

УДК 536.241

ОСТЫВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ФОНОННОГО ИНЖЕКТОРА В РЕЖИМЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Д. В. Казаковцев, И. Б. Левинсон

Получено самосогласованное уравнение для температуры металлической пленки на подложке с нелокальной фононной теплопроводностью. Найдено его решение для короткого греющего импульса.

В работах [1, 2] развита теория нелокальной фононной теплопроводности (НЛТ) для неограниченной диэлектрической или полупроводящей среды. Вместе с тем во многих экспериментах фононы в среде генерируются тонкой металлической пленкой, напыленной на поверхность кристалла. Поэтому представляет интерес вопрос о том, как происходит остывание нагретой металлической пленки в случае, если в подложке фононы распространяются в режиме НЛТ. Существенный шаг к решению этой задачи сделан в работе [3], но при этом температура пленки не определялась самосогласованно (после решения задачи НЛТ в подложке). В итоге результаты, полученные в [3], описывают модельную ситуацию, когда зависимость температуры пленки от времени считается заданной. Конкретно рассмотрен случай, когда эта зависимость описывается ступенчатой функцией $\theta(t)$. В эксперименте обычно известна мощность греющего пленку импульса тока или света либо в случае короткого импульса — энергия, вложенная на единицу площади пленки. В настоящей работе получено самосогласованное уравнение для температуры пленки на подложке с НЛТ и найдено его решение в предельном случае короткого греющего импульса.

1. П о с т а н о в к а з а д а ч и

Рассмотрим полубесконечный кристалл, занимающий полупространство $z > 0$, в котором реализуется режим НЛТ. Это означает, что доминирующим механизмом рассеяния является упругое рассеяние на примесях, которое считается рэлеевским, так что соответствующее время жизни фононов частоты ω есть $\tau^*(\omega) \sim \omega^{-4}$, причем это время является самым коротким из всех времен релаксации фононов. Движение фононов всех частот имеет диффузионный характер, а соответствующий коэффициент диффузии равен $D(\omega) = s^2 \tau^*(\omega) / 3$. Второй актуальный механизм рассеяния обусловлен трехфононными неупругими процессами слияния двух фононов в один и распада одного фонона на два с сохранением полной энергии и импульса фононов. При этом время спонтанного распада фонона частоты ω равно $\tau(\omega) \sim \omega^{-5}$. Введем характерную частоту фононов температурного распределения $\omega_T = aT$, где $a = 2.82 \dots$; если отождествить ω_T с частотой, соответствующей максимальной спектральной плотности энергии, то время $\tau_T = \tau(\omega_T)$ будет характеризовать как процессы распада, так и процессы слияния тепловых фононов [1, 4, 5]. Согласно [1], диффузионная длина тепловых фононов за их время жизни $l_T = l(\omega_T) = [D(\omega_T)\tau \times \times (\omega_T)]^{1/2}$ является характерной длиной установления температуры.

Согласно [1], поток тепла в режиме НЛТ переносится фононами подтепловой области $\hbar\omega \ll T$, а их распространение описывается следующим уравнением для чисел заполнения

$$[\partial/\partial t - D(\omega)\nabla^2 + 1/\hat{\epsilon}(T, \omega)] n(\omega, \mathbf{r}, t) = w(T), \quad (1)$$

где

$$w(T) = 1/\tau(\omega_T) \propto T^5, \quad \hat{\epsilon}(T, \omega) = \tau(\omega_T)(T/\omega) \gg \tau(\omega_T).$$

В зависимости от характерной температуры T и размера L прогретой области кристалла могут реализоваться различные режимы НЛТ [2]. В настоящей работе мы ограничимся наиболее простым из них, описанным в [1], где рассматривалась одна фононная ветвь со свойствами поперечных фононов. Для возможности сравнения с экспериментом будем работать в модели трех одинаковых дебаевских ветвей с усредненным значением скорости звука s , определенным из теплоемкости кристалла в акустической области частот: $3s^{-3} = s_l^{-3} + 2s_t^{-3}$. Указанный режим НЛТ реализуется согласно [1, 2], при условии

$$l_T \ll L \ll \delta^{5/6} l_T, \quad \delta = \tau_T/\tau_T^*. \quad (2)$$

Обозначим нижнюю границу для размера прогретой области в (2) через $L_{\min} = l_T$, верхнюю — соответственно через $L_{\max} = \delta^{5/6} l_T$.

