

УДК 538.22

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ И ЭЛЕКТРОННЫЙ ПЕРЕНОС ЗВУКОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В МЕТАЛЛАХ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Я. Демиховский, В. А. Кукушкин

Рассмотрены эффекты, возникающие при распространении мощных акустических импульсов в проводниках в присутствии сильного магнитного поля $\mathbf{H} \perp \mathbf{q}$, где \mathbf{q} — волновой вектор звука. Предположено, что ларморовский радиус орбиты электрона R много меньше длины свободного пробега l и во много раз превышает длину импульса L , а характерное время τ_H , определяющее период движения частиц, скачущих вдоль фронта потенциального горба, а также время выноса электронов магнитным полем из потенциальной ямы, много меньше времени релаксации τ_p , но порядка времени пролета резонансным электроном области импульса. Показано, что сила, действующая со стороны электронов на решетку, имеет особенности в точках, соответствующих границам областей движения скачущих и отражающих частиц. Исследованы нелинейные акустические эффекты, определяемые особенностями электронной силы в перпендикулярном магнитном поле, — образование уступа вблизи максимума потенциального горба и формирование ударных волн на профиле потенциальной ямы, а также возникновение дополнительных областей деформации — предвестников основных импульсов. Показано, что закономерности роста предвестников в случае мощных звуковых импульсов существенно отличаются от эволюции линейных предвестников, рассмотренных в [1].

В работе [2] исследовалась нелинейная эволюция звуковых импульсов в металлах, помещенных в слабое поперечное магнитное поле \mathbf{H} , в котором ларморовский радиус орбиты электрона R больше длины свободного пробега l и значительно превышает длину импульса L

$$R > l \gg L. \quad (1)$$

Амплитуда потенциальной энергии импульса Φ_0 предполагалась достаточно большой, так что время электронной релаксации τ_p много больше времени пролета резонансным электроном области импульса L/\bar{v} , где $\bar{v} = (\Phi_0/m)^{1/2}$ — характерная скорость резонансных электронов. В то же время τ_p не превышает характерного времени τ_H , определяющего период движения электрона, скачущего вдоль фронта потенциального горба, а также время выноса электрона магнитным полем из потенциальной ямы. В [2] указанные ограничения на амплитуду записывались в виде неравенств

$$b < a \ll 1, \quad (2)$$

где $b = L/\bar{v}\tau_H$, $a = L/\bar{v}\tau_p$, $\tau_H = \bar{v}/v_F\omega_c$, ω_c — циклотронная частота.

В настоящей работе рассматриваются эффекты, возникающие при распространении мощных акустических импульсов в металлах, находящихся в более сильных магнитных полях \mathbf{H} , в которых все частицы за время релаксации τ_p успевают совершить много оборотов. Как и в [2], предполагается, что направление вектора \mathbf{H} ортогонально волновому вектору звука, но величина H такова, что ларморовский радиус R много меньше длины свободного пробега l и во много раз превышает длину импульса L

$$l \gg R \gg L. \quad (3)$$

Амплитуда звукового импульса Φ_0 считается также большой; при этом введенное выше для потенциального горба и потенциальной ямы характерное время τ_{II} оказывается много меньше времени релаксации τ_p , но может иметь тот же порядок, что и время пролета резонансным электроном области импульса L/\bar{v} . Другими словами, предполагается, что наряду с (3) справедлива система неравенств

$$a \ll b \ll 1. \quad (4)$$

При выполнении условий (3), (4) динамика электронов оказывается более сложной, чем в слабых магнитных полях. В этом случае все частицы естественным образом разделяются на скачущие, отражающиеся и пролетные в случае поля потенциального горба и захваченные, отражающиеся и пролетные в случае поля потенциальной ямы. При этом, как будет показано ниже, основной вклад в затухание дают скачущие и захваченные электроны. В точках, являющихся граничными для областей движения различных групп частиц, электронная сила оказывается сингулярной, что определяет эволюцию акустического импульса в сильном магнитном поле.

Электроны, взаимодействующие с импульсом, переносят количество движения на расстояние, превышающее L : отражающиеся и пролетные электроны на расстояние порядка $2R$, а электроны на скачущих орбитах на расстояние $\sim L/b$. Вследствие этого впереди импульса, а также сзади от него имеет место рост деформации кристаллической решетки, т. е. осуществляется электронный перенос звуковых импульсов. Впервые это явление рассмотрено Богачеком, Рожавским и Шехтером в рамках линейной теории в работе [1]. Как будет показано ниже, нелинейный электронный перенос акустических импульсов существенно отличается от линейного. Так, амплитуда переносимого импульса Ψ_0 растет со временем более быстро, чем в линейном случае, а именно $\Psi_0 \sim t^{1/2}$, причем на расстояниях порядка L/b скорость роста потенциала Ψ_0 больше (в $(\epsilon_F/\Phi_0)^{1/2}$ раз), чем на расстояниях $\sim 2R$.

Работа построена следующим образом. В п. 1 рассмотрены траектории электронов в поле потенциального горба и потенциальной ямы. В п. 2 найдены функция распределения и концентрация неравновесных частиц. Далее, в п. 3, решено уравнение теории упругости и исследованы эволюция основного импульса и рост его предвестников. В заключении приведено обсуждение полученных результатов.

1. Траектории электронов

Пусть в металле, помещенном в сильное магнитное поле H , распространяется продольный звуковой импульс в направлении, перпендикулярном вектору H . Предполагая спектр частиц изотропным и квадратичным, запишем уравнения движения электронов проводимости в системе координат, сопутствующей импульсу

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \omega_c v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c (v_x + w), \quad \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (5a)-(5b)$$

Здесь $\zeta = x - wt$; $\Phi = \lambda du / \partial \zeta$; u — смещение решетки; λ — деформационный потенциал электрона; w — скорость звука; v_x , v_y , v_z — компоненты скорости электрона; ось $O\zeta$ направлена вдоль вектора звукового импульса, а ось Oz — вдоль постоянного магнитного поля H . Слагаемое $-\omega_c w$ в правой части (5б) связано с электрическим полем $E_y = -wH/c$, появляющимся в сопутствующей системе координат.

