УДК 539.2

КОЭФФИЦИЕНТ ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА ЧЕРЕЗ СЛУЧАЙНЫЙ ОДНОМЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

В. М. Гаспарян

Развит формализм для вычисления плотности состояний и сопротивления конечных одномерных цепочек произвольных потенциалов без определения собственных функций системы.

Введение

Настоящая работа посвящена выводу формулы для сопротивления и плотности состояний одномерных цепочек случайных δ-потенциалов (разделы 1, 2), удобную как для численного счета, так и для исследования особенностей локализации электронов, в одномерном случае во внешнем поле. Это выражение для сопротивления справедливо для цепочек произвольной длины при любом характере беспорядка. При этом не требуется знания точных волновых функций электрона в этом потенциале.

Результаты, приведенные во Введении, опубликованы в [1].

Рассмотрим потенциал типа

$$V(x)=\sum_{l=1}^{N} V_l\delta(x-x_l),\qquad x_l<x_{l+1}, \tag{1}$$

где V_l, x_l — произвольные величины. Функция Грина (ФГ) электрона в такой системе $G(x, x')$ связана с ФГ свободных электронов $G_0(x, x')$ соотношением

$$G(x, x')=G_0(x, x')-R_{\bar{1}}\frac{G_0(x, x_1)\,G_0(x_1, x')}{G_0(x_1, x_1)},\qquad x, x'\leqslant x_1, \tag{2}$$

$$G_0(x, x')=\frac{i}{2k}\exp(ik\,|x-x'|),\qquad k=\sqrt{E+i\delta}$$

($\hbar=1$, $m_0=1/2$ — масса электрона). Как мы покажем ниже, коэффициент отражения от такой цепочки представим в виде

$$R\equiv|R_{\bar{1}}|^2=1-|D_N|^{-2}, \tag{3}$$

где

$$D_N=\det\left|\delta_{nl}+\frac{iV_l}{2k}\exp(ik\,|x_l-x_n|)\right|, \tag{4}$$

а коэффициент прозрачности такой цепочки имеет соответственно вид

$$T=1-R=|D_N|^{-2}.$$

Согласно Ландауэру [2], сопротивление такой цепочки есть

$$\rho_N=R/T=|D_N|^2-1. \tag{5}$$

Плотность состояний при $N\to\infty$ также можно выразить через величину D_N

$$\nu \equiv -(\pi\,|x_N - x_1|)^{-1} \int\limits_{x_1}^{x_N} dx\,\mathrm{Im}\,G(x,\ x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \nu_0 - (\pi|x_N - x_1|)^{-1} \frac{\partial}{\partial E} \ln D_N, \qquad (6)$$

где $\nu_0 = 1/2\pi k$ — плотность состояний свободных электронов.

Аналогичное выражение для плотности состояний в одномерной цепочке, состоящей из δ-потенциалов равных амплитуд (т. е. $V_l = V$), получено в [3]. Функция Грина $G(x,\ x)$, а следовательно и D_N, является аналитической функцией энергии $E = k^2$. Отсюда, используя соотношения (5) и (6), можно получить дисперсионное соотношение типа полученного Таулессом [4]

$$|x_N - x_1|^{-1} \frac{\partial}{\partial E} \ln(\rho_N(E) + 1) \xrightarrow[N\to\infty]{} 2 \int dE' \frac{\nu_E - \nu_0}{E' - E}, \qquad (7)$$

связывающее сопротивление данной одномерной цепочки с плотностью состояний.

Дисперсионное соотношение (7) справедливо не только при экспотенциальном росте $\rho_N(E)$ (при $N \to \infty$) [4], но и при конечных значениях $\rho_N(E)$ (см. (14)).

Детерминант D_N случайной цепочки δ-потенциалов удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$D_N = A_N D_{N-1} - B_N D_{N-2}, \qquad (8)$$

где

$$A_N = 1 + \frac{V_N}{V_{N-1}} \exp(2ika_{N-1}) + \frac{iV_N}{2k}[1 - \exp(2ika_{N-1})], \quad N > 1,$$

$$A_1 = 1 + \frac{iV_1}{2k}, \qquad B_N = \frac{V_N}{V_{N-1}} \exp(2ika_{N-1}), \qquad (9)$$

$D_{N-1\,(N-2)})$ — определитель (4), в котором отсутствуют N-й (и N—1-й) строка и столбец

$$a_{N-1} = |x_N - x_{N-1}|, \qquad D_{-1} = 0, \qquad D_0 = 1.$$

В модели Кронига—Пенни, когда $V_l = V$ и имеется периодическое расположение потенциалов с периодом a, спектр электрона определяется соотношением

$$\cos\beta a = \mathrm{Re}\,[e^{-ika}(1 + iV/2k)], \qquad (10)$$

где β играет роль квазиимпульса. Условие $|\cos\beta a| < 1$ определяет состояние в разрешенной зоне.