Ограничимся малым возмущением температуры, т. е. ситуацией, когда температура $T(\mathbf{r}, t)$ тепловых фононов, в которых содержится энергия, имеет вид

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \delta T(\mathbf{r}, t), \quad \delta T \ll T_0, \quad (3)$$

причем T_0 не зависит от координат и времени. Числа заполнения подтепловых фононов с $\hbar\omega \ll T$ имеют аналогичный вид

$$n(\omega, \mathbf{r}, t) = n(T_0 | \omega) + \delta n(\omega, \mathbf{r}, t), \quad \delta n \ll n(T_0 | \omega). \quad (4)$$

Здесь $n(T_0 | \omega)$ — равновесная функция распределения фононов с температурой T_0 . Подстановка (3), (4) в (1) и линеаризация по малым отклонениям от $n(T_0 | \omega)$ приводят к уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D(\omega) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\hat{\epsilon}_0(\omega)} \right] \delta n(\omega, z, t) = w_0 \theta(z, t), \quad (5)$$

где

$$\theta(z, t) = \delta T(z, t)/T_0, \quad \hat{\epsilon}_0(\omega) = \hat{\epsilon}(T_0, \omega), \quad w_0 = w(T_0). \quad (6)$$

Уравнение (5) записано для плоской геометрии, когда все величины зависят только от расстояния z до поверхности кристалла. Анализом этого случая мы в дальнейшем и ограничимся.

Напыленная пленка металла толщиной d занимает слой $-d < z < 0$. Мы полагаем, как и в [4], что за счет быстрого электрон-фононного взаимодействия и большой электронной теплопроводности в пленке всегда существует однородная по толщине температура. Тогда динамика пленки характеризуется зависимостью ее температуры $\bar{T}(t)$ от времени.

В процессе нелокальной теплопроводности движение фононов каждой частоты носит диффузионный характер. Поэтому уравнение (5) следует решать с граничным условием непрерывности чисел заполнения при $z=0$ (см., например, [6])

$$n(\omega, 0, t) = n(\bar{T}(t) | \omega), \quad (7)$$

при котором числа заполнения на границе соответствуют равновесным планковским с температурой пленки. Пусть $\bar{\theta}(t) = [\bar{T}(t) - T_0]/T_0$, причем $\bar{\theta}(t) \ll 1$, поскольку мы ограничиваемся линейным случаем (3), (4). В обозначениях (6) условие (7) для тепловых и для подтепловых фононов примет соответственно вид

$$\theta(z, t)|_{z=0} = \bar{\theta}(t), \quad \hbar\omega \gg T_0, \quad (8)$$

$$\delta n(\omega, 0, t) = [\bar{T}(t) - T_0]/\omega = \bar{\theta}(t) T_0/\omega, \quad \hbar\omega \ll T_0. \quad (9)$$

Таким образом, нужно решить (5) с граничными условиями (8), (9), считая $\theta(z, t)$ известной функцией. Далее, полагая, что поток энергии переносится фононами с $\hbar\omega \ll T_0$, можно написать и решить уравнение для температуры в кристалле $\theta(z, t)$. Подставляя найденное решение $\theta(z, t)$ в функцию $\delta n(\omega, z, t)$, запишем через нее поток энергии на границе $z=0$. Далее, зная поток, уходящий из пленки в кристалл, можно написать самосогласованное уравнение для зависимости температуры пленки от времени и решить его.

2. Распределение подтепловых фононов

Пусть зависимость температуры пленки от времени $\bar{\theta}(t)$ задана. Перепишем (5) в безразмерных переменных

$$\varepsilon = \omega/T_0, \quad \zeta = z/l_0 \equiv z/l(\omega_{T_0}), \quad s = t\omega_0.$$

Получим уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} - \sigma^{-4} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \sigma \right] \delta n(\sigma, \zeta, s) = \theta(\zeta, s) \quad (10)$$

с граничным условием (9) в виде

$$\delta n(\sigma, 0, s) = \bar{\theta}(s)/\sigma. \quad (11)$$

После преобразования Лапласа по безразмерной временной переменной s соотношения (10), (11) запишутся следующим образом:

$$[p + \sigma - \sigma^{-4} \partial^2 / \partial \zeta^2] \delta n(\sigma, \zeta, p) = \theta(\zeta, p), \quad \delta n(\sigma, 0, p) = \bar{\theta}(p)/\sigma. \quad (12), (13)$$

Решение уравнения (12) с граничным условием (13) удобно представить в виде $\delta n(\sigma, \zeta, p) = N_1(\sigma, \zeta, p) + N_2(\sigma, \zeta, p)$. Здесь $N_1(\sigma, \zeta, p)$ — решение неоднородного уравнения (12) с однородным граничным условием, а $N_2(\sigma, \zeta, p)$ — решение соответствующего однородного уравнения с граничным условием (13).