В качестве начальных условий для уравнений (5а)—(5в) положим

$$\zeta(t_0) = \zeta_0, \quad v_y(t_0) = v_{y0}, \quad v_x(t_0) = 0, \quad v_z(t_0) = 0, \quad (6)$$

где t_0 — момент прохождения электроном точки поворота ζ_0 , лежащей вблизи импульса. В этом случае, как нетрудно убедиться, система (5а)—(5в) имеет интеграл вида

$$m \frac{v_z^2}{2} + \Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_0) - m\omega_c v_{y0} (\zeta - \zeta_0) + \frac{m\omega_c^2}{2} (\zeta - \zeta_0)^2 + \\ + m\omega_c^2 w \int_{t_0}^t (t' - t_0) \frac{d\zeta}{dt'} dt' = 0. \quad (7)$$

Последнее слагаемое в (7) описывает изменение продольной энергии электрона $\Delta \varepsilon_{\parallel}$ в электрическом поле E и ортогональном магнитном поле H . Можно показать, что в режиме сильной нелинейности, когда выполнены условия (4), для скачущих частиц это слагаемое мало по сравнению с потенциальной энергией импульса $\Phi(\zeta)$ по параметру

$$(w/v_F) \omega_c \tau_p \ll 1. \quad (8)$$

Для отражающихся электронов отношение последнего члена в интеграле (7) к амплитуде импульса Φ_0 описывается другим параметром, а именно $b(R/L)[w/v_F]\omega_c \tau_p$. Предполагая в дальнейшем, что

$$b \frac{w}{v_F} \omega_c \tau_p \frac{R}{L} \ll 1, \quad (9)$$

будем пренебрегать изменением продольной энергии $\Delta \varepsilon_{\parallel}$ для всех групп частиц. Можно показать, что в этом случае затухание звукового импульса связано в основном с набором поперечной энергии $\Delta \varepsilon_{\perp}$ электронов, скачущих вдоль фронта импульса, причем $\Delta \varepsilon_{\perp} / \Delta \varepsilon_{\parallel} \sim \sqrt{\varepsilon_F / \Phi_0}$.

При выполнении условий (8) и (9) интеграл энергии (7) принимает вид

$$\frac{s^2}{2} + \frac{V^{\pm}(\xi; \xi_0, v_{y0})}{\Phi_0} = 0, \quad (10)$$

где

$$V^{\pm}(\xi; \xi_0, v_{y0}) = -\varepsilon_{\perp} + \Phi(\xi) - \Phi(\xi_0) + \frac{m\omega_c^2 L^2}{2} (\xi - \xi_0 \mp qR)^2 \quad (11)$$

— эффективный потенциал, $s = v_{\perp} \bar{v}$, $\xi = \zeta/L$, $R = v_{y0}/\omega_c$, $q = 1/L$, знаки «+» и «-» соответствуют положительному и отрицательному знакам скорости v_{y0} в точке поворота $\xi_0 = \zeta_0/L$, лежащей вблизи импульса.

На рис. 1, а, б изображены фазовые траектории частиц, движущихся в поле $V^{\pm}[\xi; \xi_0, v_{y0}]$ потенциального горба и потенциальной ямы. Семейство траекторий на этих рисунках соответствует различным координатам левой точки поворота ξ_0 , в которой начальная скорость $v_{y0} > 0$ имеет одно и то же значение. Траектории типа 1, лежащие слева от потенциального горба (рис. 1, а), отвечают скачущим электронам; их характерная протяженность в направлении оси $O\xi$ порядка $1/b$. Траектории захваченных частиц, обозначенные цифрой 1 на рис. 1, б, целиком лежат в области ямы, поэтому их характерный размер вдоль оси $O\xi$ порядка l . Траектории, лежащие справа от импульса, соответствуют отражающимся частицам; на рис. 1, а, б они обозначены цифрой 2. Наконец, траектории типа 3, охватывающие импульс, отвечают пролетным частицам. Характерный размер области движения отражающихся и пролетных электронов $\sim 2qR$.

Интеграл энергии (10) для пролетных и отражающихся частиц удобно записать с помощью переменных φ , ξ , совершив замену

$$s = (v_{y0}/\bar{v}) \cos \varphi, \quad (12)$$

где φ — угол, образованный вектором v_{\perp} с осью v_{ξ} . После деления (10) на v_{y0}^2/\bar{v}^2 будем иметь интеграл продольной энергии в новых переменных

$$\sin^2 \varphi = \left(\pm 1 + \frac{\xi_0 - \xi}{qR} \right)^2 - 2 \frac{\Phi(\xi_0) - \Phi(\xi)}{\varepsilon_{\perp}}. \quad (13)$$

Поскольку $\Phi_0/\varepsilon_{\perp} \ll 1$, для углов $\varphi \gg \Phi_0/\varepsilon_{\perp}$ из (13) получаем

$$\sin \varphi = \pm \left\{ 1 + \frac{\Phi_0}{\varepsilon_{\perp}} [V_{\mp}^{\pm}(\xi) - V_{\mp}^{\pm}(\xi_0)] \right\}, \quad (14)$$

где $V_{\mp}^{\pm}[\xi] = \Phi[\xi]/\Phi_0 \mp b\xi$, $b = m\omega_c |v_{y0}| / q\Phi_0$. Траектории, описываемые уравнением (14), имеют две точки поворота. Одной из этих точек $\xi = \xi_0$, расположенной в области импульса, соответствует угол $\varphi = \pm \pi/2$, а другой $\xi = \xi_1$ угол $\varphi = \mp \pi/2$. Поэтому, полагая в (14) $\varphi = \mp \pi/2$ и учитывая, что $\Phi(\xi_1) = 0$, получаем связь между координатами ξ_0 и ξ_1

$$\xi_1 = \pm \left[2qR - \frac{1}{b} V_{\mp}^{\pm}(\xi_0) \right]. \quad (15)$$

Координаты ξ_1 и ξ_0 , связанные соотношением (15) в дальнейшем будем называть сопряженными. В том случае, когда точка ξ удалена от импульса на расстояние $\sim 2qR$, интеграл энергии (14) удобно представить в виде,