В случае обобщенной модели Кронига—Пенни, в которой вместо одного δ-образного потенциала элементарная ячейка содержит m таких потенциалов с произвольными амплитудами V_m, расположенных в произвольных точках x_m, коэффициент прохождения через одну элементарную ячейку в наших обозначениях имеет вид

$$t_m = e^{ikd} D_m^{-1}, \qquad T = |t_m|^2, \qquad (11)$$

где d — период структуры. Соотношение между коэффициентом прохождения t_m и электронным спектром получено в книге [5]. Используя (11), спектр можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\,(e^{-ikd} D_m) = \cos\beta d. \qquad (12)$$

При $n=1$ (12) совпадает с (10). При $n=2$ подстановка (4) в (12) приводит к результату, полученному в [6].

Для конечной цепочки Кронига—Пенни, состоящей из N одинаковых потенциалов V, из (4) получим

$$D_N = e^{iNka}\left[\cos N\beta a + i\left(\frac{V}{2k}\cos ka - \sin ka\right)\frac{\sin N\beta a}{\sin\beta a}\right]. \qquad (13)$$

Из (6) и (13) прямо следует, что при $N \to \infty$, как и следовало ожидать

$$\nu = \frac{1}{\pi} \frac{\partial \beta}{\partial E} \Big|_{\operatorname{Im}\beta \to +0} .$$

Подставляя (13) в (5), получим, что сопротивление такой цепи имеет вид

$$\rho_N = \left(\frac{V}{2k}\right)^2 \frac{\sin^2 \beta a N}{\sin^2 \beta a} = \rho_1 \frac{\sin^2 \beta a N}{\sin^2 \beta a} . \tag{14}$$

Это выражение описывает граничное сопротивление между периодической структурой и идеальным проводником (ρ_1 — «сопротивление» одной ячейки структуры).

Из (14) видно, что сопротивление такой цепи не растет с ростом N, поэтому удельное сопротивление для состояний в разрешенной зоне при $|\cos \beta a| < 1$ стремится к нулю при $N \to \infty$. Для состояний в запрещенной зоне, когда $\cos(i\beta a) = \operatorname{ch} \beta a > 1$, сопротивление экспоненциально растет с ростом N.

Рассмотрим теперь случай, когда δ-потенциалы расположены периодически с периодом a, но имеют разные амплитуды V_l. Если $ka = \pi n$ (n — целое), т. е. имеет место резонанс, то из (4) можно получить, что

$$D_N = 1 + i \sum_{l=1}^{N} \frac{V_l}{2k}, \quad \rho_N = \left(\sum_{l=1}^{N} \frac{V_l}{2k}\right)^2 = N^2 \frac{\bar{V}^2}{4k^2} , \tag{15}$$

где $\bar{V} = N^{-1} \sum_{l=1}^{N} V_l$ — среднее значение потенциала в данном образце. Из (15) видно, что при $\langle V \rangle \neq 0$ ρ_N растет пропорционально квадрату длины образца. Формула (15) для ρ_N очень естественна. Она говорит о том, что точное выполнение резонансного условия $ka = \pi n$ эквивалентно тому, что все потенциалы V_l расположены в одной точке.

Для среднего по ансамблю образцов сопротивления из (15) следует

$$\rho_N = \left(\frac{N}{2k}\right)^2 \langle V^2 \rangle + N \frac{\langle V^2 \rangle - \langle V^2 \rangle}{4k^2} \tag{16}$$

($\langle \ldots \rangle$ означают усреднения по ансамблю). При $\langle V \rangle = 0$ $\rho_N \sim N$, так что длина свободного пробега пропорциональна $k^2 / \langle V^2 \rangle$.

Рекуррентное соотношение (8) удобно для численного решения одномерной цепочки с произвольным потенциалом. Получим асимптотическое выражение для ρ_N при больших значениях случайного потенциала. Пусть $A_1 \simeq iV_1/2k$, $A_{N>1} \approx V_N k^{-1} \sin ka e^{ika}$. Тогда рекуррентное соотношение легко решается, так как $D_{N-2} \ll D_N$

$$D_N = \frac{i}{2} \frac{\exp[i(N-1)ka]}{\sin ka} \left(\frac{\sin ka}{ka}\right)^N \prod_{l=1}^{N} (V_l a). \tag{17}$$

Используя (17), получим для сопротивления цепи выражение, аналогичное результату работы [7]

$$\rho_N + 1 = \frac{1}{4 \sin^2 ka} \left(\frac{\sin^2 ka}{k^2 a^2}\right)^N \prod_{l=1}^{N} V_l^2 = \frac{1}{4 \sin^2 ka} \exp\left(\frac{N}{\xi}\right),$$

где длина локализации

$$\xi^{-1}(k) = \ln \langle V \rangle^2 a^2 \frac{\sin^2 ka}{k^2 a^2} + N^{-1} \sum_{l=1}^{N} \ln \frac{V_l^2}{\langle V \rangle^2} .$$

Эта формула справедлива и при $ka \to 0$, где

$$\xi^{-1}(0) = N^{-1} \sum_{l=1}^{N} \ln \frac{V_l^2}{\langle V \rangle^2} ,$$

$\langle V \rangle$ — среднее значение потенциала.

