мы должны выразить $\delta\zeta$ через Δ^2, воспользовавшись условием неизменности электронной плотности

$$2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{\exp\frac{\varepsilon - \zeta}{T} + 1\right\}^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\left(\exp\frac{\varepsilon - \Delta/2 - \zeta - \delta\zeta}{T} + 1\right)^{-1} + \left(\exp\frac{\varepsilon + \Delta/2 - \zeta - \delta\zeta}{T} + 1\right)^{-1}\right]. \tag{7}$$

Для $\delta\zeta$ получим

$$\delta\zeta = \frac{3}{2}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 [G(0)]^{-1} G'(0). \tag{8}$$

Мы ввели обозначения

$$G(k_t) = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\delta\left(\frac{p^2}{2m} - \zeta\right)(1+2S), \tag{9}$$

где S — пуассоновская сумма, равная

$$S = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{\infty} (-1)^r \cos(\pi r p_t^2/m\eta), & k_t^2 \ll 2m\eta, \\ \sum\limits_{r=1}^{\infty} \cos(\pi r k_t v_t/\eta), & k_t^2 \gg 2m\eta, \end{cases} \tag{10}$$

$\eta = eH/mc$ и штрих у функции означает дифференцирование по величине ζ (индексом t отмечены перпендикулярные к $\mathbf{H}$ составляющие векторов).

Заметим теперь, что практически всегда имеет место неравенство $s \ll v_0$, где s — скорость звука и $v_0 = (2\zeta)^{1/2} m^{-1/2}$ — фермиевская скорость. В отсутствие квантующего поля это неравенство позволяет заменить дробь в подынтегральных выражениях (6) единицей, в результате чего функции $P^{\pm}$ перестают зависеть от ω и $\mathbf{k}$. Интересуясь длинноволновым низкочастотным звуком ($\omega \ll \Omega_i$), мы можем пренебречь единицей в уравнении (1); в результате получим не зависящую от волнового вектора скорость звука

$$s^2 = s_0^2 g\,\frac{1 + P^+(U+V) + UV[(P^+)^2 - (P^-)^2]}{P^+ + V[(P^+)^2 - (P^-)^2]}, \tag{11}$$

где g — плотность электронных состояний на поверхности Ферми в отсутствие расщепления Δ; s_0 — скорость звука в отсутствие Ферми-жидкостных эффектов

$$s_0^2 = \Omega_i^2 (4\pi e^2 g)^{-1}. \tag{12}$$

Учет квантующего поля приведет, как следует из формул (9), (10), к зависимости величины G от содержащего волновой вектор безразмерного параметра $k_t^2/2m\eta$, который может быть и не мал. Как мы увидим, выражение (11) выражается через функции G, G' и G''; благодаря этому магнитные осцилляции скорости звука становятся зависящими от k_t.

Возвращаясь к соотношениям (6) и используя (8), (11), получим окончательное выражение для скорости звука

$$s^2 = s_0^2 g\left\{1 + \left[G(k_t) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 L(k_t)\right](U+V) + \left[G^2(k_t) + 2\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 L(k_t)G(k_t) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(\frac{\Delta}{2}G'(k_t)\right)^2\right]UV\right\}\left\{G(k_t) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 L(k_t) + V \times \right.$$
$$\left. \times\left[G^2(k_t) + 2\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 L(k_t)G(k_t) + \left(\frac{\Delta}{2}G'(k_t)\right)^2\right]\right\}^{-1}, \tag{13}$$

где

$$L(k_t) = \frac{1}{2}\left[G''(k_t) + \frac{3G'(k_t)G'(0)}{G(0)}\right]. \tag{14}$$

В заключение этого раздела заметим, что в случае тяжелых электронов неравенство $s \ll v_0$ может и не выполняться. В отсутствие магнитного поля специфика звуковых колебаний в проводниках с тяжелыми электронами рассматривалась авторами ранее; чтобы не усложнять рассмотрения, в настоящей работе мы не будем касаться экзотического случая $s \sim v_0$. Заметим, однако, что имеются экспериментальные наблюдения акустического эффекта де Гааза—ван Альфена в веществах с тяжелыми электронами [6].