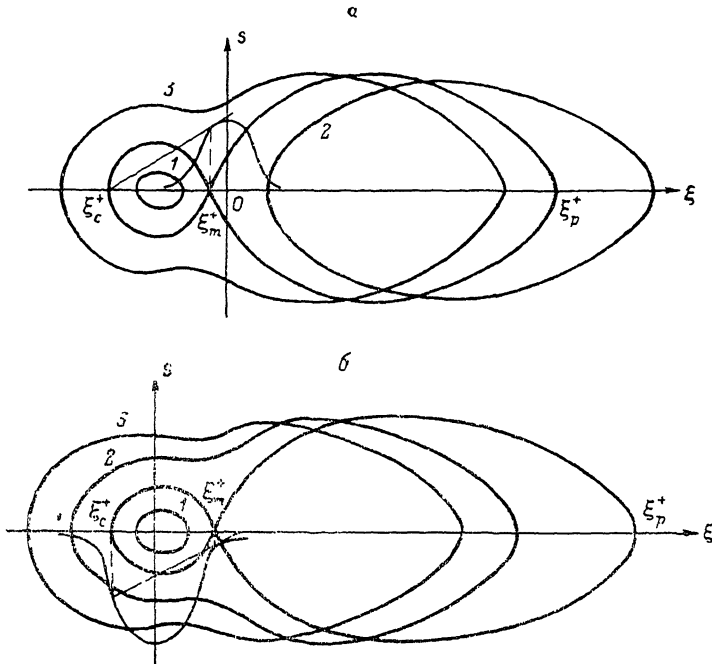


Рис. 1. Фазовые траектории частиц в поле $V^+(\xi)$ потенциального горба (а) и потенциальной ямы (б).

содержащем координату ξ , сопряженную ξ . Полагая в выражении (15) $\xi_1 = \xi$ и $\xi_0 = \xi$ и подставляя это выражение в (14), получим

$$\sin \varphi = \mp \left\{ 1 - \frac{\Phi_0}{\varepsilon_{\perp}} [V_{\mp}^{\pm}(\xi) - V_{\mp}^{\pm}(\xi_0)] \right\}. \quad (16)$$

2. Электронная функция распределения и концентрация неравновесных носителей

Найдем функцию распределения $f(\mathbf{p}, x - wt)$ электронов, движущихся в поле импульса и в перпендикулярном магнитном поле. В сопутствующей системе координат функция $f(\mathbf{p}, \zeta)$ удовлетворяет кинетическому уравнению

$$v_{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - m\omega_c v_{y0} + m\omega_c^2 (\zeta - \zeta_0) \right) \frac{\partial f}{\partial p_{\zeta}} + \frac{f - f_0}{\tau_p} = 0. \quad (17)$$

Решение (17) будем искать в виде

$$f(\mathbf{p}, \zeta) = f_0(\varepsilon_{\perp} + \Phi) + g(\mathbf{p}, \zeta). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), для g -функции получим

$$v; \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \frac{1}{m} - \omega_c v_{y0} + m \omega_c^2 (\varepsilon - \varepsilon_0) \right) \frac{\partial g}{\partial v_x} \frac{1}{m} + \frac{g}{\tau_p} = w \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения характеристик для (19) имеют интеграл энергии (10), а решение (19) есть

$$g(\varepsilon_{\perp}, s, \tau) = \frac{w}{\bar{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon'} e^{-a(\tau-\tau')} d\tau', \quad (20)$$

где $\tau = q\bar{v}t$. Найденная функция (20) удовлетворяет условию периодичности $g(\varepsilon_{\perp}, s, \tau + T) = g(\varepsilon_{\perp}, s, \tau)$. Поэтому, представляя интеграл (20) в виде суммы по числу периодов T движения частицы, приведем функцию $g(\varepsilon_{\perp}, s, \tau)$ к виду

$$g(\varepsilon_{\perp}, s, \tau) = \frac{w}{\bar{v}_F} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{1}{1 - e^{-aT}} \int_{\tau-T}^{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon'} e^{-a(\tau-\tau')} d\tau'. \quad (21)$$

Вычислим сначала функцию распределения частиц, захваченных в поле потенциальной ямы, а также частиц, скачущих вдоль фронта потенциального горба. Поскольку поперечная скорость v_y этих частиц в течение всего периода движения порядка v_{y0} , производную $\partial \Phi / \partial \xi$ в (21) удобно выразить с помощью уравнения движения (5а), положив в нем $v_y \approx v_{y0}$, т. е.

$$\frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} = - \frac{ds}{d\tau'} \pm b. \quad (22)$$

Подставляя далее (22) в (21) и интегрируя по τ' , получим

$$g^{\pm}(\varepsilon_{\perp}, s, \xi) = \frac{w}{\bar{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \Phi_0 \left(-s + a\xi \pm \frac{b}{a} \right), \quad (23)$$

где изменение безразмерной скорости s ограничено неравенством $|s| \leq \leq \sqrt{2[V_{\mp}^{\pm}(\xi_{\mp}^{\pm}) - V_{\mp}^{\mp}(\xi)]}$, а точки ξ_{\mp}^{\pm} являются границами областей движения скачущих и захваченных частиц (рис. 1, а, б).

В случае отражающихся и пролетных электронов, имеющих характерный размер траекторий порядка $2qR$, интегрирование по τ' в (21) производится по части периода T , включающего время прохождения частицей области импульса. Поэтому, ограничиваясь в интеграле (21) нулевым приближением по параметру нелинейности a и переходя в нем к интегрированию по ξ' с помощью замены $d\tau' = d\xi'/s$, получим

$$g^{\pm}(\varepsilon_{\perp}, s, \xi) = \frac{w}{\bar{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} 2\omega_c \tau_p \int_{\pm 1}^{\xi_0(s, \xi)} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} \frac{d\xi'}{s(\xi'; (s, \xi))}. \quad (24)$$

Здесь ± 1 — безразмерные координаты правой (знак «+») и левой (знак «-») границ импульса, причем, как и раньше, верхний знак в (24) соответствует положительному, а нижний — отрицательному знакам скорости v_{y0} в точке поворота $\xi_0(s, \xi)$. Величина $s(\xi'; (s, \xi))$ есть безразмерная скорость частицы в точке ξ' при условии, что ее фазовая траектория проходит через точку (s, ξ) . В случае, если точка (s, ξ) лежит вблизи импульса, т. е. $|\xi - \xi_0| \leq 1/b$, скорость $s(\xi')$ можно найти с помощью интеграла энергии (10)

$$s(\xi'; (s, \xi)) = \mp \sqrt{s^2 + 2[V_{\mp}^{\pm}(\xi) - V_{\mp}^{\pm}(\xi')]}. \quad (25)$$

