Зонная структура сверхпроводящих фотонных кристаллов

© Ю.Е. Лозовик, С.Л. Эйдерман

Институт спектроскопии Российской академии наук,
142190 Троицк, Московская обл., Россия

E-mail: lozovik@isan.troitsk.ru

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 24 марта 2008 г.)

Изучена зонная структура двумерного сверхпроводящего фотонного кристалла, представляющего собой периодическую систему бесконечных по длине непрекращающихся цилиндров, имеющих круглое сечение. Результаты получены с помощью метода разложения собственных функций по плоским волнам. Проанализирована фотонная зонная структура для двух температур — вблизи и вдали от точки сверхпроводящего перехода. Оказалось, что двумерный сверхпроводящий фотонный кристалл обладает при низких температурах полной и неполной запрещенными зонами, которые с повышением температуры смещаются в коротковолновую область.

Работа поддержана грантом РФФИ.

PACS: 42.70.Qs, 74.25.Gz, 74.78.Fk, 85.25.-j

1. Введение

Фотонные кристаллы [1] представляют собой в основном искусственные структуры с периодически меняющейся в пространстве диэлектрической проницаемостью. В силу этой периодичности уравнения, определяющие спектр фотонных кристаллов, получаемые из уравнения Максвелла, похожи на уравнение Шредингера, определяющее энергетический спектр электронов в обычном кристалле.

Разумеется указанная выше аналогия является неполной. Во-первых, собственные функции для фотонного кристалла — векторные, а не скалярные, как для электронов, и поэтому, в частности, фотонные щели могут зависеть от поляризации поля. Во-вторых, лишь для простых частотных зависимостей диэлектрической функции материалов, составляющих фотонный кристалл, уравнения, определяющие спектр фотонного кристалла, сводятся к уравнению типа Шредингера [2].

Тем не менее из-за периодичности электромагнитные волны в фотонных кристаллах имеют зонный спектр и координатную зависимость, аналогичную блоховским волнам электронов в кристалле. При определенных условиях в зонной структуре фотонного кристалла образуются щели аналогично запрещенным электронным зонам в естественных кристаллах. Ширина этих щелей зависит от геометрических параметров фотонного кристалла, так и от диэлектрических свойств материалов, образующих фотонный кристалл [3].

В зависимости от свойств фотонного кристалла могут образовываться как полностью запрещенные по частоте зоны, для которых распространение излучения невозможно вне зависимости от его поляризации и направления, так и частично запрещенные, в которых распространение невозможно лишь для определенных поляризаций. Указанные свойства позволяют применять фотонные кристаллы в качестве оптических фильтров или поляризаторов. Наряду с этим фотонные кристаллы предоставляют возможность манипулировать испусканием и распространением света [3,4]. Для ряда потенциальных применений фотонных кристаллов в СВЧ- и терагерцевой области важно наличие инфракрасной щели в спектре фотонного кристалла. Но поскольку в волновое уравнение диэлектрические проницаемости $\varepsilon(\omega, r)$ входят в комбинации как $\frac{\omega^2\varepsilon(\omega,r)}{c^2}$, при малых частотах ω амплитуда пространственного изменения $\omega^2\varepsilon(\omega, r)$, необходимая для возникновения низкочастотной щели в спектре, достигается лишь в том случае, если при $\omega \to 0$ величина $\omega^2\varepsilon(\omega, r) \to \mathrm{const}$. Это реализуется в металлических фотонных кристаллах (см. далее). Но недостатком металлических фотонных кристаллов является наличие затухания, ухудшающего „качество“ фотонной щели. Поэтому в настоящей работе мы рассматриваем новый тип фотонных кристаллов — сверхпроводящие фотонные кристаллы, затухание в которых подавлено при частотах ниже сверхпроводящей щели. Дополнительным преимуществом сверхпроводящих фотонных кристаллов является возможность управления их сверхпроводящей щелью, а следовательно, и электромагнитными свойствами (в частности, фотонной щелью) с помощью температуры и внешних магнитных полей (см., например, [5–8]).

В настоящей работе с помощью метода разложения по плоским волнам мы рассчитали фотонные зоны двумерного фотонного кристалла, элементы которого представляют собой неперекрывающиеся, бесконечные по длине сверхпроводящие цилиндры, образующие квадратную решетку.

2. Метод разложения по плоским волнам

Для расчета дисперсионной картины фотонных кристаллов был разработан или адаптирован ряд методик.