Рассмотрим свойства одномерной цепочки в модели Ллойда [8], когда функция распределения потенциалов есть распределение Коши

$$P(V_n) = \pi^{-1} \frac{\gamma}{(V_n - V)^2 + \gamma^2}.$$

Согласно [8], в этой модели

$$\langle G(x, x) \rangle = G(x, x)\,|_{V \to V + i\gamma\, \mathrm{sign}\, \mathrm{Im}\, E},$$

поэтому (см. (6))

$$\langle \ln(\rho_N + 1) \rangle = -2\,\mathrm{Re} \left\langle \int_{x_1}^{x_N} dx \int_{-\infty}^{E} dE' G(x, x'; E') \right\rangle = \ln |\bar{D}_N|^2,$$

где $\bar{D}_N$ — детерминант для модели Кронига—Пенни с заменой всех потенциалов на $V - i\gamma$. Согласно (13), при периодическом расположении потенциалов

$$\bar{D}_N = \exp(iNka) \left\{ \cos N\bar{\beta}a + i \left[\frac{V - i\gamma}{2k} \cos ka - \sin ka \right] \frac{\sin N\bar{\beta}a}{\sin \bar{\beta}a} \right\}, \tag{18}$$

где $\bar{\beta}$ определяется соотношением

$$\cos \bar{\beta}a = \cos ka - \frac{V - i\gamma}{2k} \sin ka.$$

Из (18) и (5) следует, что сопротивление цепочки из N δ-потенциалов имеет вид $(L = aN)$

$$\langle \ln(\rho_N + 1) \rangle = \ln \left(\bar{\rho}_1 \frac{\mathrm{sh}^2\, yL + \sin^2 \beta L}{\mathrm{sh}^2\, ya + \sin^2 \beta a} + 1 \right), \tag{19}$$

где $y = \mathrm{Im}\, \bar{\beta}$, β определяется из уравнения (10),

$$\bar{\rho}_1 = \left| 1 + \frac{V + i\gamma}{2k} \right|^2 - 1.$$

При $L \to \infty$ из (19) следует, что среднее геометрическое сопротивление экспотенциально растет с ростом длины образца L и при произвольном ka радиус локализации имеет вид [9]

$$\xi^{-1} = \lim_{L \to \infty} L^{-1} \langle \ln(\rho_N + 1) \rangle = \frac{2}{a} \mathrm{Im}\, \bar{\beta} = \frac{2}{a} y = \frac{2}{a} \ln(\sqrt{t + 1} + \sqrt{t}),$$

$$2t = \left(\frac{\gamma}{2k} \right)^2 \sin^2 ka - \sin^2 \beta a + \left\{ \left[\left(\frac{\gamma}{2k} \right)^2 \sin^2 ka - \sin^2 \beta a \right]^2 + \left(\frac{\gamma \sin ka}{k} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Видно, что при $ka \to 0$ остается конечным. С другой стороны, при $ka \to \pi n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ξ стремится к бесконечности. Последний вывод является следствием использованной здесь специфической модели — периодически расположенными рассеивателями, — образующей простую решетку. В несколько обобщенной модели, когда в одной элементарной ячейке имеются два δ-потенциала [10] или же когда к исходному потенциалу добавляется периодическое поле [11], исчезают как особенности в плотности состояний, так и неограниченное возрастание ξ.

1. Вывод основных соотношений

В настоящем разделе мы приведем вывод связи коэффициента отражения линейной цепочки случайных δ-образных потенциалов с детерминантом D_N.

Рассмотрим последовательность δ-потенциалов с произвольными амплитудами V_l, находящихся в произвольных точках x_l (выражение (1)). Если кроме $V(x)$ имеется регулярный потенциал $U(x)$ (внешнее электрическое поле, периодический потенциал и т. д.), то функция Грина электрона удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x)+\sum_{l=1}^{N} V_l\delta(x-x_l)-k^2\right\} G(x, x'; k)=\delta(x-x'). \tag{20}$$

Уравнение (20) можно записать как уравнение Дайсона

$$G(x, x')+\int dx'' G_0(x, x'')\, V(x'')\, G(x'', x')=G_0(x, x'), \tag{21}$$

где $G_0(x, x')$ — ФГ электрона в потенциале $U(x)$.