Для нахождения скорости $s(\xi')$ при больших значениях ξ ($|\xi - 2qR| \leq \leq qR$) удобно воспользоваться интегралом энергии, записанным в виде (16). Поскольку в этом случае $\varphi = \mp(\pi/2 - \delta)$, где $|\delta| \leq \leq \sqrt{2(\Phi_0/\varepsilon_{\perp})[V_{\mp}^{\pm}(\xi) - V_{\mp}^{\pm}(\pm 1)]}$, из (16) мы получаем

$$s(\xi'; (\vartheta, \xi)) = -\frac{v_{y0}}{\bar{v}} \left\{ 2 \frac{\Phi_0}{\varepsilon_{\perp}} [V_{\mp}^{\pm}(\xi) - V_{\mp}^{\pm}(\xi')] - \vartheta^2 \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Избыточную концентрацию $n(\xi)$ для различных групп частиц определим по формуле

$$n(\xi) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d\rho g(\rho, \xi). \quad (27)$$

Переходя к переменным ε_{\perp} , ϑ , φ , перепишем (27) как

$$n(\xi) = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{p_{\perp}^2}{v_F} \int \sin \vartheta d\vartheta d\varepsilon_{\perp} d\varphi g(\varepsilon_{\perp}, \vartheta, \varphi, \xi). \quad (28)$$

Найдем сначала концентрацию электронов, движущихся в области потенциального горба по скачущим орбитам, а также электронов, захваченных потенциальной ямой. Для таких частиц, как следует из (14), угол φ изменяется в малой области $\Delta\varphi \sim \sqrt{\Phi_0/\varepsilon_{\perp}}$ вблизи $\varphi = \pm\pi/2$. В этом случае безразмерная скорость s , согласно (12), может быть записана в виде $s = (v_F \sin \vartheta / \bar{v})(\pm\pi/2 - \varphi)$, откуда следует, что

$$d\varphi = -(\bar{v}/v_F) \frac{ds}{\sin \vartheta}. \quad (29)$$

Подставляя (23) и (29) в (28) и интегрируя по s , получим

$$n^{\pm}(\xi) = \pm \frac{3}{\pi} \frac{w}{v_F} n_0 \frac{\Phi_0}{\varepsilon_F} \frac{b_0}{a} \left[\int_0^{\pi/2} \sqrt{V_{\mp m}^{\pm} - V_{\mp}^{\pm}(\xi)} \sin \vartheta d\vartheta + O(a) \right], \quad (30)$$

где $b_0 = m\omega_c v_F / q\Phi_0$, $V_{\mp m}^{\pm} = V_{\mp}^{\pm}(\xi_{\mp m}^{\pm})$, n_0 — концентрация равновесных частиц.

Концентрацию отражающихся и пролетных электронов можно найти, подставляя функцию распределения (24) в (28)

$$n^{\pm}(\xi) = \frac{3}{\pi} n_0 \frac{w}{v_F} \frac{\Phi_0}{\varepsilon_F} \omega_c \tau_p \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{\pm 1}^{\xi_0(\varphi, \xi)} d\varphi \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} \frac{d\xi'}{s(\xi'; (\varphi, \xi))} \frac{v_{y0}(\vartheta)}{\bar{v}}. \quad (31)$$

Поскольку на расстоянии от центра импульса, не превышающем $1/b$, характер движения отражающихся и пролетных электронов имеет такой же вид, как и в случае слабых магнитных полей, то (31) лишь множителем $\omega_c \tau_p$ отличается от выражения для концентрации отражающихся и пролетных электронов, полученных в работе [2]. В частности, концентрация отражающихся частиц в области потенциального горба, согласно (16) в [2], имеет вид

$$n^{\pm}(\xi) = \pm \frac{3}{\pi} n_0 \frac{w}{v_F} \frac{\Phi_0}{\varepsilon_F} \omega_c \tau_p \int_0^{\pi/2} d\vartheta G(V_{\mp}^{\pm}). \quad (32)$$

где

$$G(V_{\mp}^{\pm}) = \frac{1}{2} [(V_{\mp m}^{\pm} - V_{\mp}^{\pm})(V_{\mp m}^{\pm} \pm b)]^{1/2} + \frac{V_{\mp}^{\pm} \pm b}{2} \ln \frac{\sqrt{V_{\mp m}^{\pm} - V_{\mp}^{\pm}} + \sqrt{V_{\mp m}^{\pm} \pm b}}{\sqrt{V_{\mp}^{\pm} \pm b}}.$$

Для вычисления концентрации электронов на расстоянии $\sim 2qR$ от импульса в выражении (31) поменяем местами порядок интегрирования по переменным φ и ξ' . На рис. 2 изображены соответствующие области интегрирования, определяющие вклад в концентрацию $n^+(\xi)$ в случае потенциального горба (а) и потенциальной ямы (б). На оси ординат отложены значения углов φ в точке ξ для всех траекторий, проходящих область импульса и точку ξ . Правая граница всех областей есть прямая $\xi' = +1$, тогда как левая граница, определяемая выражением $\xi' = \xi_0(\varphi, \xi)$, является решением уравнения (14). Кривые, обозначенные цифрами 1, 2, 3

(рис. 2, а, б), есть границы областей интегрирования, определяющих концентрацию $n^+(\xi)$ соответственно в точках $\xi > \xi_m^+$, $\xi = \xi_m^+$ и $\xi < \xi_m^+$. Здесь ξ_m^+ — координата, сопряженная с координатой граничной точки ξ_m^+ на профиле импульса. Области интегрирования, соответствующие выражению $n^-(\xi)$ в (31), могут быть получены из описанных выше путем отражения в плоскости $\xi=0$. Подставляя (26) в (31) и переходя в интеграле по φ к переменной $\delta = \pi/2 \pm \varphi$, получим после интегрирования по δ

$$n^\pm(\xi) = \mp \frac{3}{\pi} n_0 \frac{w}{v_F} \frac{1}{\varepsilon_F} \omega_c \tau_p \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \Phi(\xi), \quad |\xi| > |\xi_m^\pm|, \\ \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \Phi(\xi_m^\pm) - \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{\mp 1}^{\xi_m^\pm} d\xi' \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} \times \\ \times \arcsin \frac{\sqrt{V_{1m}^\pm - V_\mp^\pm(\xi)}}{\sqrt{V_\mp^\pm(\xi') - V_\mp^\pm(\xi)}}, \quad |\xi| < |\xi_m^\pm| \end{array} \right. \quad (33)$$

