1989 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 31, в. 11
1989 SOLID STATE PHYSICS Vol. 31, N 11

УДК 548 : 537.611.43 : 539.124

КРОСС-РЕЛАКСАЦИЯ В ПАРАМАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Д. А. Таюрский

Теоретически исследована кросс-релаксация в парамагнитных кристаллах в условиях, когда энергия спинов во внешнем магнитном поле больше тепловой энергии. Выяснены причины возникновения сильной термодинамической связи между зеемановскими подсистемами и резервуаром спин-спиновых взаимодействий. Получены соответствующие кинетические уравнения, которые решены в некоторых случаях.

В парамагнитных кристаллах, в которых имеются две спиновые системы с достаточно близкими резонансными частотами ω_S и ω_I, возможно явление кросс-релаксации, заключающееся в обмене энергией между зеемановскими подсистемами (ЗП) двух сортов спинов S и I и общим резервуаром спин-спиновых взаимодействий (ССВ).

Согласно развитой в [1, 2] высокотемпературной теории кросс-релаксации ($\omega_S\beta_0 \ll 1$, $\omega_I\beta_0 \ll 1$, $\hbar=1$, где $\beta_0=(k_BT_0)^{-1}$ — обратная температура решетки), динамическое равновесие в системе наступает при равенстве нулю алгебраической суммы всех трех больцмановских факторов — «стимулятора» кросс-релаксации

$$\sigma_{SI}=\alpha_S\omega_S-\alpha_I\omega_I-\beta(\omega_I-\omega_S)=0,$$

где α_S, α_I — обратные зеемановские температуры; β — обратная температура резервуара ССВ. Насыщение одного сорта спинов в стационарном режиме при достаточно большой разности $\omega_S-\omega_I$ может привести к существенному уменьшению абсолютного значения температуры резервуара ССВ.

При низких температурах ($\omega_S\beta_0 \gg 1$, $\omega_I\beta_0 \gg 1$) между зеемановскими подсистемами и резервуаром ССВ возникает сильная термодинамическая связь [3, 4], так что изменение состояния одной из подсистем неизбежно сопровождается изменением состояний двух других. Поэтому с точки зрения оценки эффективности кросс-релаксации мы должны ожидать ее существенного увеличения. Пользуясь широко распространенной аналогией между не строго резонансным насыщением однородной линии ЭПР и насыщением одного из сорта спинов, вовлеченных в кросс-релаксацию [5], из результатов работ [3, 4] можно сделать предварительное заключение об экспоненциальном $\sim\exp[\beta_0(\omega_S-\omega_I)]$ увеличении эффективности кросс-релаксации при низких температурах.

Кроме этого, рассмотрение кросс-релаксации при низких температурах привлекательно еще и тем, что кинетика спиновой системы в этом случае определяется лишь термодинамическими характеристиками самой спиновой системы и не зависит от ее взаимодействий с внешними полями.

Попытка построения низкотемпературной теории кросс-релаксации была предпринята в [6] на основе развитого авторами в [7] метода выделения низкотемпературных квазизависимых подсистем. В нашей работе [3] показано, что этот метод не приводит к независимости подсистем, поэтому возникает необходимость построения теории кросс-релаксации при низких температурах с учетом статистической зависимости подсистем.

1. Термодинамика спиновой системы, содержащей два сорта спинов

Рассмотрим спиновую систему концентрированного парамагнитного кристалла, содержащую N_S спинов сорта S и N_I спинов I ($S=I=1/2$), помещенную в постоянное магнитное поле H_0, направленное вдоль оси z. Гамильтониан имеет вид

$$\mathscr{H}=\omega_S\sum_j S_j^z+\omega_I\sum_\alpha I_\alpha^z+\mathscr{H}_{SS}, \tag{1}$$

$$\mathscr{H}_{SS}=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(A_{ij}S_i^zS_j^z+B_{ij}S_i^+S_j^-)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}(A_{\alpha\beta}I_\alpha^zI_\beta^z+B_{\alpha\beta}I_\alpha^+I_\beta^-)+\sum_{i\alpha}U_{i\alpha}^{zz}I_\alpha^zS_i^z, \tag{2}$$