Наименее громоздким и требовательным к компьютерным ресурсам является метод расчета фотонной зонной структуры с помощью разложения собственных функций по плоским волнам (Plane wave expansion method) [9–12]. Этот метод основан на разложении диэлектрической проницаемости, являющейся в фотонном кристалле периодической функцией координат и пространственно-периодической части электромагнитного поля, в ряде Фурье. В зависимости от требуемой точности ряд обрывается на некотором члене, и решается получающаяся система алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье. Из условия нетривиальной ее резрешимости — обращения в нуль соответствующего детерминанта — получается зонный спектр фотонного кристалла. Таким образом, ясно, что в общем случае требуется численный расчет коэффициентов ряда Фурье разложения диэлектрической проницаемости. Но в том случае, когда элементы фотонного кристалла имеют высокую степень симметрии (шары, цилиндра, прямоугольные параллелепипеды), эти коэффициенты могут быть вычислены аналитически.

Нашей задачей является получение дисперсионной зависимости — зависимости частоты поля от волнового вектора. Запишем для диэлектрической функции фотонного кристалла

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{G}} \varepsilon(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G}\mathbf{x}}. \qquad (1)$$

Коэффициенты Фурье $\varepsilon(\mathbf{G})$ могут быть получены интегрированием по всей площади ячейки Вигнера–Зейтца, $\mathbf{G}$ — вектор обратной решетки системы.

Для рассматриваемых периодических структур диэлектрическая проницаемость может быть записана в виде

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 + (\varepsilon - \varepsilon_0) \sum_l \Theta\big(x - x(l)\big), \qquad (2)$$

где $\Theta(\mathbf{x}) = 1$ внутри элемента фотонного кристалла и $\Theta(\mathbf{x}) = 0$ вне его. В данном случае предполагается, что элементы фотонного кристалла находятся в вакууме, поэтому $\varepsilon_0 = 1$. С учетом указанного выше коэффициенты Фурье в двумерном фотонном кристалле запишутся в виде

$$\varepsilon(\mathbf{G}) = \delta_{\mathbf{G}0} + (\varepsilon - 1) M_{\mathbf{G}0},$$

где

$$M_{\mathbf{G}0} = \frac{1}{S} \int d^2\mathbf{x}\, \Theta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{G}\mathbf{x}}. \qquad (3)$$

Здесь интегрирование ведется по всей плоскости XY элементарной ячейки. Пусть элементы фотонного кристалла имеют форму неперекрывающихся цилиндров. Тогда интеграл принимает вид [10]

$$M_{\mathbf{G}0} = 2 f_p \frac{J_1(|\mathbf{G}|x)}{(|\mathbf{G}|x)}, \qquad (4)$$

где fp — фактор заполнения, J_1 — функция Бесселя первого рода.

Так как мы рассматриваем только волны, распространяющиеся в определенной плоскости, можно разделить задачу на две и рассмотреть отдельно E- и H-поляризации.

Для простоты ограничимся рассмотрением E-поляризованной волны. Из уравнений Максвелла, разлагая пространственно-периодическую часть электрического поля в ряд Фурье внутри фотонного кристалла, можно получить следующее выражение:

$$(\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 E_k(\mathbf{G}) = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\mathbf{G}'} \varepsilon(\mathbf{G} - \mathbf{G}') E_k(\mathbf{G}'). \qquad (5)$$

Подставляя (4) и (5), получим для двумерного фотонного кристалла

$$\sum_{\mathbf{G}'} \delta_{\mathbf{G}\mathbf{G}'} (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 E_k(\mathbf{G}') = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\mathbf{G}'} \big(\delta_{\mathbf{G}\mathbf{G}'} + (\varepsilon - 1) M_{\mathbf{G}\mathbf{G}'}\big) E_k(\mathbf{G}'). \qquad (6)$$

Полученное уравнение позволяет определить собственные значения $\frac{\omega^2}{c^2}$. Для каждого заданного значения $\mathbf{k}$ уравнение (6) может быть представлено в виде

$$AE = \frac{\omega^2}{c^2} BE, \qquad (7)$$

где A и B — матрицы в уравнении (7). Уравнение (7) может быть решено с помощью диагонализации матрицы $B^{-1}A$. Для каждого значения $\mathbf{k}$ таким образом будет получен набор собственных частот $\omega(\mathbf{k})$, каждая из которых является непрерывной функцией $\mathbf{k}$ и образует отдельную дисперсионную кривую. Если волновой вектор в ячейке обратной решетки будет меняться по контуру в первой зоне Бриллюэна, содержащему все точки симметрии для данной решетки, полученные зависимости $\omega(\mathbf{k})$ дадут зонную структуру фотонного кристалла.