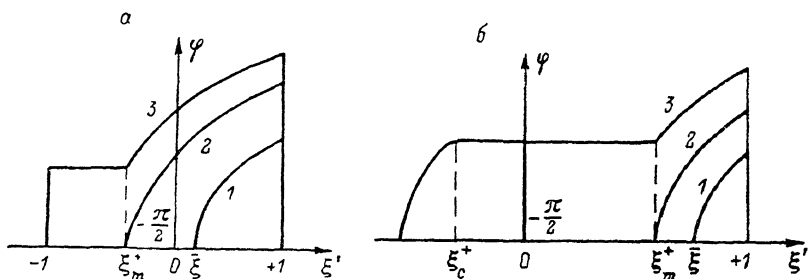


Рис. 2. Области интегрирования в (31) для концентрации $n^+(\xi)$ в случае потенциального горба (а) и потенциальной ямы (б).

в случае потенциального горба и

$$n^\pm(\xi) = \mp \frac{3}{\pi} n_0 \frac{w}{v_F} \frac{1}{\varepsilon_F} \omega_c \tau_p \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \Phi(\xi), \quad |\xi| > |\xi_m^\pm|, \\ \int_0^{\pi/2} d\vartheta \left\{ \frac{\pi}{2} [\Phi(\xi) - \Phi(\xi_m^\pm) + \Phi(\xi_m^\pm)] - \right. \\ \left. - \int_{\xi_m^\pm}^{\xi_m^\pm} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} d\xi' \arcsin \frac{\sqrt{V_{1m}^\pm - V_\mp^\pm(\xi)}}{\sqrt{V_\mp^\pm(\xi') - V_\mp^\pm(\xi)}} \right\}, \quad |\xi| < |\xi_m^\pm| \end{array} \right. \quad (34)$$

в случае потенциальной ямы.

3. Уравнение эволюции. Обсуждение результатов

Уравнение теории упругости запишем в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial n}{\partial x} - \rho v' \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + D, \quad (35)$$

где ρ — плотность кристалла, v' — коэффициент решеточной вязкости. Первое слагаемое в правой части (35) есть сила, действующая со стороны скачущих, отражающихся и пролетных электронов на основной импульс, а второе — сила, обусловленная вязкостью решетки. Как указывалось в начале статьи, электронная сила вызывает не только затухание основного импульса, но и появление вследствие так называемого электронного

переноса областей деформации на расстояниях порядка $2qR$ и $1/b$ как перед основным импульсом, так и за ним. Скорость роста деформации в этих областях, в дальнейшем именуемых предвестниками, определяется отражающимися и скачущими электронами. Кроме этого, предвестники испытывают затухание на электронах, не взаимодействующих с основным импульсом. Такое затухание определяет сила D — третье слагаемое в правой части (35). Можно показать, что в линейном приближении по амплитуде предвестника сила D в $\omega_c \tau_p$ раз превосходит электронную силу, описывающую затухание слабых звуковых импульсов в отсутствие магнитного поля [3], т. е.

$$D = \frac{3}{\pi} n_0 \frac{w}{v_F} \frac{1}{\varepsilon_F} \omega_c \tau_p \frac{\lambda}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi', \quad (36)$$

где $\psi(\xi')$ — потенциал поля предвестника.

Характер эволюции основного импульса, а также предвестников определяется в основном особенностями силы $\lambda(\partial n/\partial x)$. Особыми точками для производных $\partial n/\partial x$ являются точки ξ_{m0}^{\pm} и ξ_{c0}^{\pm} , соответствующие границам областей движения скачущих электронов с максимальной скоростью $v_{y0} = v_F$, а также точки ξ_{p0}^{\pm} , сопряженные с ξ_{m0}^{\pm} . Дальнейшее исследование проведем для случая цилиндрической поверхности Ферми. В этом случае особенности электронной силы $\lambda(\partial n/\partial x)$ наиболее выражены, поскольку все электроны в точках поворота имеют одинаковую скорость $v_{y0} = v_F$.

Сначала рассмотрим эволюцию основных импульсов — потенциального горба и потенциальной ямы. В этом случае в уравнении (35) можно пренебречь силой D , описывающей затухание предвестников. Переходя в (35) к переменной $\xi = (x - wt)/L$ и медленному времени t' и пренебрегая второй производной по медленному времени $\partial^2 u/\partial t'^2$ (такая процедура носит название метода медленно меняющего профиля), получим уравнение эволюции для функции $\Phi^{\pm}(\xi, \tau_1) = \lambda q (du/d\xi) \mp b_0 \Phi_0^{\pm}$

$$\frac{\partial \Phi^{\pm}}{\partial \tau_1} = - \frac{\partial P}{\partial V_{\mp}^{\pm}} \frac{\partial \Phi^{\pm}}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial^2 \Phi^{\pm}}{\partial \xi^2}, \quad (37)$$

где

$$P = n(V_{\mp}^{\pm}) \left(\frac{3}{\pi} n_0 (w/v_F) (\Phi_0/\varepsilon_F) \right), \quad \tau_1 = n_0 \lambda^2 t' / (\varepsilon_F v_F L), \quad \nu = \varepsilon_F v_F' / (n_0 \lambda^2 L).$$

Эволюция потенциального горба определяется особенностью электронной силы в точке максимума ξ_{m0}^{\pm} эффективного потенциала V_{\mp}^{\pm} . Полагая, что при $\xi \simeq \xi_{m0}^{\pm}$

$$V_{\mp}^{\pm}(\xi) = V_{\mp m0}^{\pm} + \frac{1}{2} \alpha (\xi - \xi_{m0}^{\pm})^2, \quad \text{где } V_{\mp m0}^{\pm} = V_{\mp}^{\pm}(\xi_{m0}^{\pm}), \quad \alpha = \frac{\partial^2 V_{\mp}^{\pm}}{\partial \xi^2},$$