где S_j^z, I_α^z — продольные составляющие спинов; $S_j^\pm=S_j^x\pm iS_j^y$, $I_\alpha^\pm=I_\alpha^x\pm iI_\alpha^y$ — поперечные составляющие. Константы ССВ равны

$$A_{ij}=J_{ij}+g_S^2\mu_B^2(1-3\cos^2\theta_{ij})\,r_{ij}^{-3},\quad B_{ij}=J_{ij}-{}^1/_2\,g_S^2\mu_B^2(1-3\cos^2\theta_{ij})\,r_{ij}^{-3},$$
$$A_{\alpha\beta}=J_{\alpha\beta}+g_I^2\mu_B^2(1-3\cos^2\theta_{\alpha\beta})\,r_{\alpha\beta}^{-3},\quad B_{\alpha\beta}=J_{\alpha\beta}-{}^1/_2\,g_I^2\mu_B^2(1-3\cos^2\theta_{\alpha\beta})\,r_{\alpha\beta}^{-3},$$
$$U_{i\alpha}^{zz}=J_{i\alpha}+g_Sg_I\mu_B^2(1-3\cos^2\theta_{i\alpha})\,r_{i\alpha}^{-3}. \tag{3}$$

Здесь g_S, g_I — g-фактор спинов; J — обменные интегралы; вторые слагаемые в (3) представляют дипольные взаимодействия между спинами. Латинские индексы мы всегда будем относить к спинам S, а греческие — к спинам I.

Термодинамическое равновесное состояние спиновой системы с обратной температурой β_0 может быть описано с помощью матрицы плотности

$$\rho_0=\exp(-\beta_0\mathscr{H})/\mathrm{Sp}\exp(-\alpha_0\mathscr{H}).$$

При абсолютном нуле температуры ($\beta_0=\infty$) намагниченности спиновых подрешеток были бы полными. При повышении температуры в такой спиновой системе появляются два невзаимодействующих между собой типа магнонов: магноны S и магноны I, в результате чего намагниченности немного отличны от полных.

Любое неравновесное состояние спиновой системы можно рассматривать как появление некоторого неравновесного числа магнонов того или другого типа. В матрице плотности это может быть учтено с помощью химических потенциалов μ_S и μ_I, характеризующих число перевернутых по отношению к магнитному полю спинов того и другого сорта

$$\rho=Q\exp\left\{-\beta\left(\mathscr{H}-\mu_S\sum_j S_j^z-\mu_I\sum_\alpha I_\alpha^z\right)\right\},$$
$$Q=\mathrm{Sp}\exp\left\{-\beta\left(\mathscr{H}-\mu_S\sum_j S_j^z-\mu_I\sum_\alpha I_\alpha^z\right)\right\}. \tag{4}$$

Здесь β — уже неравновесная спиновая температура.

Физическим механизмом, устанавливающим квазиравновесное распределение (4) при низких температурах, как и в высокотемпературном приближении, является вращение спинов в локальных полях. Единственное отличие заключается в уменьшении хаотичности этих полей вследствие появления при низких температурах молекулярного поля. Время установления квазиравновесного распределения (4) при низких температурах отличается от соответствующего времени в высокотемпературном приближении (которое имеет порядок T_2 — времени спин-спиновой релаксации) появлением дополнительного множителя $(1-p_S^2)^{-1}$ или $(1-p_I^2)^{-1}$, связанного с упорядочением ориентации спинов за счет внешнего магнитного поля (здесь $p_S=-2\langle S_j^z\rangle$, $p_I=-2\langle I_\alpha^z\rangle$ — намагниченности спиновых подрешеток, $\langle\ldots\rangle$ — среднее с матрицей плотности (4)). Конкретный вид квазиравновесного распределения (4) следует из факта существования в спиновой системе трех интегралов движения: зеемановских энергий спинов S и I и энергии секулярной части ССВ $\langle\mathscr{H}_{SS}\rangle$ [3].