Для получения явного вида $G(x, x')$ поступим следующим образом. Выделим из потенциала $V(x)$ член, соответствующий крайней правой точке x_N

$$V(x)=V_N\delta(x-x_N)+\sum_{l=1}^{N-1} V_l\delta(x-x_l). \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21), получим

$$G(x, x')+\int dx'' G_N(x, x'')\sum_{l=1}^{N-1} V_l\delta(x''-x_l)\, G(x'', x')=G_N(x, x'),$$

где

$$G_N(x, x')\equiv G_0(x, x')-V_N\frac{G_0(x, x_N)\, G_0(x_N, x')}{1+V_N G_0(x_N, x_N)}=$$

$$=G_0(x, x')-r_N\frac{G_0(x, x_N)\, G_0(x_N, x')}{G_0(x_N, x_N)}, \quad -\infty<x, x'<\infty,$$

$$r_j=V_j G_0(x_j, x_j)\,[1+V_j G_0(x_j, x_j)]^{-1}, \tag{23}$$

r_N — комплексная амплитуда отражения электрона от потенциала V_N в отсутствие всех остальных $(N-1)$ левых потенциалов. Если выделить из второго члена выражения (22) следующий $(N-1)$ потенциал, то, повторяя процедуру, получим

$$G(x, x')+\int dx'' G_{N-1}(x, x'')\sum_{l=1}^{N-2} V_l\delta(x''-x_l)\, G(x'', x')=G_{N-1}(x, x').$$

Здесь

$$G_{N-1}(x, x')=G_N(x, x')-R_{\overleftarrow{N-1}}\frac{G_N(x, x_{N-1})\, G_N(x_{N-1}, x')}{G_N(x_{N-1}, x_{N-1})}, \quad x_{N-1}\leqslant x, x'\leqslant x_N, \tag{24}$$

где

$$R_{\overleftarrow{N-1}}=\frac{V_{\overleftarrow{N-1}} G_N(x_{N-1}, x_{N-1})}{1+V_{N-1}G_N(x_{N-1}, x_{N-1})}=\frac{r_{N-1}(1-r_N z_{N-1,N})}{1-r_N r_{N-1} z_{N-1,N}} \tag{25}$$

— амплитуда отражения от $(N-1)$ центра; стрелка указывает направление падающей волны. Величина $R_{\overleftarrow{N-1}}$ отличается от r_{N-1} тем, что в ней учтен δ-образный потенциал в точке x_N. Величина $z_{N-1,N}$ в (25) определяется выражением

$$z_{N-1,N}=\frac{G_0(x_{N-1}, x_N)\, G_0(x_N, x_{N-1})}{G_0(x_N, x_N)\, G_0(x_{N-1}, x_{N-1})}. \tag{26}$$

Используя соотношение, связывающее $G(x, x')$ с одноточечными ФГ при совпадающих одномерных координатах [12]

$$G(x, x')=\{G(x, x)\, G(x', x')\}^{1/2}\exp\left\{-\int_{\min(x, x')}^{\max(x, x')}\frac{dx_1}{2G(x_1, x_1)}\right\},$$

получим

$$z_{N-1,N}=\exp\left\{-\int_{x_{N-1}}^{x_N}\frac{dx}{G_0(x, x)}\right\}=z_{N, N-1}.$$

Выразим теперь $G_{N-1}(x, x')$ при $x, x' \leqslant x_{N-1}$ через затравочную ФГ $G_0(x, x')$ и $R_{\overrightarrow{N-1}}$

$$G_{N-1}(x, x') = G_0(x, x') - R_{\overrightarrow{N-1}} \frac{G_0(x, x_{N-1}) G_0(x_{N-1}, x')}{G_0(x_{N-1}, x_{N-1})} \tag{27}$$

и, приравнивая (24) и (27) при $x = x' = x_{N-1}$, для $R_{\overrightarrow{N-1}}$ получим

$$R_{\overrightarrow{N-1}} = [r_{N-1} + r_N(1 - 2r_{N-1}) z_{N-1,N}][1 - r_N r_{N-1} z_{N-1,N}]^{-1}.$$

Повторяя эту процедуру N раз, получим ФГ на интервале $[x_1, x_2]$ при учете всех δ-потенциалов в виде

$$G(x, x') = G_1(x, x') - R_{\overrightarrow{1}} \frac{G_1(x_1 x_1) G_1(x_1, x')}{G_1(x_1, x_1)}, \tag{28}$$

где $R_{\overrightarrow{1}}$ — амплитуда отражения от первого центра при наличии всех остальных центров:

$$R_{\overrightarrow{1}} = \frac{r_1(1 - R_{\overrightarrow{2}} z_{1,2})}{(1 - r_1 R_{\overrightarrow{2}} z_{1,2})},$$

$$G_1(x, x') = G_0(x, x') - R_{\overrightarrow{2}} \frac{G_0(x, x_2) G_0(x_2, x')}{G_0(x_2, x_2)}.$$