слагаемое $(\partial P/\partial V_{\mp}^{\pm})(\partial \Phi^{\pm}/\partial \xi)$ в (37) с учетом (30) и (32) представим как

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\partial P}{\partial V_{\mp}^{\pm}} \frac{\partial \Phi^{\pm}}{\partial \xi} = \begin{cases} \frac{b_0}{\alpha} \sqrt{\alpha} \Phi_0(\tau_1) + \omega_c \tau_p \sqrt{\alpha} \sqrt{V_{\mp m0}^{\pm} - b_0} \Phi_0(\tau_1) \equiv \mathcal{F}_1(\tau_1), & |\xi| \geq |\xi_{m0}^{\pm}|, \\ \omega_c \tau_p \sqrt{\alpha} \sqrt{V_{\mp m0}^{\pm} - b_0} \Phi_0(\tau_1) \equiv \mathcal{F}_2(\tau_1), & |\xi| < |\xi_{m0}^{\pm}|, \end{cases} \quad (38)$$

где $\xi_{m0}^{\pm} = \mp b_0/2\alpha$. Вдали от особых точек ξ_{m0}^{\pm} , т. е. при $|\xi - \xi_{m0}^{\pm}| \gg \sqrt{4\nu\tau_1}$, в уравнении (37) можно пренебречь решеточной вязкостью, поэтому

$$\Phi^{\pm}(\xi, \tau_1) = \Phi^{\pm}(\xi, 0) - \int_0^{\tau_1} \mathcal{F}(\tau) d\tau, \quad |\xi - \xi_{m0}^{\pm}| \gg \sqrt{4\nu\tau_1}. \quad (39)$$

В точке максимума потенциального горба $\xi = 0$ решение (39) с электронной силой $\mathcal{F}_2(\tau_1)$ определяет закон убывания амплитуды импульса $\Phi_0(\tau_1)$.

В случае малых времен эволюции, когда выполнено неравенство $\omega_c \tau_p \tau_1 \ll 1$ зависимость $\Phi_0(\tau_1)$ имеет вид

$$\Phi_0(\tau_1) = \Phi_0(0) (1 - \beta \tau_1), \quad (40)$$

где $\beta = \omega_c \tau_p [\alpha (V_{1m0}^\pm - b_0)]^{1/2}$.

Согласно [2], решение уравнения (37) с разрывной силой (38) при малых временах τ_1 ($\beta \tau_1 \ll 1$) может быть представлено в виде

$$\Phi^\pm(\xi, \tau_1) = \Phi^\pm(\xi, 0) - \frac{\tau_1}{2} \frac{b_0}{a} \sqrt{\alpha} \Phi_0(0) \left[1 + \operatorname{erf} z - 2z^2 \operatorname{erfc} z + \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \right], \quad (41)$$

где $z = (\xi - \xi_{m0}^\pm) / \sqrt{4\nu \tau_1}$. Выражение (41) описывает перепад потенциала $\Phi^\pm(\xi, \tau_1)$ вблизи особых точек ξ_{m0}^\pm (рис. 3), причем ширина области перепада $\delta \xi$, определяемая из условия $|z| \leq 1$, увеличивается со временем

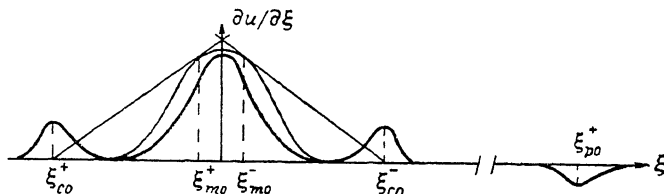


Рис. 3. Эволюция импульса и рост ближних и дальних предвестников в случае потенциального горба.

как $\delta \xi \simeq (4\nu \tau_1)^{1/2}$, а его высота $|\delta \Phi^\pm|$ изменяется с τ_1 по закону $|\delta \Phi^\pm| = \mathcal{F}_1 \tau_1 = (b_0/a) \sqrt{\alpha} \Phi_0(0) \tau_1$. Поэтому при $|\xi - \xi_{m0}^\pm| \leq \sqrt{4\nu \tau_1}$ производная $|\partial \Phi / \partial \xi| \simeq |\partial \Phi^\pm / \partial \xi|$ растет со временем следующим образом:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right| \simeq \frac{b_0}{a} \Phi_0(0) \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}} \sqrt{\tau_1}.$$

Координаты граничных точек $\xi_{m0}^\pm(\tau_1)$, определяемые из уравнения $\partial \Phi^\pm / \partial \xi = 0$, согласно (41), приближаются к вершине импульса по закону $\xi_{m0}^\pm(\tau_1) = \xi_{m0}^\pm(0) \pm z_0 \sqrt{4\nu \tau_1}$, где $z_0 \simeq 0.47$ — решение уравнения $z \operatorname{erfc} z = \exp(-z^2) / \sqrt{\pi}$.

Решение (41) типа перепада имеет место и для потенциальной ямы в области точек ξ_{m0}^\pm (рис. 4). В этом случае координаты $\xi_{m0}^\pm(\tau_1)$ отодвигаются от центра импульса со скоростью $d\xi_{m0}^\pm / d\tau_1 = \pm z_0 \sqrt{\nu / \tau_1}$. Особенности эволюции потенциальной ямы возникают также вблизи граничных точек ξ_{c0}^\pm , где производная $\partial P / \partial V_1^\pm \partial \Phi^\pm / \partial \xi$ сингулярна

$$\frac{\partial P}{\partial V_1^\pm} \frac{\partial \Phi^\pm}{\partial \xi} = \pm \frac{b_0}{a} \sqrt{\frac{\Phi_0(0)}{\Phi^\pm(\xi_{c0}^\pm) - \Phi^\pm(\xi)}} \frac{\partial \Phi^\pm}{\partial \xi}. \quad (42)$$

Как показано в работе [2], решение уравнения (37) с электронной силой (42) имеет вид ударной волны (рис. 4). Отметим, однако, что особенность (42) в $b_0/a \gg 1$ раз сильнее особенности электронной силы в случае слабых магнитных полей. Это обстоятельство приводит к уменьшению фронта ударной волны по сравнению с [2] в b_0/a раз.