Для того чтобы найти решение N_1 , продолжим $\theta(\zeta, p)$ нечетным образом в область $\zeta < 0$, при этом автоматически выполнится однородное граничное условие. После преобразования Фурье по ζ получим из (12)

$$[p + \sigma - \sigma^{-4} k^2] N_1(\sigma, k, p) = \theta(k, p).$$

Выражаем отсюда $N_1(\sigma, k, p)$ через $\theta(k, p)$ и после обращения Фурье-преобразования находим

$$N_1(\sigma, \zeta, p) = \frac{\sigma^2}{2(\sigma + p)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta' \exp[-\sigma^2(p + \sigma)^{1/2} |\zeta' - \zeta|] \theta(\zeta', p).$$

Решение однородного уравнения, соответствующего (12), убывающее при $\zeta \rightarrow +\infty$, равно

$$N_2(\sigma, \zeta, p) |_{\zeta > 0} = A \exp[-\sigma^2(p + \sigma)^{1/2} \zeta].$$

Полагая здесь $\zeta=0$, из (13) находим $A = \bar{\theta}(p)/\sigma$. Продолжая N_2 в область $\zeta < 0$ нечетным образом, как и N_1 , получаем на всей оси

$$N_2(\sigma, \zeta, p) = (\bar{\theta}(p)/\sigma) \operatorname{sign}(\zeta) \exp[-\sigma^2(p + \sigma)^{1/2} |\zeta|].$$

Складывая N_1 и N_2 , получаем искомое выражение

$$\begin{aligned} \delta n(\sigma, \zeta, p) = & (\bar{\theta}(p)/\sigma) \operatorname{sign}(\zeta) \exp[-\sigma^2(p + \sigma)^{1/2} |\zeta|] + \\ & + \frac{\sigma^2}{2(\sigma + p)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta' \exp[-\sigma^2(p + \sigma)^{1/2} |\zeta' - \zeta|] \theta(\zeta', p) \end{aligned} \quad (14)$$

для чисел заполнения подтепловых фононов через температуру в кристалле.

3. Уравнение для температуры в кристалле

Зная функцию распределения (14) подтепловых фононов и полагая, что именно они определяют поток энергии, запишем уравнение для температуры в кристалле в виде

$$\partial \mathcal{E}(T) / \partial t + \partial q / \partial z = 0. \quad (15)$$

Здесь $\mathcal{E}(T)$ — энергия фононов в единице объема. В модели трех одинаковых ветвей

$$\mathcal{E}(T) = \frac{\pi^2}{10 (\hbar s)^3} T^4, \quad (16)$$

так что

$$\frac{\partial \mathcal{E}(T)}{\partial t} = \frac{2\pi^2}{5 (\hbar s)^3} T^3 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\pi^2}{5 (\hbar s)^3} T_0^4 \omega_0 \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{4 \mathcal{E}_0}{\tau_0} \frac{\partial \theta}{\partial s}.$$

Для потока энергии имеем

$$q(z, t) = \int_0^\infty d\omega \rho(\omega) \omega \left[-D(\omega) \frac{\partial}{\partial z} \delta n(\omega, z, t) \right] = -\frac{D_0}{l_0} \frac{3T_0^4}{2\pi^2 s^3} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{\partial \delta n(\sigma, \zeta, s)}{\partial \zeta}.$$

Здесь удобно отнести поток к единице

$$q_0 = \frac{4 \mathcal{E}_0 D_0}{l_0} = \frac{2\pi^2}{5} \frac{D_0 T_0^4}{l_0 (\hbar s)^2}. \quad (17)$$

Тогда в безразмерном виде

$$q(\zeta, s) = -\frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{\partial \delta n(\sigma, \zeta, s)}{\partial \zeta}. \quad (18)$$

Из (15)–(18) получаем уравнение для температуры в безразмерных единицах

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{15}{4\pi^4} \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{\partial \delta n(\sigma, \zeta, s)}{\partial \zeta}. \quad (19)$$

После преобразования Лапласа по времени s и подстановки $\delta n(\sigma, \zeta, p)$ в явном виде (14) находим

$$p\theta(k, p) = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty d\sigma \left\{ c^2 (p + \sigma) \bar{\theta}(p) \operatorname{sign}(\zeta) \exp[-\sigma^2 (p + \sigma)^{1/2} |\zeta|] - \right. \\ \left. - \frac{\sigma^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta' [2\delta(\zeta' - \zeta) - \sigma^2 (p + \sigma)^{1/2}] \exp[-\sigma^2 (p + \sigma)^{1/2} |\zeta' - \zeta|] \bar{\theta}(\zeta', p) \right\}.$$

Преобразование Фурье по ζ дает

$$p\theta(k, p) = \frac{15}{4\pi^4} \left[2ik\bar{\theta}(p) \int_0^\infty d\sigma \frac{\sigma^2 (p + \sigma)}{\sigma^4 (p + \sigma) + k^2} - k^2\theta(k, p) \int_0^\infty d\sigma \frac{\sigma^3}{\sigma^4 (p + \sigma) + k^2} \right]. \quad (20)$$