С другой стороны, при $x, x' \leqslant x_1$ имеем

$$G(x, x') = G_0(x, x') - R_{\overrightarrow{1}} \frac{G_0(x, x_1) G_0(x_1, x')}{G_0(x_1, x_1)}. \tag{29}$$

Приравнивая (28) и (29) при $x = x' = x_1$, получим

$$R_{\overrightarrow{1}} = \frac{r_1 + z_{1,2} R_{\overrightarrow{2}}(1 - 2r_1)}{1 - z_{1,2} r_1 R_{\overrightarrow{2}}} = -\frac{A}{B}. \tag{30}$$

Величина $R_{\overrightarrow{1}}$ и есть интересующая нас амплитуда отражения электрона от цепочки потенциалов, непосредственно связанная с сопротивлением формулой Ландауэра [2].

Числитель и знаменатель (30) можно представить в виде детерминантов

$$B = \det \hat{B} = \begin{vmatrix} 1 & R_{\overrightarrow{2}} \\ r_1 & z_{1,2}^{-1} \end{vmatrix}, \quad A = \det \hat{A} = \begin{vmatrix} 0 & r_1 & R_{\overrightarrow{2}} \\ 1 & 1 & R_{\overrightarrow{2}} \\ 1 & r_1 & z_{1,2}^{-1} \end{vmatrix}. \tag{31}$$

Из (31) видно, что матрица $\hat{A}$ получается из матрицы $\hat{B}$ окаймлением слева и сверху. Снова подставляя в (31) выражение для $R_{\overrightarrow{2}}$, аналогичное (30), и повторяя так N раз, получим выражение для $\hat{A}$ и $\hat{B}$ через r_j и $z_{j,j+1}$

$$R_{\overrightarrow{1}} = -\frac{\det \hat{\hat{D}}_{N+1}}{\det \hat{D}_N} = -\frac{\hat{\hat{D}}_{N+1}}{D_N}, \tag{32}$$

где матрица $\hat{D}_N$ определяется выражением

$$(\hat{D}_N)_{nl} = \delta_{nl} + V_l G_0(x_l, x_l) z_{n,l}^{1/2}, \tag{33}$$

а матрица $\hat{\hat{D}}_{N+1}$ получается из $\hat{D}_N$ окаймлением слева и сверху

$$(\hat{\hat{D}}_{N+1})_{n+1,\, l+1} = (\hat{D}_N)_{n,\, l}, \quad (\hat{\hat{D}}_{N+1})_{1,1} = 0,$$

$$(\hat{\hat{D}}_{N+1})_{n,1} = z_{n-1,1}^{1/2}, \quad (\hat{\hat{D}}_{N+1})_{1,n} = V_{n-1} G_0(x_{n-1}, x_{n-1}) z_{n-1,1}^{1/2}. \tag{34}$$

Докажем теперь формулу (3) методом математической индукции. Можно непосредственно проверить, что при $N=1$

$$R \equiv |R_{\overrightarrow{1}}|^2 = |r_1|^2 = 1 - |D_1|^{-2}.$$

Предположим теперь, что соотношение

$$R = 1 - |D_N|^{-2}, \quad T = |D_N|^{2} \tag{35}$$

справедливо при некотором N, и покажем, что из этого следует его справедливость при замене N на $N+1$. Если выделить потенциал первого центра $V_1\delta(x-x_1)$, то определители D_{N+1} и $\tilde{D}_{N+2}$ можно выразить через определитель D_1, определяемый первым центром, и определители D_N, $\tilde{D}_{N+1}$, относящиеся к оставшейся цепочке из N потенциалов $V_l\delta(x-x_l)$, $2 \leqslant l \leqslant N+1$

$$D_{N+1} = D_1 D_N \begin{vmatrix} 1 & R_2 z_{1,2}^{1/2} \\ r_1 z_{1,2}^{1/2} & 1 \end{vmatrix}, \quad \tilde{D}_{N+2} = D_1 D_N \begin{vmatrix} 0 & r_1 & R_2 z_{1,2}^{1/2} \\ 1 & 1 & R_2 z_{1,2}^{1/2} \\ z_{1,2}^{1/2} & r_1 z_{1,2}^{1/2} & 1 \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Совокупность формул (32) и (36) эквивалентна (31). Вычисляя определители (36) для D_{N+1} и $\tilde{D}_{N+2}$, получим

$$|D_{N+1}| = \left|(1 - r_1 R_2 z_{1,2})\, t_1^{-1} T_2^{-1}\right|,$$

$$|\tilde{D}_{N+2}| = \left|[r_1 + R_2(1-2r_1) z_{1,2}]\, t_1^{-1} T_2^{-1}\right|. \tag{37}$$