Рассмотрим теперь образование предвестников потенциального горба в точках $\xi_{c0}^\pm, \xi_{p0}^\pm$ и потенциальной ямы в точках ξ_{p0}^\pm . Для этого, используя метод медленно меняющегося профиля, а также учитывая (36), преобразуем уравнение (35) к виду

$$\frac{\partial \psi^\pm}{\partial \tau_1} = F^\pm(\xi, \tau_1) - \omega_c \tau_p \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^\pm(\xi', \tau_1)}{\xi - \xi'} d\xi', \quad (43)$$

где $F^\pm = (\partial n^\pm / \partial \xi) / (3n_0 \omega / \pi v_F \varepsilon_F)$, причем $\psi^\pm(\xi, 0) = 0$. Решеточным затуханием в этом случае, очевидно, можно пренебречь. При $|\xi| \leq |\xi_{c0}^\pm|$ электронная сила F^\pm , вызывающая рост ближних предвестников потенциального горба, обусловлена скачущими электронами. Поэтому, полагая, что в этой области эффективный потенциал $V_1^\pm(\xi) = V_{1,0}^\pm \mp b_0(\xi - \xi_{c0}^\pm)$, с помощью (30) получим

$$F^\pm(\xi, \tau_1) = \frac{1}{2} \frac{b_0}{a} \sqrt{b_0} \Phi(\tau_1) \frac{1}{\sqrt{|\xi - \xi_{c0}^\pm|}} \equiv \frac{c_1(\tau_1)}{\sqrt{|\xi - \xi_{c0}^\pm|}}, \quad |\xi| \leq |\xi_{c0}^\pm|. \quad (44)$$

При $|\xi| > |\xi_{c0}^\pm|$ сила F^\pm , определяемая отражающимися электронами, согласно (32), пропорциональна параметру $\omega_c \tau_p \ll b_0/a$ и не имеет особенности в точке ξ_{c0}^\pm . По этой причине влиянием отражающихся частиц на эволюцию ближних предвестников будем пренебрегать.

Эволюция дальних предвестников в области особых точек, напротив, обусловлена отражающимися электронами. Нетрудно показать, что соот-

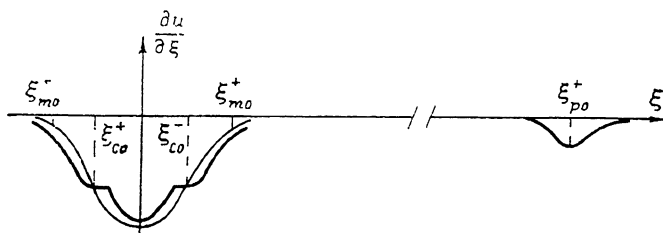


Рис. 4. Эволюция импульса и рост дальних предвестников в случае потенциальной ямы.

ветствующая электронная сила на основании (33) и (34) может быть записана в виде

$$F^\pm = \begin{cases} -\frac{b_0^{3/2}}{\sqrt{x}} \frac{\pi}{2} \Phi_0(\tau_1) \frac{\omega_c \tau_p}{\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}} \equiv \frac{c_2(\tau_1)}{\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}}, & |\xi| \leq |\xi_{p0}^\pm| \\ -\frac{1}{2} b_0^{1/2} \int_{\mp 1}^{\xi_{m0}^\pm} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} d\xi' \frac{\sqrt{V_{1,m0}^\pm - V_1^\pm(\xi')}}{V_1^\pm(\xi) - V_1^\pm(\xi')} \frac{\omega_c \tau_p}{\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}} \equiv \frac{d_3^\pm(\xi, \tau_1)}{\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}}, & |\xi| \leq |\xi_{p0}^\pm| \end{cases} \quad (45)$$

в случае потенциального горба и

$$F^\pm = \begin{cases} -\frac{b_0^{3/2}}{\sqrt{x}} \frac{\pi}{2} \Phi_0(\tau_1) \frac{\omega_c \tau_p}{\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}} \equiv \frac{c_3(\tau_1)}{\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}}, & |\xi| \geq |\xi_{p0}^\pm| \\ -b_0^{1/2} \frac{\omega_c \tau_p}{\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}} \left[\frac{b_0}{\sqrt{x}} \frac{\pi}{2} \Phi_0(\tau_1) + \int_{\xi_{c0}^\pm}^{\xi_{m0}^\pm} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi'} d\xi' \frac{\sqrt{V_{1,m0}^\pm - V_1^\pm(\xi')}}{V_1^\pm(\xi) - V_1^\pm(\xi')} \right] \equiv \frac{d_3^\pm(\xi, \tau_1)}{\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}}, & |\xi| \leq |\xi_{p0}^\pm| \end{cases} \quad (46)$$

в случае потенциальной ямы.

Решение уравнения (43), полученное методом Фурье-преобразования, имеет вид

$$\psi^\pm(\xi, \tau_1) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' F^\pm(\xi', \tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\omega_c \tau_p \pi |k| (\tau - \tau_1)} e^{-ik(\xi - \xi')}. \quad (47)$$

При малых временах эволюции (т. е. при $\beta \tau_1 \ll 1$), когда, согласно (40), (44)–(46), можно пренебречь зависимостью электронной силы $F^\pm(\xi', \tau)$

от τ , интегрирование по k и τ в (47) выполняется элементарно; в результате находим

$$\psi^\pm(\xi, \tau_1) = \frac{1}{2\pi^2\omega_c\tau_p} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' F^\pm(\xi') \ln \frac{(\omega_c\tau_p\pi\tau_1)^2 + (\xi - \xi')^2}{(\xi - \xi')^2}. \quad (48)$$

Подставляя далее (44)–(46) в (48) и учитывая, что коэффициенты d_j^\pm и d_{j0}^\pm , стоящие в (45), (46), являются медленными функциями не только времени τ_1 , но и координаты ξ' , после несложных преобразований для скорости роста потенциала предвестника $\partial\psi^\pm/\partial\tau_1$ получим

$$\frac{\partial\psi_j^\pm}{\partial\tau_1} = \omega_c\tau_p\tau_1 \left\{ c_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u^2 - \eta_j^\pm)^2 + (\pi\tau_1\omega_c\tau_p)^2} + d_j^\pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u^2 + \eta_j^\pm)^2 + (\pi\tau_1\omega_c\tau_p)^2} \right\}. \quad (49)$$