Если определить $H(w)$, следуя [1], и аналогично ввести функцию $F(w)$

$$H(w) = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{1}{w + x + x^{-4}}, \quad F(w) = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \frac{1}{w + x + x^{-4}},$$

то из (20) получим решение в виде

$$\theta(k, p) = i\bar{\theta}(p) \frac{2k^{2/3} H(pk^{-2/3}) + pk^{1/3} F(pk^{-1/3})}{p + k^{2/3} H(pk^{-2/3})}.$$

Этот результат с точностью до обозначений совпадает с полученным в [3] (см., например, формулу (7) в [3]). Обращая преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} \theta(\zeta, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\{-ik\zeta\} \theta(k, p) = \\ &= \frac{\bar{\theta}(p)}{\pi} \int_0^{\infty} dk \sin(k\zeta) \frac{2k^{3/2} H(pk^{-2/2}) + pk^{1/2} F(pk^{-2/2})}{p + k^{3/2} H(pk^{-2/2})}. \end{aligned} \quad (21)$$

Обращая преобразование Лапласа, можно получить зависимость температуры в различных точках кристалла, если временной ход граничной температуры известен. Так, если подставить в (21) граничную температуру в том же модельном виде, как и в [3],

$$\bar{\theta}(s) = \begin{cases} \bar{\theta} = \text{const}, & s > 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

то обращение преобразования Лапласа даст результаты (10), (11) из [3].

4. Поток энергии из пленки в кристалл

Нас, однако, интересует временной ход температуры пленки. Для его нахождения нужно вычислить поток энергии $Q(t)$ через поверхность $\zeta=0$. Его образ Лапласа мы получим, подставив решение (14) в формулу (18), положив в ней $\zeta=0$ и проведя преобразование Лапласа по s . С учетом нечетности по ζ функций $\theta(\zeta, s)$ и $\theta(\zeta, p)$ получим

$$Q(p) \equiv q(\zeta, p)|_{\zeta=0} = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^{\infty} d\sigma \left\{ \bar{\theta}(p) (p + \sigma)^{1/2} - \sigma^3 \int_0^{\infty} d\zeta' \exp[-\sigma^2 (p + \sigma)^{1/2} \zeta'] \theta(\zeta', p) \right\}.$$

Наконец, выражаем в явном виде $\theta(\zeta, p)$ из (21) и после интегрирования по ζ' получаем

$$\begin{aligned} Q(p) &= \frac{15}{4\pi^4} \bar{\theta}(p) \int_0^{\infty} d\sigma \left[(p + \sigma)^{1/2} - \right. \\ &\left. - \frac{\sigma^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sigma^4 (p + \sigma) + k^2} \frac{2k^{3/2} H(pk^{-2/2}) + pk^{1/2} F(pk^{-2/2})}{p + k^{3/2} H(pk^{-2/2})} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Интеграл по частоте $d\sigma$ от первого слагаемого в скобках расходится на верхнем пределе степенным образом, как $\sigma^{3/2}$. Однако главный член этой расходимости сокращается, если выделить соответствующее слагаемое в интеграле по dk

$$\frac{2k^{3/2} H(pk^{-2/2}) + pk^{1/2} F(pk^{-2/2})}{p + k^{3/2} H(pk^{-2/2})} = 2 - p \frac{2 - k^{3/2} F(pk^{-2/2})}{p + k^{3/2} H(pk^{-2/2})}.$$

Подставляя интеграл по dk от первого члена в (22), получаем

$$Q(p) = \frac{15}{4\pi^4} p \bar{\theta}(p) \int_0^{\infty} d\sigma \left[(p + \sigma)^{-1/2} - \frac{\sigma^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sigma^4 (p + \sigma) + k^2} \frac{k^{3/2} F(pk^{-2/2}) - 2}{p + k^{3/2} H(pk^{-2/2})} \right]. \quad (23)$$

Наш подход верен при $t \gg \tau_0$, т. е. при $s \gg 1$. Это значит, что нас интересует только асимптотика $Q(p)$ при $p \ll 1$. Для того чтобы ее найти, удобно разбить (23) на две части, а именно

$$Q_i(p) = Q_l(p) + Q_n(p), \quad (24)$$

$$Q_l(p) = \frac{15}{4\pi^4} p^{\bar{\theta}}(p) \int_0^{\infty} d\sigma \left[(p+\sigma)^{-1/2} - \frac{\sigma^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sigma^4(p+\sigma) + k^2} \frac{k^{1/2} F(pk^{-2/5})}{p + k^{1/2} H(pk^{-2/5})} \right], \quad (24a)$$

$$Q_n(p) = \frac{2p^{\bar{\theta}}(p)}{\pi} \int_0^{\infty} \sigma^3 d\sigma \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sigma^4(p+\sigma) + k^2} \frac{1}{p + k^{1/2} H(pk^{-2/5})}. \quad (24b)$$