Спектр магнонов может быть найден в приближении молекулярного поля [8]

$$\varepsilon(\mathbf{k}_S)=\omega_S-\frac{1}{2}p_I\sum_{\alpha}U_{i\alpha}^{zz}-\frac{1}{2}p_S\left(A^s(0)-B^s(\mathbf{k}_S)\right),$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}_I)=\omega_I-\frac{1}{2}p_S\sum_{i}U_{i\alpha}^{zz}-\frac{1}{2}p_I\left(A^I(0)-B^I(\mathbf{k}_I)\right), \qquad (5)$$

где $\mathbf{k}_S$, $\mathbf{k}_I$ — волновые векторы магнонов; $A^S(\mathbf{k}_S)=\sum_j A_{ij}\exp(i\mathbf{k}_S\mathbf{r}_{ij})$ и аналогичные определения справедливы для $A^I(\mathbf{k}_I)$, $B^S(\mathbf{k}_S)$, $B^I(\mathbf{k}_I)$. Из (5) для каждого типа магнонов имеем энергетическую зону, средняя энергия которой может быть вычислена по формуле

$$\bar{E}_m=\sum_{\mathbf{k}_m}n(\mathbf{k}_m)\,\varepsilon(\mathbf{k}_m)\Big/\sum_{\mathbf{k}_m}n(\mathbf{k}_m) \quad (m=I,\ S), \qquad (6)$$

где $n(\mathbf{k}_m)$ означает число магнонов типа m и волновым вектором $\mathbf{k}_m$. В результате взаимодействия спинов между собой энергия магнонов флуктуирует относительно среднего значения

$$\bar{E}_S\approx\omega_S-\frac{1}{2}p_I\sum_{\alpha}U_{i\alpha}^{zz}-\frac{1}{2}p_SA^S(0), \quad \bar{E}_I\approx\omega_I-\frac{1}{2}p_S\sum_{i}U_{i\alpha}^{zz}-\frac{1}{2}p_IA^I(0). \quad (7)$$

Выражения (7) получены в приближении $\beta\langle\mathcal{H}_{SS}\rangle\ll 1$, что соответствует состоянию спиновой системы, далекому от перехода в магнитоупорядоченное, и позволяет считать все числа магнонов в (6) равными. Из (7) видно, что вследствие появления молекулярных полей энергия одного типа магнонов (а следовательно, их число и зеемановская энергия или намагниченность соответствующего сорта спинов) зависит от величины молекулярного поля, создаваемого как спинами данного сорта, так и спинами другого сорта, т. е. зависит от энергии другого типа магнонов (зеемановской энергии или намагниченности другого сорта спинов) и от энергии резервуара ССВ, поскольку последнюю в магнитно-неупорядоченном состоянии в основном составляет энергия спинов в молекулярных полях (см., например, выражение (11) в [3]). Поэтому зеемановские подсистемы спинов S и I и резервуар ССВ являются статистически зависимыми подсистемами при низких температурах, и мы не можем изменить состояние одной подсистемы, не меняя состояния двух других. Это приводит к появлению термодинамической связи между намагниченностями спиновых подрешеток (или химическими потенциалами) и спиновой температурой.

При низких температурах флуктуации спиновых операторов $\delta S_j^z=S_j^z-\langle S_j^z\rangle$, $\delta I_\alpha^z=I_\alpha^z-\langle I_\alpha^z\rangle$ малы, поэтому в гамильтониане ССВ (2) можно выделить флуктуационную часть $\mathcal{H}_{\text{фт}}$ аналогично [3, 4]. Пользуясь малостью энергии флуктуационной части по сравнению с тепловой, можно вычислить намагниченности спиновых подрешеток

$$p_S=\operatorname{th}\frac{1}{2}\beta\left(\omega_S-\mu_S-\frac{1}{2}p_SA^S(0)-\frac{1}{2}p_I\sum_{\alpha}U_{i\alpha}^{zz}\right),$$

$$p_I=\operatorname{th}\frac{1}{2}\beta\left(\omega_I-\mu_I-\frac{1}{2}p_IA^I(0)-\frac{1}{2}p_S\sum_{i}U_{i\alpha}^{zz}\right). \qquad (8)$$

Равновесные намагниченности определяются из (8) при $\beta=\beta_0$, $\mu_S=\mu_I=0$

$$p_S^0=\operatorname{th}\frac{1}{2}\beta_0\left(\omega_S-\frac{1}{2}p_S^0A^S(0)-\frac{1}{2}p_I^0\sum_{\alpha}U_{i\alpha}^{zz}\right),$$

$$p_I^0=\operatorname{th}\frac{1}{2}\beta_0\left(\omega_I-\frac{1}{2}p_I^0A^I(0)-\frac{1}{2}p_S^0\sum_{i}U_{i\alpha}^{zz}\right). \qquad (9)$$

Соотношения (8) можно рассматривать как уравнения, связывающие между собой намагниченности и термодинамически сопряженные им величины — химические потенциалы. Любое неравновесное состояние спиновой системы описывается уравнениями (8). Поскольку уравнений два, а число входящих в них переменных пять (β, p_S, p_I, μ_S, μ_I), то для однозначного задания начального состояния нужно задать три переменные. В дальнейшем в качестве таковых будем выбирать β, p_S и p_I.