Перейдем теперь к расчету зонного спектра фотонного кристалла из сверхпроводящих элементов. Мы используем квазилокальное описание для диэлектрических свойств системы (см. [13]). Для применения метода плоских волн требуется аналитическое выражение для диэлектрической проницаемости как функции частоты. Поэтому для упрощения используем выражение для диэлектрической проницаемости в рамках двухжидкостной модели Казимира–Гортера, качественно правильно описывающее сверхпроводник ниже критической температуры. В рамках этой модели предполагается, что вдали от точки сверхпроводящего перехода внутри сверхпроводника существуют две независимые электронные компоненты — сверхпроводящая и нормальная, концентрации которых зависят от температуры.

Диэлектрическая проницаемость в такой модели определяется соотношением

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{P^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}. \qquad (8)$$

Здесь второе и третье слагаемые отвечают сверхпроводящей и нормальной компонентам соответственно; ω_p — плазменная частота, соответствующая нормальной компоненте; $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_n e^2}{m}}$ (n_n — плотность нормальной компоненты); γ — коэффициент затухания; $P = c/\delta_L$, где c — скорость света, а δ_L — лондоновская глубина проникновения; величины ω_p и δ_L зависят от температуры T.

При переходе в нормальное состояние плотность сверхпроводящей компоненты обращается в нуль, а нормальной — становится равной полной плотности, и выражение (8) переходит в формулу Друде

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}. \tag{9}$$

При температуре $T \to 0$ плотность нормальной компоненты обращается в нуль, и выражение (8) переходит в

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{P^2}{\omega^2}. \tag{10}$$

Подставляя выражение (8) в (6), получим уравнение для нахождения собственных значений. Тогда выражение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\delta_{GG'} \frac{c^2}{\omega^2} (k+G)^2 = \delta_{GG'} - \frac{P^2 M_{GG'}}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2 M_{GG'}}{\omega(\omega + i\gamma)}. \tag{11}$$

После приведения нелинейного матричного уравнения к полиномиальному виду по степени ω получаем

$$\frac{\omega^3}{c^3} I_{GG'} + C\frac{\omega^2}{c^2} - B\frac{\omega}{c} - A = 0. \tag{12}$$

Полиномиальное уравнение на собственные значения эквивалентно линейному уравнению на собственные значения $Tu = \omega u$ с матрицей T, составленной из коэффициентов многочлена в левой части уравнения (12).

Матрица T линейного уравнения в n раз больше исходных матриц, где n — порядок многочлена; она имеет вид

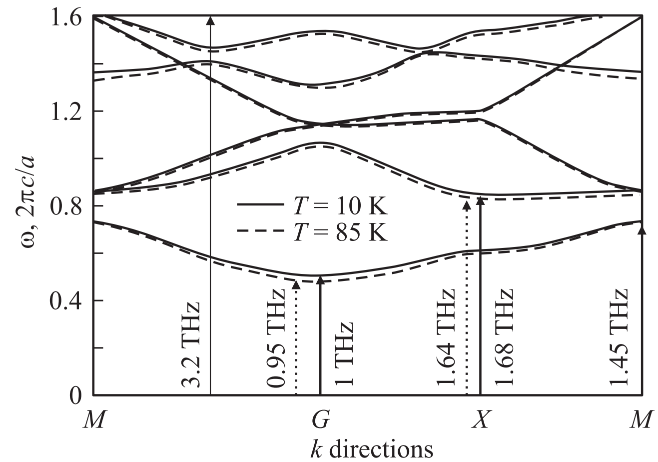
$$T = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ A & B & C \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $I = \delta_{GG'}$, $A = \frac{i\gamma}{c^3}\left(P^2 M_{GG'} + \delta_{GG'}(k+G)^2\right)$, $B = \frac{P^2}{c^2} M_{GG'} + \frac{\omega_p^2}{c^2} M_{GG'} + \delta_{GG'}(k+G)^2$, $C = -i\,\frac{\gamma}{c}\,\delta_{GG'}$.

Среди решений уравнения $Tu = \omega u$ имеются лишние решения, соответствующие незатухающим со временем модам электромагнитного поля, поэтому в данной задаче необходим отбор решений. Физическим критерием для отбора является условие $\mathrm{Im}\omega \geq 0$, что соответствует затухающим в металле модам электромагнитного поля. Отсортировав соответствующим образом решения, можно получить искомые дисперсионные кривые.