Из выражения (23) для r_1 и того факта, что ФГ $G_0(x, x)$ в непрерывном спектре чисто мнимая, следует

$$r_1 + r_1^* = 2|r_1|^2.$$

Тогда выражение (37) для $|\tilde{D}_{N+2}|^2$ можно представить в виде

$$|\tilde{D}_{N+2}|^2 = -1 + |D_{N+1}|^2. \tag{38}$$

Из (38) и (32) непосредственно следует, что соотношение (35) выполняется для цепочки из $N+1$ рассеивающего центра. Из (33) и (34) можно получить рекуррентное соотношение для

$$D_N = A_N D_{N-1} - B_N D_{N-2}, \tag{39}$$

$$\tilde{D}_{N+1} = \frac{1 - V_1 G_0(x_1, x_1)}{V_1 G_0(x_1, x_1)} D_N - \frac{D_{-1+N}}{V_1 G_0(x_1, x_1)}, \tag{40}$$

где

$$A_N = 1 + \frac{V_N G_0(x_N, x_N)}{V_{N-1} G_0(x_{N-1}, x_{N-1})} z_{N-1, N} + V_N G_0(x_N, x_N)(1 - z_{N-1, N}), \quad N > 1,$$

$$A_1 = 1 + V_1 G_0(x_1, x_1), \quad B_N = \frac{V_N G_0(x_N, x_N)}{V_{N-1} G_0(x_{N-1}, x_{N-1})} z_{N-1, N},$$

$D_{N-1(N-2)}$ — определитель (33), в котором отсутствуют N-й (и $N-1$-й) строка и столбец; D_{-1+N} — определитель (33), в котором отсутствуют 1-й строка и столбец; $D_0=1$, $D_{-1}=0$. В частности, при $G_0(x, x) = i/2k$, т. е. когда $V(x)=0$, из (39) получается рекуррентное соотношение (8).

2. Локальная плотность состояний

Знание явного вида $\nu(E, x)$ локальной плотности электронных состояний с энергией E в точке x в одномерной цепочке случайных δ-потенциалов при любом характере беспорядка представляет определенный интерес. Это связано с тем, что флуктуации локальной плотности состояний электронов приводят к флуктуациям сдвигов Найта, т. е. к неоднородному уширению линии ядерного магнитного резонанса.

Для вычисления локальной плотности состояний в цепочке конечной длины нам достаточно знать явный вид ФГ $G(x, x')$, удовлетворяющий уравнению (2), в каждой ячейке $x_n \leqslant x,\ x' \leqslant x_{N+1}$ при заданном числе N рассеивающих центров. Для этого нам необходимо повторить вышеописанную процедуру с выделением из потенциала $V(x)$ (1) δ-потенциалов не в порядке их убывания, что привело к формулам (28), (20), а так, чтобы на последнем, N-м, шагу подойти к заданному n-му потенциалу справа. Тогда мы получаем для ФГ следующее выражение (ср. с (28)):

$$G(x,\ x') = G_n(x,\ x') - \tilde{R}_{\overleftarrow{n}} \frac{G_n(x,\ x_n)\,G_n(x_n,\ x')}{G_n(x_n,\ x_n)}, \tag{41}$$

где

$$G_n(x,\ x') = G_0(x,\ x') - R_{\overrightarrow{n+1}} \frac{G_0(x,\ x_{n+1})\,G_0(x_{n+1},\ x')}{G_0(x_{n+1},\ x_{n+1})}. \tag{42}$$

При $x=x'$ из (41) с учетом (42) получаем выражение для ФГ при совпадающих координатах

$$G(x,\ x) = \frac{G_0(x,\ x)}{1 - R_{\overleftarrow{n}} R_{\overrightarrow{n+1}} z_{n,\ n+1}} \left\{1 + R_{\overleftarrow{n}} R_{\overrightarrow{n+1}} z_{n,\ n+1} - R_{\overrightarrow{n+1}} z_{x,\ n+1} - R_{\overleftarrow{n}} z_{n,\ x}\right\}. \tag{43}$$

Здесь $z_{x,\ n+1}$ ($z_{n,\ x}$) выражается формулой (26) с переменным нижним (верхним) пределом; $\tilde{R}_{\overleftarrow{n}}$ — амплитуда отражения от левого блока, содержащего n центров при наличии правого блока, содержащего $(N-n)$ центров

$$\tilde{R}_{\overleftarrow{n}} = \frac{R_{\overleftarrow{n}}(1 - R_{\overrightarrow{n+1}} z_{n,\ n+1})}{1 - R_{\overleftarrow{n}} R_{\overrightarrow{n+1}} z_{n,\ n+1}}, \tag{44}$$

$R_{\overleftarrow{n}}$ — амплитуда отражения от левого блока, содержащего n центров при отсутствии правого блока; $R_{\overrightarrow{n+1}}$ — амплитуда отражения от правого блока, содержащего $(N-n)$ центров, при отсутствии левого блока. Амплитуда $R_{\overrightarrow{n+1}}$ получается из (32) вычеркиванием из D_N первых n строков и n столбцов

$$R_{\overrightarrow{n+1}} = -\frac{\det \hat{\tilde{D}}_{-n+N+1}}{\det \hat{D}_{-n+N}} = -\frac{\tilde{D}_{-n+N+1}}{D_{-n+N}}. \tag{45}$$