2. Кинетика спиновой системы под действием возмущения

Включим в наше рассмотрение возмущение, вызывающее взаимные перевороты спинов различных сортов

$$\mathscr{H}_{\text{кр}} = \frac{1}{4} \sum_{j\alpha} U_{j\alpha}^{+-} (S_j^+ I_\alpha^- + S_j^- I_\alpha^+),$$
$$U_{j\alpha}^{+-} = J_{j\alpha} - {}^1/_2\, g_S g_I \mu_B^2 (1 - 3\cos^2\theta_{j\alpha})\, r_{j\alpha}^{-3}. \tag{10}$$

При учете флип-флоп взаимодействий между спинами различных сортов зеемановские энергии спинов S и I и энергия секулярной части ССВ перестают быть интегралами движения и начинают медленно меняться с характерным временем порядка $(1-p_S p_I)^{-1}\,\tau_{\text{кр}}$ (где $\tau_{\text{кр}} \gg T_2$ — время кросс-релаксации в высокотемпературном приближении). Поэтому для исследования кинетики зеемановских энергий и энергии ССВ (или намагниченностей и спиновой температуры) можно считать, что в каждый момент времени успевает установиться квазиравновесное распределение типа (4).

Методом неравновесного статистического оператора Зубарева [9] можно получить следующие кинетические уравнения:

$$dp_S/dt = -{}^1/_8 N_S [1 - \exp\beta(\mu_S - \mu_I)]\, W_{\text{кр}}(\mu_S - \mu_I),$$
$$dp_I/dt = {}^1/_8 N_I [1 - \exp\beta(\mu_S - \mu_I)]\, W_{\text{кр}}(\mu_S - \mu_I),$$
$$\frac{d}{dt}\langle\mathscr{H}_{SS}\rangle = -\frac{1}{16}(\omega_S - \omega_I)[1 - \exp\beta(\mu_S - \mu_I)]\, W_{\text{кр}}(\mu_S - \mu_I), \tag{11}$$

где $W_{\text{кр}}(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} |U_{\mathbf{k}}^{+-}|^2 J(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \omega)$ — вероятность взаимных переворотов спинов под действием возмущения (10); $U_{\mathbf{k}}^{+-} = \sum_{j\alpha} U_{j\alpha}^{+-} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_{j\alpha})$; $J(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \omega)$ — пространственно-временной Фурье-образ спиновой корреляционной функции

$$J(\mathbf{k}_S, \mathbf{k}_I, \omega) = (N_S N_I)^{-1} \sum_{i\alpha j\beta} \int dt \langle (S_i^- I_\alpha^+)(t)\, S_j^+ I_\beta^- \rangle \exp\{-i\omega t + i\mathbf{k}_S\mathbf{r}_{ij} + i\mathbf{k}_I\mathbf{r}_{\alpha\beta}\},$$
$$A(t) = \exp\left[it\left(\mathscr{H} - \mu_S \sum_j S_j^z - \mu_I \sum_\alpha I_\alpha^z\right)\right] A \exp[-it(\ldots)]. \tag{12}$$

Введем нормированную функцию формы кросс-релаксации $g_{\mathbf{k}}(\omega)$ и ее первый момент $\delta_{\mathbf{k}}^{(1)}$

$$g_{\mathbf{k}}(\omega) = J(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \omega) \Big/ \int d\omega J(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \omega),$$
$$\int d\omega\,\omega g_{\mathbf{k}}(\omega) = \omega_I - \mu_I - \omega_S + \mu_S + \delta_{\mathbf{k}}^{(1)}. \tag{13}$$