Здесь индекс $j=1$ отвечает ближним предвестникам, а индексы $j=2, 3$ — дальним предвестникам соответственно для потенциального горба ($j=2$) и для потенциальной ямы ($j=3$), причем $\eta_1^\pm = |\xi - \xi_{c0}^\pm|$, $\eta_{2,3}^\pm = |\xi - \xi_{p0}^\pm|$, $d_1=0$. Вычисляя интегралы в (49) с помощью вычетов, находим

$$\frac{\partial\psi_j^\pm}{\partial\tau_1} = (c_j + d_j^\pm) \frac{\cos(1/2 \arctg(\omega_c\tau_p\pi\tau_1/\eta_j^\pm))}{|\eta_j^\pm + (\omega_c\tau_p\pi\tau_1)^2|^{1/4}}. \quad (50)$$

В особых точках ξ_{c0}^\pm и ξ_{p0}^\pm , т. е. при $\eta_j^\pm=0$, производная $\partial|\psi_j^\pm|/\partial\tau_1$ пропорциональна $1/\sqrt{\tau_1}$ и максимальна. Поэтому функция $|\psi_j^\pm(0, \tau_1)|$ равна амплитудному значению потенциала предвестника ψ_{j0}^\pm . Поскольку в этом случае, согласно (45), (46), $d_j^\pm = d_j \equiv d_j$, то амплитуда j -го предвестника как впереди импульса (ψ_{j0}^+), так и за ним (ψ_{j0}^-) на основании (50) растет со временем по закону

$$\psi_{j0}^\pm = \psi_{j0} \equiv \psi_{j0} = |c_j + d_j| \sqrt{2/\omega_c\tau_p\pi} \sqrt{\tau_1}, \quad (51)$$

причем амплитуда поля ближних предвестников ψ_{10} , пропорциональная величине $c_1 \sim b_0/a$, в $\sqrt{\epsilon_F/\Phi_0}$ раз превышает амплитуду дальних предвестников, определяемую величинами $c_{2,3} \sim d_{2,3} \sim \omega_c\tau_p$. Вдали от особых точек, при $\eta_j^\pm \gg \omega_c\tau_p\tau_1$, согласно (50), потенциал ψ_j^\pm изменяется линейно со временем

$$\psi_j^\pm(\eta_j^\pm, \tau_1) = (c_j + d_j^\pm) \tau_1 / \sqrt{\eta_j^\pm}, \quad (52)$$

при этом потенциал ψ_1^\pm для ближних предвестников, согласно (44), имеет положительные значения, в то время как для дальних предвестников функция $\psi_{2,3}^\pm$, согласно (45), (46), при $\xi \approx \xi_{p0}^\pm$ отрицательна (рис. 3, 4). Характер деформации растущих предвестников достаточно сложным образом зависит от формы потенциала основного импульса $\Phi(\xi)$, выражаемого через коэффициенты d_2^\pm и d_3^\pm .

Как уже отмечалось, результаты, полученные в этом параграфе, относятся к случаю цилиндрической поверхности Ферми металлов. Однако описанная выше эволюция основного импульса и предвестников, определяемая особенностями электронной силы $\lambda(\partial n/\partial x)$, характерна и для металлов с произвольным спектром носителей. Можно показать, что в случае сферической поверхности Ферми особенность силы F_s^\pm вблизи точек ξ_{p0}^\pm имеет такой же вид, как и в случае цилиндрической поверхности Ферми, т. е. $F_s^\pm = \gamma/\sqrt{|\xi - \xi_{p0}^\pm|}$, однако коэффициент γ оказывается в $\sqrt{2qR}$ раз меньше, чем соответствующие коэффициенты $c_{2,3}$ и $d_{2,3}^\pm$, входящие в (45), (46). Это объясняется тем, что вклад в силу F_s^\pm вносит лишь малая часть отражающихся электронов, для которых угол ϑ в (33) и (34) определен в области $\Delta\vartheta \sim 1/\sqrt{2qR}$. Вблизи точек ξ_{m0}^\pm и ξ_{c0}^\pm вклад в электрон-

ную силу вносят скачущие электроны, для которых угол ϑ изменяется в широком интервале $\Delta\vartheta \sim \pi/2$. Поэтому особенности силы $\lambda (\partial n/\partial x)$ в случае сферической и цилиндрической поверхности Ферми различные, а именно: для сферической ПФ особенность $\lambda (\partial n/\partial x)$ при $|\xi| \leq |\xi_{c0}^{\pm}|$ логарифмическая, а скачок силы (38) при $\xi = \xi_{m0}^{\pm}$ размывается.

Рассмотренные в настоящей работе эффекты могут наблюдаться в достаточно чистых проводниках, для которых время релаксации носителей $\tau_p \geq 10^{-9}$ с, и в умеренно сильных магнитных полях $H \leq 10$ Э. В этом случае при длине импульса $L \sim 10^{-3}$ см и интенсивности ~ 1 Вт/см² нелинейные параметры имеют следующие значения: $a \sim 10^{-1}$, $b_0 \leq 1$, а левая часть неравенства (9) порядка 10^{-1} . Перечисленные условия достаточны для наблюдения нелинейной эволюции основного импульса и ближних предвестников. Для наблюдения дальних предвестников необходимо также выполнение условия $\omega_c \tau_p > 1$. В полях $H \leq 10$ Э это условие выполняется в проводниках с малой эффективной массой $m \sim 10^{-2} m_0$. При этом $\omega_c \tau_p \sim 5$, а величина ларморовского радиуса $R \sim 10^{-2}$ см.

Л и т е р а т у р а

- [1] Богачек Э. Н., Рожавский А. С., Шехтер Р. И. // ФНТ. 1978. Т. 4. № 5. С. 603—616.
- [2] Демиховский В. Я., Кукушкин В. А. // ФНТ. 1988. Т. 14. № 2. С. 141—149.
- [3] Демиховский В. Я., Максимова Г. М., Сауткин В. Е. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. № 3. С. 1037—1048.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского ГИФТИ
Горький

Поступило в Редакцию
22 июля 1988 г.