Для вычисления потока Q_i при $p \ll 1$ достаточно положить везде под интегралом $p=0$. При этом получим

$$Q_l = \frac{15}{4\pi^4} p^{\bar{\theta}}(p) \int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{1/2}} \left[1 - \frac{F(0)}{2H(0) \cos(\pi/5)} \right]. \quad (25)$$

Этот интеграл формально расходится на верхнем пределе. Однако уравнение (10) и его решение (14) справедливы только при $\sigma \ll 1$, или, что то же, $\hbar\omega \ll T_0$. Поэтому интеграл в (25) определяется значениями $\sigma \simeq 1$, лежащими на границе области применимости решения (14). Физический смысл расходимости в (25) состоит в том, что Q_l описывает обычную локальную часть потока энергии, которая переносится фононами с $\hbar\omega \simeq T_0$ и, естественно, всегда имеется наряду с нелокальной. Оценку этой части потока получим, обрезая интеграл в (25) на $\sigma \simeq 1$. При этом, поскольку в (25) существенны $\sigma \simeq 1$, а значит, при интегрировании по dk существенны $k \simeq 1$, приближение $p=0$ в (24a) оправдано тем, что $p \ll 1$ везде сравнивается с $\sigma \simeq 1$ или $k \simeq 1$. Поскольку множитель в квадратных скобках в (25) порядка единицы, как и неизвестный множитель при обрезании интеграла, имеем

$$Q_l = \gamma p^{\bar{\theta}}(p), \quad (26)$$

где γ — неизвестный множитель порядка единицы.

Теперь вычислим вторую часть потока (24b). Если положить здесь $p=0$, то интеграл по dk разойдется на нижнем пределе. Это значит, что существенны малые k , и по сравнению с ними пренебрегать p нельзя. Можно, однако, продвинуться дальше при конечном p . А именно, если сначала провести интегрирование по $d\sigma$, получим

$$Q_n = \frac{2p^{\bar{\theta}}(p)}{\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{k^{-2/5} H(pk^{-2/5})}{p + k^{1/2} H(pk^{-2/5})}. \quad (27)$$

Предположим, что можно заменить $H(pk^{-2/5})$ на $H(0)$. Тогда интеграл по dk сводится к известному (см., например, [7], формула 856.08) и дает

$$Q_n = \frac{5}{4} \frac{[H(0)]^{5/4}}{\sin(3\pi/8)} p^{3/8} \bar{\theta}(p). \quad (28)$$

Интеграл по dk в (27) определяется малыми $k \simeq [p/H(0)]^{2/5}$. При этом $pk^{-2/5} \simeq p^{3/4} H(0)^{1/4} \ll 1$, так что наша замена $H(pk^{-2/5})$ на $H(0)$ при вычислении (27) оправдана. Наконец, если вернуться к интегралу по $d\sigma$ в (24b), то видно, что он определяется областью $\sigma \simeq k^{2/5} = [p/H(0)]^{1/4} \ll 1$. Таким образом, эта часть потока переносится подтепловыми фононами, и именно она является нелокальной.

Выражение (28) для потока энергии из пленки можно получить из выражения (21) для температуры другим способом. Для этого нужно проинтегрировать (21) по объему кристалла, т. е. по $d\zeta$ от 0 до $+\infty$, что даст лапласов образ $E(p)$ полной энергии фононов в кристалле. Из закона сохранения энергии получим, что поток тепла через поверхность $\zeta=0$ равен $\partial E(t)/\partial t$, что приведет опять к (28).

5. Уравнение для температуры пленки

Запишем плотность энергии фононов в пленке аналогично (16)

$$\bar{\mathcal{E}}(\bar{T}) = \frac{\pi^2}{10(hs)^3} T^4.$$

Тогда на единицу площади пленки придется энергия

$$E(t) = d \frac{\pi^2}{10} \frac{T^4}{s^3 h^3}.$$

В обычном виде уравнение для температуры пленки запишется следующим образом:

$$dE(t)/dt = W(t) - Q_i(t) - Q_n(t). \quad (29)$$

Здесь $W(t)$ — мощность внешнего источника энергии на единицу площади пленки; $Q_i(t)$ и $Q_n(t)$ — потоки энергии, соответствующие в размерных координатах (26) и (28). Поскольку для решения (29) мы опять применим преобразование Лапласа, вычислять явный вид $Q_i(t)$ и $Q_n(t)$ нет нужды. После обезразмеривания (29) делением на единицу потока (17) и преобразования Лапласа по безразмерному времени s получаем из (29) с учетом (26) и (28)

$$\frac{d}{l_0} \left(\frac{s}{s}\right)^3 p^\theta(p) = W(p) - \gamma p^\theta(p) - \frac{5}{4} \frac{[H(0)]^{3/8}}{\sin(3\pi/8)} p^{3/8}(p). \quad (30)$$