3. Константа магнитоупругой связи

Поскольку параметр $k_t^2/2m\eta$ входит только в выражение для осциллирующей части скорости звука, то в пренебрежении осцилляциями зависимость скорости звука от магнитного поля определяется одной постоянной — константой магнитоупругой связи

$$f = \partial(s^2)/\partial(M^2), \tag{15}$$

где M — намагниченность (точнее, ее неосциллирующая часть), связанная с величиной щели Δ соотношением

$$M = \mu_0 g \Delta, \tag{16}$$

μ_0 — магнетон Бора. Проследим, какую зависимость f от межэлектронного взаимодействия дает используемая модель (модель желе для s^2 и модель Ферми-жидкости для межэлектронного взаимодействия).

В пренебрежении магнитными осцилляциями $G=g$, $G'=g'$ и $G''=g''$, где штрих у величины g означает дифференцирование по ζ. Поскольку для используемого в работе квадратичного закона дисперсии электронов $g'=g\,(2\zeta)^{-1}$, $g''=-g\,(2\zeta)^{-2}$, то выражение (13) принимает вид

$$s^2 = s_0^2 (1 + Ug)\,\{1 - (\Delta/4\zeta)^2 (1 + Vg)^{-1} (1 + Ug)^{-1}\}. \tag{17}$$

Из формулы (17) вытекают два важных (и, по-видимому, достаточно общих) следствия. Во-первых, вблизи границы неустойчивости Ферми-жидкости, когда $1+Ug \to 0$ (неустойчивость Померанчука относительно возмущений, не зависящих от спина), скорость звука стремится к нулю. Возникновение такой мягкой звуковой моды подразумевает перестройку решетки при $1+Ug=0$. Во-вторых, константа магнитоупругой связи, равная, согласно (15),

$$f = -(s_0/2g\mu_0\zeta)^2 (1 + Vg)^{-1}, \tag{18}$$

резко возрастает при приближении к границе ферро- и парамагнитной области, когда $1+Vg \to 0$. Это возрастание, равно как и пропорциональное $(1+Vg)^{-1}$ возрастание щели и намагниченности в сильных электронных парамагнетиках, должно приводить к резкому усилению влияния магнитного поля на акустические явления вблизи границы ферро- и парамагнитной областей.

Наконец, из формулы (17) вытекает еще одно следствие, являющееся не общим, а специфическим для используемой модели. Именно при увеличении магнитного поля скорость звука убывает в парамагнитной области (когда $1+Vg > 0$) и возрастает в ферромагнитной области (когда $1+Vg < 0$). Для этого достаточно заметить, что величина Δ всегда возрастает при увеличении магнитного поля (линейно в области слабого парамагнетизма и по более сложному закону, определяемому изотермой Вольфарта [7], в области слабого ферромагнетизма и сильного парамагнетизма).

4. Частота и амплитуда осцилляций скорости звука

Согласно (13), (14), скорость звука выражается через величины $G(k_t)$ и $G(0)$ (и соответствующие штрихованные величины). Анализируя частоту и амплитуду осцилляций функции $G(k_t)$, можно проследить за изменением частоты и амплитуды магнитных осцилляций скорости звука.

а) Область $k_t^2 \ll 2m\eta$. Единственное упрощение формул (13), (14) — замена величины $G(k_t)$ (и ее производных) величиной $G(0)$ (и ее производными). Все эти величины осциллируют с характерной для статических величин частотой $2\pi\zeta/\eta$ и амплитудой, пропорциональной $\sqrt{\eta/\zeta}$. Поэтому для амплитуды осцилляции скорости звука получим

$$\delta s \sim s_0 M \delta M \sim s_0 M^2 \sqrt{\eta/\zeta}. \tag{19}$$

Согласно этой формуле, в парамагнитной области, когда $M \sim \eta$, амплитуда осцилляций скорости звука пропорциональна $\eta^{3/2}$; в ферромагнитной области, где спонтанная намагниченность велика по сравнению с намагниченностью, наведенной внешним полем, имеем $\delta s \sim \eta^{1/}$.