Функция $g_{\mathbf{k}}(\omega)$ имеет острый максимум на частоте $\tilde{\omega} = \omega_I - \mu_I - \omega_S + \mu_S + \delta_{\mathbf{k}}^{(1)}$. Вычисления дают

$$\int d\omega J(\mathbf{k}, -\mathbf{k}, \omega) \approx 2\pi M_{\mathbf{k}} (\exp\beta\tilde{\omega} - 1)^{-1},$$
$$M_{\mathbf{k}}\delta_{\mathbf{k}}^{(1)} \approx \frac{1}{2} N_I N_S [(1 + p_S)\delta_{1I} - (1 + p_I)\delta_{1S}] + \frac{1}{4}(p_S - p_I)\left(p_S \sum_\alpha U_{i\alpha}^{zz} - p_I \sum_i U_{i\alpha}^{zz}\right).$$

$$M_{\mathbf{k}} = N_I N_S p_S p_I (a_S - a_I)(a_S - 1)^{-1}(a_I - 1)^{-1},$$

$$a_S = \exp\beta\left(\omega_S - \frac{1}{2} p_I \sum_{\alpha} U_{i\alpha}^{zz} + \delta_{1S}\right), \quad a_I = \exp\beta\left(\omega_I - \frac{1}{2} p_S \sum_{i} U_{i\alpha}^{zz} + \delta_{1I}\right)$$

$$\delta_{1S} = -{}^1/_2\, p_S (A^S(0) - B^S(\mathbf{k})), \quad \delta_{1I} = -{}^1/_2\, p_I (A^I(0) - B^I(\mathbf{k})). \tag{14}$$

Отсюда следует, что максимум вероятности рождения магнона I и уничтожения магнона S приходится на разность энергий магнонов $\tilde{\omega}$, в то время как сам процесс дает в среднем дисбаланс энергии $\Delta E = \bar{E}_I - \bar{E}_S$.

Таким образом, видно, что между зеемановской энергией и энергией ССВ появляется связь за счет процессов кросс-релаксации. Флип-флоп процесс меняет число магнонов того или другого типа на $+1$ или -1 (и наоборот), изменяя тем самым намагниченности каждой из подрешеток и зеемановские энергии спинов S и I. Но при этом возникает дисбаланс энергии $\bar{E}_S - \bar{E}_I$, который компенсируется за счет резервуара ССВ. Следовательно, при низких температурах преобразование зеемановской энергии в энергию ССВ осуществляется флип-флоп процессами между спинами различных сортов, как и в высокотемпературном приближении.

Однако тут имеется существенное отличие. При высоких температурах для каждой пары спинов S и I, при флип-флоп взаимодействии которых резервуар ССВ получает или теряет энергию $\omega_S - \omega_I - \delta$, имеется пара спинов S и I, при взаимном перевороте которых резервуар ССВ получает или теряет энергию $\omega_S - \omega_I + \delta$, так что в среднем в каждом акте флип-флоп взаимодействия резервуар ССВ компенсирует разность зеемановских квантов энергии.

При низких температурах, помимо того, что резервуар ССВ компенсирует разность средних энергий магнонов, еще за счет резервуара ССВ должна компенсироваться и разность энергий, обусловленная несовпадением $\bar{E}_S - \bar{E}_I$ и разницы энергии магнонов $\tilde{\omega}$, рождающихся и уничтожающихся с максимальной вероятностью, потому что максимум вероятности флип-флоп процессов смещается относительно $\omega_S - \omega_I$ на величину первого момента функции формы кросс-релаксации $g_{\mathbf{k}}(\omega)$.

Кинетическое уравнение для β можно получить из (11), вычислив $\langle \mathscr{H}_{SS} \rangle$ в первом порядке по $\beta \langle \mathscr{H}_{\text{фл}} \rangle$

$$d\beta/dt \approx {}^1/_2\, D^{-2} (\bar{E}_S - \bar{E}_I)(1 - \exp\beta(\mu_S - \mu_I))\, W_{\text{кр}}(\mu_S - \mu_I), \tag{15}$$

где

$$D^2 = \frac{1}{8}\left\{(1 - p_S^2) N_S \sum_j (A_{ij}^2 (1 - p_S^2) + 2B_{ij}^2) + (1 - p_I^2) N_I \sum_{\alpha} (A_{\alpha\beta}^2 (1 - p_I^2) + 2B_{\alpha\beta}^2)\right\}$$

— квадрат локальной частоты при низких температурах.

Рассмотрим стационарное решение системы (11)

$$\beta\mu_S = \beta\mu_I. \tag{16}$$

Такой вид решения понятен: равенство химических потенциалов означает равенство энергии неравновесных магнонов S и неравновесных магнонов I, т. е. имеются две термодинамические подсистемы, находящиеся при одной и той же температуре и обладающие одинаковыми энергиями. Естественно, что такие подсистемы будут находиться в динамическом равновесии. Таким образом, при низких температурах «стимулятором» кросс-релаксации является величина $\beta(\mu_S - \mu_I)$, которая с учетом связи между зеемановской температурой и химическим потенциалом $\mu_S = \omega_S(1 - \alpha_S \beta^{-1})$ совпадает с σ_{SI}.

Проанализируем теперь случай малых отклонений от начального состояния. Рассмотрим такое начальное состояние, когда спины насыщены ($p_S = 0$), а намагниченность p_I и β равна равновесным значениям p_I^0 и β_0. Однако говорить, что спины I и резервуар ССВ находятся в равновесии, нельзя, так как равновесное состояние определяется соотношениями (9). Выбрав такое начальное состояние, из (8) получим

$$\mu_S = \omega_S - \frac{1}{2} p_I^0 \sum_\alpha U_{i\alpha}^{zz}, \quad p_I^0 = \mathrm{th}\left[\frac{1}{2}\beta_0\left(\omega_I - \mu_I - \frac{1}{2} p_I^0 A^I(0)\right)\right]. \tag{17}$$

Так как второе уравнение из (17) должно иметь единственное решение для μ_I, то из сравнения со вторым уравнением в (9) следует выражение для химического потенциала $\mu_I = {}^1/_2 p_S^0 \sum_i U_{i\alpha}^{zz}$. В случае малых отклонений от начального состояния из (11) и (15) можно получить, что

$$\beta - \beta_0 \sim (-1) \frac{e^{\beta_0\omega_S} - 1}{e^{\beta_0\omega_I} - 1} \left(\omega_S - \omega_I + \frac{1}{2} p_I^0 A^I(0) - \frac{1}{2} p_S^0 \sum_i U_{i\alpha}^{zz}\right) \tag{18}$$

и при существенном различии резонансных частот $(\beta_0 |\omega_S - \omega_I| > 1)$ имеет место экспоненциальное увеличение или уменьшение (в зависимости от знака разности $\omega_S - \omega_I$) отклонения спиновой температуры. Если частота насыщенных спинов меньше, чем ненасыщенных $(\omega_S - \omega_I)$, то переворот одного спина S не может дать энергии, необходимой для рождения магнонов I. Для этого необходимо отнять недостающий квант энергии от резервуара ССВ, что естественным образом уменьшает вероятность рождения магнонов I и, следовательно, уменьшает отклонение p_I от равновесного значения. Уменьшается и степень охлаждения резервуара ССВ. При обратном соотношении частот $(\omega_S > \omega_I)$ вероятность рождения магнонов I растет. Увеличивается и степень резервуара спиновой системы. Подобное поведение является существенно низкотемпературным эффектом.

В заключение автор выражает глубокую признательность Б. И. Кочелаеву за обсуждение результатов работы.

Список литературы

[1] Провоторов Б. Н. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. № 3. С. 882—887.
[2] Родак М. И. // ФТТ. 1964. Т. 6. № 2. С. 521—529.
[3] Кочелаев Б. И., Таюрский Д. А. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 10. С. 3075—3083.
[4] Таюрский Д. А. // ФТТ. 1988. Т. 30. № 11. С. 3475—3477.
[5] Ацаркин В. А., Родак М. И. // УФН. 1972. Т. 107. № 1. С. 3—27.
[6] Buishvili L. L., Fokina N. P., Chelidze L. T. // Phys. St. Sol. (b). 1986. V. 133. N 1. P. 127—134.
[7] Буишвили Л. Л., Фокина Н. П. // ФТТ. 1983. Т. 25. № 2. С. 381—386.
[8] Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1975. 527 с.
[9] Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина
Казань

Поступило в Редакцию
29 декабря 1988 г.
В окончательной редакции
17 мая 1988 г.