Видно, что вклад от локального потока имеет вид добавки к теплоемкости пленки порядка l_0/d . Поскольку d — макроскопический размер, а l_0 — микроскопический параметр, мы полагаем, что $l_0/d \ll 1$. Тогда вкладом локального потока Q_i в (30) можно пренебречь и удобно представить (30) в виде

$$A p^\theta(p) = W(p) - B p^{3/8}(p), \quad (31)$$

$$A = \frac{d}{l_0} \left(\frac{s}{s}\right)^3, \quad B = \frac{5}{4} \frac{[H(0)]^{3/8}}{\sin(3\pi/8)}. \quad (32)$$

Отсюда

$$\bar{\theta}(p) = W(p)/(Ap + Bp^{3/8}).$$

Для того чтобы искомая функция не содержала параметров, сделаем масштабное преобразование $s' = s\xi$. Тогда при $\xi = (B/A)^{8/5}$ получаем

$$\bar{\theta}(p') = \frac{W(p')}{A} \frac{1}{p' + (p')^{3/8}}. \quad (33)$$

Время при этом измеряется в единицах

$$[t] = \tau_0 \xi^{-1} = \frac{\tau_0}{H(0)} \left[\frac{d}{l_0} \left(\frac{s}{s}\right)^3 \frac{4}{5} \sin \frac{3\pi}{8} \right]^{5/8} \gg \tau_0. \quad (34)$$

Функция, описывающая зависимость температуры пленки от времени, может быть получена из (33) обращением преобразования Лапласа при любом заданном ходе накачки. Мы вычислим ее для случая предельно короткого греющего импульса $W(t) \sim \delta(t)$, для которого $W(p) = \text{const}$. Пусть импульсом вкладывается энергия E на единицу площади пленки, т. е. $W(t) = E\delta(t)$, и в размерном времени $W(p) = E$. Тогда в безразмерных единицах имеем

$$W(s) = \frac{E}{q_0 \tau_0} \delta(s), \quad W(p) = \frac{E}{q_0 \tau_0}$$

и уравнение (33) в обозначениях (32) приобретает вид

$$\bar{\theta}(p') = \frac{C}{p' + (p')^{3/8}}, \quad C = \frac{E_0}{A q_0 \tau_0}.$$

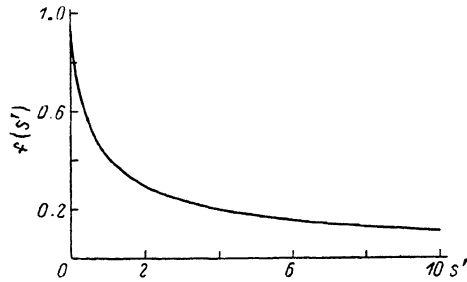
Пусть $\theta(s') = Cf(s')$. Тогда соответствующий $f(s')$ образ $F(p')$ универсален и не содержит параметров

$$F(p') = 1/(p' + (p')^{3/8}).$$

Для обращения преобразования Лапласа запишем

$$f(s') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\exp[p's'] dp'}{p' + (p')^{3/8}}, \quad \alpha > 0. \quad (35)$$

Пусть замкнутый контур C идет вдоль нижнего берега разреза $(-\infty, 0)$ от $-R$ до $-\delta$, охватывает нуль по окружности радиуса δ , затем идет



вдоль верхнего берега того же разреза от $-\delta$ до $-R$ и замыкается окружностью радиуса R . Поскольку подынтегральная функция имеет особенности только в нуле и на бесконечности, инте-

Зависимость безразмерной температуры пленки (36) от времени.
Время измеряется в единицах (34).

грал по описанному контуру C равен нулю. Устремляя R к ∞ , а δ к нулю, получим, что интеграл (35) является суммой интегралов вдоль берегов разреза из нуля вдоль полуоси $(0, -\infty)$

$$f(s') = \frac{1}{\pi} \sin \frac{3\pi}{8} \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-xs'\} dx}{x^{13/8} - 2x \cos(3\pi/8) + x^{3/8}}. \quad (36)$$

Аналитически этот интеграл вычисляется только при $s'=0$, что дает $f(0)=1$. Общий вид функции $f(s')$ (см. рисунок) получен численным интегрированием (36) на ЭВМ. При $s' \rightarrow \infty$ из (36) можно найти асимптотику

$$f(s') = \frac{\Gamma(5/8)}{\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) (s')^{-5/8}, \quad s' \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Сравним (37) с временной асимптотикой температуры пленки в случае независимой диффузии фононов разных частот (см. формулу (27) в [6]), также убывающей степенным образом пропорционально $t^{-1/2}$. Видно, что (37) убывает быстрее, но различие в степенях невелико и вряд ли может быть надежно получено экспериментально. Отметим также, что (37) подтверждает закон прогревания подложки (12) из [4] с той разницей, что там была получена оценка характерной глубины прогрева по порядку величины, а (37) — точная асимптотика. Поскольку степень $-5/8$ асимптотики (37) совпадает с соответствующей степенью спада температуры в центре возбужденной области в [1], интересно сравнить коэффициенты при этих степенях. Оказывается, в нашем случае температура несколько ниже, отношение коэффициента в (37) к найденному в [1] составляет $(2^{1/2}+2)/4 \approx 0.85$. Это может быть связано с тем, что в настоящей задаче пленка служит добавочным каналом энергетической релаксации фононов, облегчая им преодоление узкого горла — перекачки из области частот $\hbar\omega \geq T$ в область переносящих энергию частот $\hbar\omega \ll T$.

6. Оценки параметров

Естественно возникает вопрос, при каких условиях можно экспериментально обнаружить рассчитанные выше особенности остывания металлической пленки, связанные с нелокальной теплопроводностью под-

ложки. Здесь нет причин для особого оптимизма. Так, кажется естественным считать характерную длину l_0 установления температуры как параметр микроскопический, малый по сравнению с макроскопическими размерами, например толщиной пленки, что мы и делали выше. Но оценки показывают, что при низких температурах это может быть не так.

Воспользуемся оценками $\tau^*(\omega)$ из работы [4]. Для кристаллов Ge, Si и GaAs наиболее надежные значения $\tau(\omega)$ получены Тамурой [8]. Используя формулы из [8] и упругие модули третьего порядка из [9-11], можно оценить $\tau(\omega)$ для InSb, CaF₂ и SrF₂. Вычисленные таким образом значения l_0 при $T_0=30$ К приведены в таблице. Учитывая, что в методе тепловых импульсов обычно применяются пленки толщиной $d \approx 10^2 - 10^3$ нм, видим, что для этих кристаллов условие $d \gg l_0$ выполняется только при достаточно высоких температурах.

	$l_0(T=30 \text{ К}),$ см	$T_d, \text{ К}$	$\delta(T_d)$	$L_{\min}(T_d),$ см	$L_{\max}(T_d),$ см
Ge	0.01	60	166	$5 \cdot 10^{-6}$	0.03
Si	0.2	82	70	$2 \cdot 10^{-3}$	0.08
GaAs	0.017	70	17.4	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$
InSb	$7 \cdot 10^{-4}$	49	8.7	$8 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$
CaF ₂	0.036	71	30	$8 \cdot 10^{-4}$	0.01
CaF ₂ + 0.003 % Eu	0.027	66	56	$8 \cdot 10^{-4}$	0.02
CaF ₂ + 0.01 % Eu	0.02	62	120	$8 \cdot 10^{-4}$	0.04
CaF ₂ + 0.02 % Sm	0.014	58	220	$8 \cdot 10^{-4}$	0.07
SrF ₂	0.02	74	14.6	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$
SrF ₂ + 0.1 % Eu	$6.4 \cdot 10^{-3}$	58	180	$3 \cdot 10^{-4}$	0.025
ИАГ + 10 % Dy	0.012	46	$3 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^{-3}$	10

В качестве конкретного примера рассмотрим пленку золота толщиной $d=300$ нм на перечисленных выше подложках. Зная $l_0(T_0=30 \text{ К})$, можно найти граничную температуру T_d , при которой в (30) сравниваются по порядку величины вклад от теплоемкости пленки и поправка к нему за счет локального потока. Последняя является оценкой точности нашего приближения: выражения (18) для потока энергии через δl и уравнения (19) для температуры в кристалле. Поэтому для справедливости полученных выражений температура должна быть больше T_d . Из таблицы видно, во-первых, что температуры T_d высокие, так что область существования рассмотренного здесь простого режима НЛТ трех одинаковых ветвей (или, что то же самое, одной усредненной ветви), ограниченная неравенствами (2), уже при $T=T_d$ довольно узка, а при больших температурах еще сузится. Во-вторых, T_d сравнимы с дебаевскими температурами соответствующих кристаллов, и могут включиться процессы переброса, которые, как отмечено в [1], для $\omega \rightarrow 0$ дают $\tau_u \propto \omega^{-1}$. Если $\tau_u(\bar{\omega})$ станет меньше $\hat{\tau}(\bar{\omega})$, возникнет более строгое, чем L_{\max} , ограничение сверху, и «окно» (2) для остывания пленки в режиме НЛТ сузится. Наконец, оценки показывают, что при толщине прогрева порядка L_{\max} длина волны фононов частоты $\bar{\omega}$, переносящих энергию, приближается сверху к толщине пленки, что тоже может ограничить применимость построенной модели.