Что касается $R_{\overleftarrow{n}}$, то ее структура аналогична (32), т. е.

$$R_{\overleftarrow{n}} = -\frac{\det \hat{\tilde{D}}^0_{n+1}}{\det \hat{D}_n} = -\frac{\tilde{D}^0_{n+1}}{D_n}. \tag{46}$$

Однако матрица $\tilde{D}^0_{n+1}$ получается из D_n окаймлением его справа и снизу

$$\left(\hat{\tilde{D}}^0_{N+1}\right)_{n,\ l} = \left(\hat{D}_N\right)_{n,\ l}, \quad \left(\hat{\tilde{D}}^0_{N+1}\right)_{N+1,\ N+1} = 0,$$

$$\left(\hat{\tilde{D}}^0_{N+1}\right)_{N+1,\ n} = V_n G_0(x_n,\ x_n)\, z^{1/2}_{N+1,\ n+1}, \quad \left(\hat{\tilde{D}}^0_{N+1}\right)_{n,\ N+1} = z^{1/2}_{n+1,\ N+1}.$$

Для $\tilde{D}^0_{n+1}$ имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$\tilde{D}^0_{n+1} = \frac{1 - V_n G_0(x_n,\ x_n)}{V_n G_0(x_n,\ x_n)} D_n - \frac{D_{n-1}}{V_n G_0(x_n,\ x_n)}. \tag{47}$$

Заметим, что хотя формулы (41)—(46) справедливы в заданном интервале $[x_n,\ x_{n+1}]$, но тем не менее из них формально может быть получено и ФГ как при $x,\ x' \leqslant x_1$, так и при $x,\ x' \geqslant x_N$: а) при $n=0$ из (41) с учетом (42) и (44) мы получаем (29), так как $R_{\overleftarrow{0}} \equiv 0$, $\tilde{R}_{\overleftarrow{0}}=0$: б) при $n=N$ из (41) с учетом (42), (44) и (45) мы получаем

$$G(x,\ x') = G_0(x,\ x') - R_{\overleftarrow{N}} \frac{G_0(x,\ x_N)\,G_0(x_N,\ x)}{G_0(x_N,\ x_N)},$$

так как $R_{\overrightarrow{N+1}} \equiv 0$, $\tilde{R}_{\overleftarrow{N}} = R_{\overleftarrow{N}}$.

По определению, локальная плотность состояний есть

$$\nu(E,\ x) = \frac{\operatorname{Im}}{\pi} G(x,\ x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{G_0(x,\ x)}{D_N V_n^2 G_0^2(x_n,\ x_n)} \Big\{ (D_n - D_{n-1}) (D_{-(n-1)+N} - D_{-n+N}) -$$

$$- V_n G_0(x_n,\ x_n) \Big\{ \Big(1 - \cos \int_{x_n}^{x} \frac{i\,dt}{G_0(tt)} \Big) [2 V_n G_0(x_n,\ x_n) D_n D_{-n+N} -$$

$$- (D_n - D_{n-1}) D_{-n+N} - (D_{-(n-1)+N} - D_{-n+N}) D_n] -$$

$$- i \sin \int_{x_n}^{x} \frac{i\,dt}{G_0(tt)} [(D_n - D_{n-1}) D_{-n+N} - (D_{-(n-1)+N} - D_{-n+N}) D_n]\Big\}\Big\}. \qquad (48)$$

При выводе (48) мы исходили из (43) и использовали рекуррентные соотношения (39), (40) и (47). В частности, если $G_0(x, x) = i/2k$ и имеет место резонанс, т. е. D_n определяется формулой (15), из (48) при $x = x_n$ получаем

$$\nu(E,\ x_n) = \frac{1}{2\pi k} \frac{1}{1 + \left(\sum_{l=1}^{N} \frac{V_l}{2k} \right)^2}.$$

Видно, что при точном выполнении резонанса, т. е. при $ka = \pi n$, локальная плотность состояний не зависит от номера узла.