3. Результаты

Перейдем к рассмотрению результатов. Мы построили кривые, полученные методом разложения собственных решений по плоским волнам. Расчеты проводились для модельного высокотемпературного сверхпроводника, для которого в нормальном состоянии плазменная частота и затухание равны соответствующим величинам для YBaCuO: $\omega_p = 1.67 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$, $\gamma = 1.84 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$. Постоянная двумерной квадратной решетки фотонного кристалла была выбрана равной $a = 150\,\mu$m, фактор заполнения $f_p = 5\%$. Полную концентрацию электронов находим из экспериментальных данных для плазменной частоты: $\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$. В двухжидкостной модели предполагается, что при стремлении температуры к абсолютному нулю вся нормальная компонента переходит в сверхпроводящую, поэтому в предельных случаях $T \gg T_c$ и $T = 0$ нормальная и сверхпроводящая концентрации соответственно равны полной концентрации электронов n. Отметим, однако, что фактически в случае, когда в сверхпроводнике существуют одновременно сверхпроводящая и нормальная компоненты, их сумма немного отличается от полной концентрации электронов [6]. Меняя лондоновскую глубину проникновения для различных температур, можно влиять на фотонный зонный спектр.



Зонная структура $\omega(\mathbf{k})$ для двумерного сверхпроводящего фотонного кристалла YBaCuO с квадратной решеткой, состоящего из бесконечных цилиндров с круглым сечением. E-поляризация. $T = 85$ и $10\,$K, $f_p = 5\%$, $a = 150\,\mu$m.

Далее приведем данные расчетов для сверхпроводника YBaCuO. Глубина проникновения, например, при температуре $T = 85\,$K составляет $\delta_L = 370\,$nm, а при $T = 10\,$K $\delta_L = 180\,$nm.

Кроме того, спектром фотонного кристалла и его оптическими свойствами можно управлять с помощью внешнего магнитного поля. На рисунке представлены дисперсионные зависимости $\omega(\mathbf{k})$ для $\delta_L = 370$ и $180\,$nm. По оси **x** указаны основные симметричные направления, по которым меняется волновой вектор в первой зоне Бриллюэна, по оси **y** указаны частоты, отложенные в решеточных единицах $2\pi c/a$, где a — период решетки фотонного кристалла. Если осуществить соответствующий пересчет, то видно, что край полной нижней запрещенной зоны соответствует частоте $f = 0.95\,$THz. Верхняя щель лежит в диапазоне $1.45 \leq f \leq 1.64\,$THz. Следует также отметить образование двух неполных запрещеных зон, лежащих выше указанных зон по направлению GX.

Рассмотрим, как изменится результат при уменьшении температуры до $T = 10\,\mathrm{K}$, что соответствует глубине проникновения $\delta_L = 180\,\mathrm{nm}$. Край нижней запрещенной зоны сместился в высокочастотную область $f = 1\,\mathrm{THz}$. Край верхней щели также сместился в высокочастотную область: $1.45 \le f \le 1.68\,\mathrm{THz}$. Неполные запрещенные зоны по направлению GX также смещаются в высокочастотную область.

Отметим, что данный расчет справедлив только для частот, лежащих внутри сверхпроводящей щели: $\hbar\omega < 3.62kT_c$, т. е. для $f < 3.43\,\mathrm{THz}$. В диапазоне существенно выше указанной частоты сверхпроводник ведет себя с большой точностью как нормальный металл (см., например, [5]).

4. Заключение

Проведен расчет зонной структуры двумерного сверхпроводящего фотонного кристалла, YBaCuO, состоящего из бесконечных цилиндров, образующих квадратную решетку. Вычисления показывают, что данный кристалл обладает при низких температурах двумя полными запрещенными зонами и двумя неполными, которые с понижением температуры смещаются в высокочастотную область.

Таким образом, данный тип фотонного кристалла может быть использован в низкотемпературной области в качестве высокочастотного фильтра с управляемыми путем изменения температуры, магнитного поля и геометрии параметрами фотонной щели.

Список литературы

[1] Yablonovitch. Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
[2] O.L. Berman, Yu.E. Lozovik, S.L. Eiderman, R.D. Coalson. Phys. Rev. B **74**, 092 505 (2006).
[3] Sailing He, Sanshui Xiao, Linfang Shen, Jianping He, Jian Fu. J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 9713 (2001).
[4] S.Y. Lin, J.G. Fleming, I. EI-Kady. Phys. Rev. Lett. **83**, 380 (2003).
[5] D.N. Basov, T. Timusk. Rev. Mod. Phys. **77**, 15 (2005).
[6] П.И. Арсеев, С.О. Лойко, Н.К. Федоров. УФН **176**, 3 (2006).
[7] А.В. Долгов, Е.Г. Максимов. УФН **135**, 441 (1981).
[8] O.V. Dolgov, D.A. Kirzhnits, E.G. Maksimov. Rev. Mod. Phys. **53**, 81 (1981).
[9] A.A. Maradudin, A.R. McGurn. Phys. Rev. B **48**, 17 576 (1993).
[10] J.D. Joannopoulos, R.D. Meade, J.N. