

УДК 537.236

О НОВОМ ТИПЕ УПРУГИХ ВОЛН В КРИСТАЛЛЕ С ДВОЙНИКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. Н. Нечаев, А. М. Рощупкин

Исследован спектр собственных изгибных колебаний когерентных двойниковых границ. Показано, что полный спектр колебаний границы помимо локальных мод включает две квазилокальные моды, распространяющиеся в определенных направлениях в плоскости двойниковогоания. Скорость распространения упругих колебаний, локализованных на двойниковой границе, в отличие от известных типов поверхностных волн существенно зависит от направления их распространения в плоскости границы.

При исследовании упругих волн в кристалле с планарными дефектами последние обычно рассматриваются как геометрические поверхности, на которых задаются граничные условия для уравнений динамической теории упругости [1-3]. Из-за наличия свободной поверхности кристалла, а также поверхности раздела двух кристаллитов спектр упругих колебаний перестраивается по отношению к спектру бесконечно протяженного кристалла без внутренних поверхностей раздела. При этом обнаруживаются волны Рэлея, Лява, Стоунли [1-3].

Несколько иная ситуация возникает, когда в кристалле имеются такие планарные дефекты, как дислокационные стенки или когерентные границы двойников. В данном случае, помимо упоминавшихся выше уравнений динамической теории упругости и граничных условий к ним, необходимо учитывать уравнения движения самих границ, способных к консервативному перемещению. Изгибные колебания дислокационной стенки, распространяющиеся перпендикулярно дислокационным линиям, анализировались в [4]. Для такого же направления распространения изгибных колебаний когерентной двойниковой границы по отношению к линиям двойникоующих дислокаций аналогичная задача рассматривалась в [5] в рамках самосогласованной динамической теории когерентных межфазных границ [6]. Обзор результатов исследований, проведенных в [5], дан в работе [7].

В отличие от указанных исследований в настоящей работе рассмотрена общая задача об изгибных колебаниях когерентной двойниковой границы при произвольном направлении их распространения в плоскости двойниковогоания. Исходная система уравнений в напряжениях, описывающая динамические свойства кристалла с двойниковой границей, включает обобщенное на случай несовместных деформаций уравнение Бельтрами [8]

$$\frac{1}{c_i^2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial t^2} - \frac{1}{2(1+\nu)} \delta_{ik} \frac{\partial^2 \sigma_{ee}}{\partial t^2} \right) - \Delta \sigma_{ik} - \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ee}}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \Delta \sigma_{ee} \right) = \\ = \rho \frac{\partial}{\partial t} (j_{ik} + j_{ki} - \delta_{ik} j_{ee}) - 2\mu \eta_{ik} \quad (1)$$

и уравнение движения двойниковой границы [8], представляющее собой обобщение на динамический случай условия равенства нулю конфигурационной силы в каждой точке границы

$$\{\sigma_{ik}\} s_{ik}^p = 0. \quad (2)$$

Здесь σ_{ik} — тензор напряжений, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, c_t — скорость поперечного звука, ρ — плотность вещества кристалла,

$$s_{ik}^p = m_i s_k \quad (3)$$

— тензор пластической дисторсии при двойниковании, m — единичный вектор нормали к плоскости двойникования, s — вектор сдвига при двойниковании, j_{ik} — тензор плотности потока двойникующих дислокаций, η_{ik} — тензор несовместности деформаций. Фигурные скобки в выражении (2) обозначают полусумму значений тензора напряжений по обе стороны от границы в непосредственной близости от нее.

В рассматриваемом здесь случае когерентных двойниковых границ, движение которых не сопровождается пластическим изменением объема кристалла, следует учесть в (1), что

$$j_{ee} = 0. \quad (4)$$

Это, в частности, вытекает из общего выражения для тензора плотности потока двойникующих дислокаций [5, 6]

$$j_{ik} = V s_{ik}^p \delta(\zeta), \quad (5)$$

где V — проекция скорости движения границы на положительное направление выбранного к границе в каждой точке единичного вектора нормали n ; ζ — координата, отсчитываемая от границы вдоль n . Действительно, производя с учетом (3) свертку формулы (5) и принимая во внимание, что вектор двойникования s перпендикулярен вектору нормали m к плоскости двойникования, непосредственно приходим к (4).

Тензор несовместности деформаций η_{ik} , фигурирующий в уравнении (1), связан с тензором плотности двойникующих дислокаций ρ_{ik} , возникающих при прогибе двойниковой границы, общим соотношением [9]

$$\eta_{ik} = e_{k j n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho_{i n} - \frac{1}{2} \delta_{i n} \rho_{e e} \right). \quad (6)$$

Плотность двойникующих дислокаций ρ_{ik} в свою очередь зависит от тензора пластической дисторсии s_{mn}^p при двойниковании [5, 6]

$$\rho_{i n} = e_{i l m} n_l s_{m n}^p \delta(\zeta), \quad (7)$$

где e_{ilm} — символ Леви—Чивита. Подставим выражение (7) в (6), предварительно записав тензор s_{mn}^p в виде

$$s_{mn}^p = u_{mn}^p + e_{n m i} \omega_i^p,$$

где u_{mn}^p — тензор пластической деформации при двойниковании, ω^p — вектор пластического разворота при двойниковании элементов кристалла. Разбивая далее оператор дифференцирования по координатам на касательную, обозначаемую в дальнейшем штрихованным тензорным индексом, и нормальную составляющие

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_{j'}} + n_j \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

представим тензор несовместности η_{ik} в виде суммы двух частей

$$\eta_{ik} = \eta_{ik}^{(1)} + \eta_{ik}^{(2)}, \quad (8)$$

$$\eta_{ik}^{(1)} = e_{i l m} e_{k j n} n_l n_j u_{m n}^p \delta'(\zeta), \quad (9)$$

$$\eta_{ik}^{(2)} = (e_{i l m} e_{k j n} u_{m n}^p - e_{k j l} \omega_i^p) \frac{\partial n_l}{\partial x_{j'}} \delta(\zeta). \quad (10)$$

Здесь $\delta'(\zeta) = (d/d\zeta)\delta(\zeta)$. Нетрудно видеть, что второе слагаемое в (10) равно нулю как результат свертки по индексам « j » и « l » антисимметричного тензора e_{kjl} с симметричным тензором кривизны [10]

$$k_{j,l} = -\partial n_l / \partial x_j.$$

Тогда с учетом этого обозначения

$$\eta_{ik}^{(2)} = -e_{ilm} e_{kjm} u_{mn}^p k_{j,l} \delta(\zeta) \quad (11)$$

и, как нетрудно видеть, оба слагаемых в тензоре несовместности (8) являются симметричными.

Учитывая соотношения (5), (8), (9), (11), преобразуем исходное уравнение (1) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_l^2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial t^2} - \frac{1}{2(1+\nu)} \delta_{ik} \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial t^2} \right) - \Delta \sigma_{ik} - \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i \partial x_k} - \delta_{ik} \Delta \sigma_{ll} \right) = \\ = \rho u_{ik}^p \frac{\partial}{\partial t} (V \varepsilon(\zeta)) - 2\mu e_{ilm} e_{kjm} n_i n_j \times \\ \times u_{mn}^p \delta'(\zeta) + 2\mu e_{ilm} e_{kjm} u_{mn}^p k_{j,l} \delta(\zeta). \end{aligned} \quad (12)$$

Для решения поставленной задачи, как будет видно ниже, нет необходимости в полном исследовании напряженного состояния кристалла, связанного с прогибом доменной границы. В самом деле, умножив (12) на u_{ik}^p , после несложных преобразований получим уравнение для величины $f = \sigma_{ik} u_{ik}^p$, совпадающей на поверхности границы с действующей на нее конфигурационной силой

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f + \frac{3}{1+\nu} u_{ik}^p \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} = 2\rho (u_{ik}^p)^2 \frac{\partial}{\partial t} (V \delta(\zeta)) - \\ - 2\mu \alpha_{ij} n_i n_j \delta'(\zeta) + 2\mu \alpha_{ij} k_{i,j} \delta(\zeta). \end{aligned} \quad (13)$$

Второе же уравнение, замыкающее систему, получается в результате свертки (12)

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{2(1+\nu)}{3(1-\nu)} \mu (\beta_{jl} k_{j,l} \delta(\zeta) - \beta_{jl} n_j n_l \delta'(\zeta)). \quad (14)$$

В уравнениях (13), (14) использованы обозначения: $\sigma_{ll} = -3p$, $\alpha_{ij} = e_{ilm} e_{kjm} u_{ik}^p u_{mn}^p$, $\beta_{jl} = e_{klm} e_{kjm} u_{mn}^p$, c_l — скорость продольного звука.

Уравнения (13), (14) вместе с граничным условием $\{f(\zeta)\} = 0$, отвечающим (2), представляют полную систему соотношений, описывающих совместные колебания границ и объема кристалла. Единственное допущение, сделанное при выводе этой системы уравнений, — предположение об изотропности упругих свойств кристалла.

Ограничимся в дальнейшем для простоты анализа случаем малых колебаний двойниковой границы. В линейном приближении по смещению двойниковой границы $u = u(x, y, t)$ от равновесного положения, совпадающего с координатной плоскостью XOY , система уравнений (13), (14) принимает вид

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f + \frac{3}{1+\nu} m_i s_k \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} = \left[\rho s^2 \frac{\partial V}{\partial t} - \mu (s_i s_j - \delta_{ij} s^2) k_{i,j} \right] \delta(z), \quad (15)$$

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{2}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} (\text{sn}) \delta'(z). \quad (16)$$

При записи этой системы уравнений использован явный вид (3) тензора пластической дисторсии. Выбирая систему координат так, чтобы вектор сдвига s был направлен вдоль координатной оси OY , а вектор нормали к плоскости двойникования m — вдоль OZ , и учитывая, что в этом случае вектор n имеет компоненты

$$n = (-\partial u / \partial x, -\partial u / \partial y, 1)$$

вместо (15), (16) получаем

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f + \frac{3s}{1+\nu} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = \mu s^2 \left(\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \delta(z), \quad (17)$$

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = -\frac{2}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \mu s \frac{\partial u}{\partial y} \delta'(z). \quad (18)$$

Исследование системы уравнений (17), (18) удобно проводить в Фурье-представлении. В этом случае из системы (17), (18) для Фурье-образов функций f и p тривиальным образом следуют выражения

$$\bar{p} = \alpha(\mathbf{q}, \omega) \bar{u}, \quad \bar{j} = \beta(\mathbf{q}, \omega) \bar{u}, \quad (19)$$

где

$$\alpha(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2}{3} \mu s \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{q_y q_x}{q^2 - \omega^2/c_l^2 - i\delta}, \quad (20)$$

$$\beta(\mathbf{q}, \omega) = \mu s^2 \left[\frac{q_x^2 - \omega^2/c_l^2}{q^2 - \omega^2/c_l^2 - i\delta} + \frac{2}{1-\nu} \frac{q_y^2 q_x^2}{(q^2 - \omega^2/c_l^2 - i\delta)(q^2 - \omega^2/c_l^2 - i\delta)} \right]. \quad (21)$$

Здесь δ — бесконечно малое затухание, учитываемое в запаздывающей функции Грина динамического уравнения теории упругости.

Уравнение движения двойниковой границы, согласно определению f , получается в результате частичного Фурье-обращения выражения для $f(\mathbf{q}, \omega)$ по переменной z и выполнения затем предельного перехода $z \rightarrow 0$

$$\mu s^2 \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\mathbf{q}, \omega) e^{i q_x z} \frac{d q_x}{2\pi} \right\} \bar{u} = 0.$$

Вычисляя интегралы в этом выражении с помощью теоремы о вычетах, получим

$$\left[\frac{\omega^2/c_l^2 - k_x^2}{\sqrt{\omega^2/c_l^2 - k^2}} - 4 \frac{k_y^2}{\omega^2} (\sqrt{\omega^2/c_l^2 - k^2} - \sqrt{\omega^2/c_l^2 - k^2}) \right] \bar{u} = 0, \quad (22)$$

где \mathbf{k} — составляющая волнового вектора \mathbf{q} , параллельная плоскости двойникования, а корень в соответствии с характером вывода (22) должен браться в верхней комплексной полуплоскости. В силу непрерывности функции f на границе в нашем случае $\{f\} = f$.

Приравнявая нулю выражение, стоящее коэффициентом при \bar{u} в (22), найдем дисперсионное уравнение для изгибных колебаний границы. Из структуры выражения (22) ясно, что $\omega = V k = \xi c_l k$, где ξ — величина, определяющая скорость распространения изгибной волны вдоль границы, является корнем следующего трансцендентного уравнения:

$$\frac{\xi^2 - \cos^2 \varphi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{4(1 - \gamma^2) \sin^2 \varphi}{\sqrt{\xi^2 - 1} + \sqrt{\xi^2 \gamma^2 - 1}}. \quad (23)$$

Здесь введены обозначения: $\varphi = \arctg(k_y/k_x)$, $\gamma = c_l/c_t$. Перепишывая это уравнение в виде

$$[\xi^2 - \cos^2 \varphi - 4(1 - \gamma^2) \sin^2 \varphi] \sqrt{\xi^2 - 1} + (\xi^2 - \cos^2 \varphi) \sqrt{\xi^2 \gamma^2 - 1},$$

легко заметить, что его решение требует отрицательности коэффициента при первом радикале и положительности коэффициента при втором радикале, т. е.

$$\cos^2 \varphi < \xi^2 < \cos^2 \varphi + 4(1 - \gamma^2) \sin^2 \varphi. \quad (24)$$

Нетрудно убедиться, что условие (24) запрещает существование решений уравнения (23), лежащих в области $\xi > 1/\gamma$. При $1 < \xi < 1/\gamma$ вещественных решений нет в силу невозможности одновременного обра-

ния в нуль действительной и мнимой частей уравнения (23). В случае, если $\xi < 1$, уравнение (23) сводится к кубическому относительно ξ^2 уравнению

$$\xi^6 - 2(1 + 3 \sin^2 \varphi) \xi^4 + [1 + 14 \sin^2 \varphi + (9 - 16\gamma^2) \sin^4 \varphi] \xi^2 - 8 \sin^2 \varphi - 8(1 - 2\gamma^2) \sin^4 \varphi = 0. \quad (25)$$

Из трех корней уравнения (25) изгибным колебаниям границы отвечает вещественный корень, удовлетворяющий, согласно (24), условию $\cos^2 \varphi < \xi^2 < 1$. Для изгибной волны, распространяющейся вдоль вектора сдвига s ($\sin^2 \varphi = 1$), уравнение (25) совпадает с дисперсионным уравнением для поверхностных волн Рэлея [1-3]

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8(3 - 2\gamma^2) \xi^2 - 16(1 - \gamma^2) = 0.$$

Для изгибной волны, распространяющейся перпендикулярно вектору s , решение уравнения (23) при любом γ есть $\xi = 1$. Кроме того, для материала

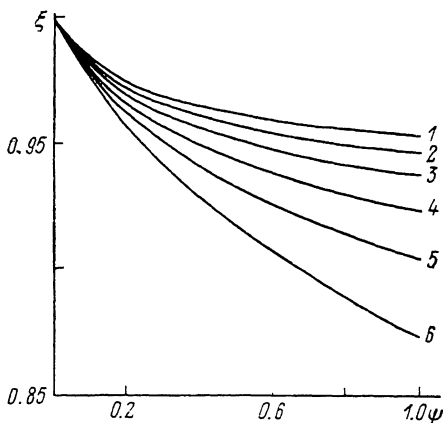


Рис. 1. Зависимость относительной скорости $\xi = V/c_2$ распространения изгибной волны от $\psi = \sin^2 \varphi$.

$\gamma = 0$ (1), 0.1 (2), 0.2 (3), 0.3 (4), 0.4 (5), 0.5 (6).

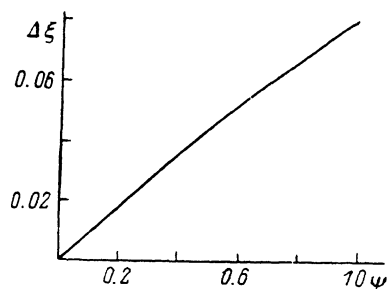


Рис. 2. Зависимость ширины полосы разрешенных значений относительных скоростей $\Delta \xi = \xi(\nu = 1/2) - \xi(\nu = 0)$ изгибных волн, локализованных на двойниковой границе, от $\psi = \sin^2 \varphi$.

с $\gamma = 1/2$ ($\nu = 0$) вдоль координатной оси OY может распространяться изгибная волна со скоростью продольного звука c_l . Эти две волны имеют квазилокальный характер. Колебания атомов в кристалле, сопутствующие колебаниям двойниковой границы, в этом случае нелокализованы в области границы.

Решения уравнения (23) при $\xi < 1$ описывают локализованные на двойниковой границе упругие волны, в чем нетрудно убедиться, производя Фурье-обращение, например, формулы (19) для \bar{p} , в которой

$$\bar{u} = u_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \delta(\omega - \xi c_l k_0),$$

где \mathbf{k}_0 — волновой вектор монохроматической волны изгибных колебаний границы

$$p = \frac{1}{3} i \mu s \frac{1 + \nu}{1 - \nu} k_{0y} e^{i k_{0x} x + i k_{0y} y - i \xi c_l k_0 t} e^{-k_0 \sqrt{1 - \xi^2 \gamma^2} |z|}. \quad (26)$$

Согласно (26), характерная длина спадаания l амплитуды колебаний атомов, сопутствующих колебаниям границы, в направлении, перпендикулярном к ней, равна $l = (k_0 \sqrt{1 - \xi^2 \gamma^2})^{-1}$. Волна давления (26) распространяется в кристалле со скоростью $V = \omega/q = c_l$. Однако в отличие от известных волн Рэлея, Лява, Стоунли [1-3] частота волн рассматриваемого здесь типа зависит от направления их распространения в плоскости двойникования. При изменении $\sin^2 \varphi$ от 1 до 0 частота изгибных волн монотонно изменяется от значения, соответствующего частоте рэлеевской волны

для материала с данными упругими свойствами, до частоты поперечных звуковых волн $\omega = c_t k$. Графически зависимость ξ от $\sin^2 \varphi$ для материалов с разными упругими свойствами изображена на рис. 1.

При изменении величины отношения $\gamma = c_t/c_l$ для различных веществ от $1/\sqrt{2}$ до 0 величина ξ меняется от 0.874 до 0.955 при $\sin^2 \varphi = 1$ и независимо от γ равняется 1 при $\sin^2 \varphi = 0$. Ширина интервала разрешенных значений ξ монотонно возрастает с ростом $\sin^2 \varphi$ (рис. 2).

Характерная длина проникновения волны в глубь кристалла (см., например, (26)) также зависит от направления ее распространения в плоскости двойниковой границы.

Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. С. 134.
- [2] Фарнелл Дж. Физическая акустика / Под ред. И. Л. Фабелинского. М.: Мир, 1973. Т. VI. С. 139.
- [3] Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
- [4] Косевич А. М., Поляков М. Л. // ФТТ. 1979. Т. 21. № 10. С. 2941—2946.
- [5] Косилов А. Т., Перевозников А. М., Рошупкин А. М. Динамика дислокаций и когерентных межфазных границ в кристаллах. Воронеж, ВПИ. 1984. 93 с.
- [6] Косилов А. Т., Перевозников А. М., Рошупкин А. М. // Поверхность. 1983. № 10. С. 36—51.
- [7] Косилов А. Т. // Изв. вузов, физика. 1985. № 5. С. 54—67.
- [8] Bross H. // Phys. St. Sol. 1964. V. 5. N 2. P. 329—342.
- [9] Де Вит Р. Континуальная теория дислокаций. М.: Мир, 1977. С. 18, 113—114.
- [10] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970. С. 496.

Воронежский
политехнический институт
Воронеж

Поступило в Редакцию
25 июля 1988 г.
В окончательной редакции
26 января 1989 г.