Локальная плотность состояний при больших значениях случайного потенциала V_n и при $x = x_n$, когда D_n определяется формулой (17), имеет вид

$$\nu(E,\ x_n) \approx 2k/\pi V_n^2.$$

3. Сопротивление последовательно соединенных блоков

Рассмотрим теперь две цепочки (I и II), содержащие n и m произвольных δ-потенциалов соответственно и соединенных последовательно. Пусть фаза, набираемая волной между этими цепочками, равна φ. Тогда (см. (36))

$$D_{n+m} = D_n D_m \begin{vmatrix} 1 & R_{\bar{\text{II}}} e^{i\varphi} \\ R_{\bar{\text{I}}} e^{i\varphi} & 1 \end{vmatrix},$$

где $R_{\text{I}\ (\bar{\text{II}})}$ — амплитуда отражения от области, содержащей n (m) рассеивателей

$$\frac{1}{T_{n+m}} = |D_{n+m}|^2 = \frac{1 + |R_{\bar{\text{I}}}|^2 |R_{\bar{\text{II}}}|^2 - 2 |R_{\bar{\text{I}}}| |R_{\bar{\text{II}}}| \cos\theta}{|T_{\bar{\text{I}}}| |T_{\bar{\text{II}}}|},$$

$\theta = 2\varphi + \theta_{\text{I}} + \theta_{\text{II}}$; $\theta_{\text{I}\ (\text{II})}$ — фаза, набираемая волной при прохождении области I (II).

Вычислим величину $\langle \ln(\rho_{\text{I+II}} + 1) \rangle$, где $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по фазе θ в интервале $[0,\ 2\pi]$

$$\langle \ln(\rho_{\text{I+II}} + 1) \rangle = \langle \ln T_{n+m} \rangle = \langle \ln T_{\text{I}} \rangle + \langle \ln T_{\text{II}} \rangle -$$

$$- \langle \ln(1 + |R_{\bar{\text{I}}}|^2 |R_{\bar{\text{II}}}|^2 - 2 |R_{\bar{\text{I}}}| |R_{\bar{\text{II}}}| \cos\theta) \rangle,$$

последний член равен нулю, а поэтому [13]

$$\langle \ln(\rho_{\text{I+II}} + 1) \rangle = \langle \ln(\rho_{\text{I}} + 1) \rangle + \langle \ln(\rho_{\text{II}} + 1) \rangle. \qquad (49)$$

Если же интересоваться сопротивлением блока $\tilde{\rho}_n$, содержащего n центров и входящего в общую цепочку из N рассеивателей, то его можно найти из (44), так как $\tilde{R}_n$ есть амплитуда отражения от левого блока при наличии правого блока

$$|\tilde{R}_n|^2 = \frac{\tilde{\rho}_n}{1+\tilde{\rho}_n} = \frac{\rho_n(\rho_{-n+N}+1)\left(1+\frac{\rho_{-n+N}}{1+\rho_{-n+N}} - 2\sqrt{\frac{\rho_{-n+N}}{1+\rho_{-n+N}}}\cos\theta\right)}{1+\rho_N}. \quad (50)$$

Здесь ρ_n, ρ_{-n+N} — сопротивления отдельных блоков; ρ_N — сопротивление всей цепочки; $\theta=2\varphi+\theta_1$; θ_1 — фаза, набираемая волной при прохождении левого блока; φ — фаза, набираемая волной между левым и правым блоками. Поступая так же, как и при нахождении выражения (49), для (50) будем иметь

$$\langle \ln(\rho_N+1)\rangle = \langle \ln \rho_n\rangle + \langle \ln(\rho_{-n+N}+1)\rangle - \left\langle \ln\frac{\tilde{\rho}_n}{1+\tilde{\rho}_n}\right\rangle.$$

Я глубоко благодарен моим соавторам Б. Л. Альтшулеру, А. Г. Аронову и З. А. Касаманяну за совместную работу [1], основные результаты которой изложены во Введении этой статьи.

Литература

[1] Gasparian V. M., Altshuler B. L., Aronov A. G., Kasamanian Z. H. // Phys. Lett. In press. 1988.
[2] Landauer R. // Phys. Lett. 1981. V. 85A. N 2. P. 91—93.
[3] Бычков Ю. А., Дыхне А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. № 4. С. 313—316.
[4] Thouless D. J. // Phys. Reports. 1974. V. 13. N 1. P. 93—98.
[5] Хейне В., Коэн Н., Уэйр Д. Теория псевдопотенциалов. М., 1973.
[6] Eldib A. M., Hassan H. F., Mohamed M. A. // J. Phys. C (Sol. St. Phys.). 1987. V. 20. N 16. P. 3011—3019.
[7] Ицкович И. Ф., Кулик И. О., Шехтер Р. И. // ФНТ. 1987. Т. 13. № 11. С. 1166—1177.
[8] Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. М., 1982.
[9] Hirota T., Ishii K. // Progr. Phys. 1971. V. 145, N 5. P. 1713—1715.
[10] Костадинов И. З. // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. № 2. С. 105—107.
[11] Касаманян З. А. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. № 7. С. 281—285.
[12] Касаманян З. А. // Изв. вузов, физика. 1979. № 11. С. 20—24.
[13] Anderson P. W., Thouless D. J., Abrahams E., Fisher D. S. // Phys. Rev. 1980. V. B22. N 8. P. 3519—3526.

Ереванский государственный университет
Ереван

Поступило в Редакцию
19 сентября 1988 г.