б) О б л а с т ь $k_t^2 \gg 2m\eta$. Величина $G(k_t)$ (и ее производные) осциллирует с частотой $2\pi(k_t v_0/\eta)$ и относительной амплитудой $\eta/k_t v_0$; следовательно, как частота, так и амплитуда осцилляций меньше, чем при $k_t=0$. Используя (12), (13) и удерживая лишь старшие по η члены, получим

$$s^2 = s_0^2 g \left\{1 + \left[g + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\left(g'' + \frac{3(g')^2}{g}\right)\right](U+V) + g\left[g + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\left(g'' + \frac{g'^2}{g}\right)\right]UV\right\} \times$$
$$\times \left\{g + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2\left(g'' + \frac{3g'^2}{g}\right) + gV\left[g + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2(g'' + g'^2/g)\right]\right\}^{-1}. \quad (20)$$

Согласно этой формуле, осцилляции скорости звука при $k_t^2 \gg 2m\eta$ выражаются через осцилляции щели Δ (но не через осцилляции намагниченности, связанной со щелью соотношением $M=\mu_0 G(0)\Delta$!). Что же касается осцилляций щели, то они оказываются пропорциональными $\delta\Delta \sim \Delta\sqrt{\eta/\zeta}$.

Основная частота осцилляций составляет $2\pi\zeta/\eta$; на эти осцилляции накладываются (не учтенные формулой (20)) меньшие осцилляции частоты $2\pi(kv_0/\eta)$.

Формула (20) упрощается для электронов с квадратичным законом дисперсии. В этом случае

$$\frac{\delta s}{s_0} = -\frac{\delta\Delta}{\Delta}(1+gV)^{-1}. \quad (21)$$

Мы видим, что относительные осцилляции скорости звука резко возрастают при приближении к границе ферро- и парамагнитной областей (когда $1+gV \to 0$).

Если $|1+gV| \ll (\eta/\zeta)^{2/3}$, то полученные в разделах 2—4 результаты делаются неприменимыми. Формально при $1+gV=0$ скорость звука обращается в бесконечность; разумеется, значительно раньше нарушается использованное в этих разделах неравенство $s \ll v_0$.

5. Обсуждение результатов

Итак, модель желе позволяет выразить постоянную магнитоупругой связи через характеризующие электроны параметры. Эта постоянная резко возрастает вблизи границы ферро- и парамагнитной областей.

Знание постоянной магнитоупругой связи позволяет получить неосциллирующую часть зависимости скорости звука от магнитного поля. Однако ее знание оказывается недостаточным для изучения магнитных осцилляций скорости звука.

Частота магнитных осцилляций скорости звука равна $2\pi(\zeta mc/eH\hbar)$ (ζ — химический потенциал). Амплитуда осцилляций пропорциональна малому параметру $(e\hbar H/\zeta mc)^{1/2}$, причем коэффициент пропорциональности зависит от поперечной (по отношению к магнитному полю) составляющей k_t волнового вектора звука. При $k_t^2 > e\hbar H/c$ на основные осцилляции скорости звука накладываются дополнительные медленные осцилляции частоты $2\pi k_t p_0 c/e\hbar H$ (p_0 — фермиевский импульс).

Список литературы

[1] Шенберг Д. Магнитные осцилляции в металлах. М.: Мир, 1986. 678 с.
[2] Ландау Л. Д. Об эффекте де Гааза—ван Альфена. Т. I. М.: Наука, 1969. 512 с.
[3] Лифшиц И. М., Косевич А. М. // ЖЭТФ. 1955. Т. 29. № 6(12). С. 730—742.
[4] Пайнс Д., Нозьер Ф. Теория квантовых жидкостей. М.: Мир, 1967. 382 с.
[5] Ахиезер И. А. // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. № 3. С. 954—962.
[6] Goto T., Suzuki T., Ohe J. et al. // J. Phys. Soc. Jpn. 1988. V. 57. N 9. P. 2885—2888.
[7] Wohlfarth E. P. // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. N 2. P. 1061—1066.

Харьковский физико-технический
институт АН УССР
Харьков

Поступило в Редакцию
16 июня 1989 г.