Ряд экспериментов [12-14] проведен на кристаллах иттрий-алюминиевого граната (ИАГ), легированного диспрозием. В этих кристаллах диапазон между L_{\min} и L_{\max} намного больше, чем в ранее упомянутых, поскольку рассеяние на атомах диспрозия велико за счет их большой (10 % по отношению к иттрию) концентрации, а слабое затухание звука позволяет ожидать большого времени жизни фононов по отношению к распаду. Действительно, по формулам [4] получаем при $T_0=10 \text{ К}$

$$\tau_0^* = 1.4 \cdot 10^{-8} \text{ с.} \quad (38)$$

Это значение примерно в 20 раз меньше теоретической оценки, сделанной в [14] согласно [15]. Различие, по-видимому, связано с тем, что фор-

мула (9) в [15] ошибочна: в ней не проведено суммирование вкладов от различных возможных положений атома Dy в элементарной ячейке. В предположении, что атомы Dy на разных местах иттрия в элементарной ячейке дают одинаковый вклад в рассеяние, такое суммирование даст в упомянутой формуле (9) из [15] добавочный множитель 24 по числу мест атомов иттрия в элементарной ячейке. С учетом этого оценка из [14] приведет к $\tau^* = 2.5$ нс для фононов с энергией 40 К. Из (38) с учетом рэлеевского закона $\tau^* \sim \omega^{-4}$ получим $\tau^* = 3.5$ нс. Оба значения хорошо согласуются как между собой, так и с экспериментом [14], где соответствующее время жизни $\tau^* \leq 1$ нс. Оценка ангармонического времени жизни по формулам [8] с модулями упругости из [16] дает $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ с при $T_0 = 10$ К. Как видно из этих чисел и из сделанных на их основании дальнейших оценок, приведенных в таблице, «окно» для существования НЛТ в ИАГ действительно широкое. Но и здесь (см. таблицу) маловероятно наблюдать влияние вычисленных в настоящей работе эффектов на остывание пленки при обычных для экспериментов значениях толщины пленки порядка тысячи ангстрем. По-видимому, это можно сделать либо при более толстых пленках, либо на кристаллах с меньшими значениями τ и τ^* . Заметим, однако, что все наши численные оценки существенно опираются на предположение, что неизвестный множитель γ в (26) порядка единицы. Численная малость этого множителя может существенно облегчить возможность экспериментального наблюдения рассчитанных эффектов.

В заключение Д. В. Казаковцев считает приятным долгом выразить благодарность С. В. Мешкову за многочисленные полезные обсуждения различных аспектов настоящей статьи и постоянную поддержку, а также помощь при проведении численных расчетов.

Список литературы

- [1] Левинсон И. Б. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. № 4. С. 1394—1407.
- [2] Гусейнов Н. М., Левинсон И. Б. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. № 6. С. 1936—1944.
- [3] Wilson T. E., Schaich W. L. // Sol. St. Comm. 1984. V. 50. N 1. P. 3—6.
- [4] Kazakovtsev D. V., Levinson Y. B. // Phys. St. Sol. (b). 1986. V. 136. N 2. P. 425—434.
- [5] Kazakovtsev D. V., Levinson Y. B. Lecture Notes in Physics. V. 285. Physics of Phonons / Ed. T. Paszkiewicz. Springer. 1987. P. 276—288.
- [6] Kazakovtsev D. V., Levinson Y. B. // J. Low-Temp. Phys. 1981. V. 45. N 1/2. P. 49—66.
- [7] Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., 1983.
- [8] Tamura S. // Phys. Rev. B. 1985. V. 31. N 4. P. 2574—2577.
- [9] Drabble J. R., Brammer A. J. // Proc. Phys. Soc. 1967. V. 91. Pt 4. N 574. P. 959—964.
- [10] Alterovits S., Gerlich D. // Phys. Rev. 1969. V. 184. N 3. P. 999—1002.
- [11] Alterovits S., Gerlich D. // Phys. Rev. B. 1970. V. 1. N 6. P. 2718—2723.
- [12] Иванов С. Н., Хазанов Е. Н. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 1. С. 294—299.
- [13] Иванов С. Н., Хазанов Е. Н., Таранов А. В. // ФТТ. 1985. Т. 27. № 9. С. 2791—2794.
- [14] Иванов С. Н., Хазанов Е. Н., Таранов А. В. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. № 11. С. 1824—1829.
- [15] Гуляев Ю. В., Козорезов А. Г., Красильников М. В. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. № 1. С. 243—250.
- [16] Yogurtcu Y. K., Miller A. J., Saunders G. A. // J. Phys. C. 1980. V. 13. N 36. P. 6585—6597.

Институт физики твердого тела АН СССР
 Институт проблем технологии
 микроэлектроники и особо чистых материалов
 АН СССР
 Черноголовка
 Московская область

Поступило в Редакцию
 28 декабря 1988 г.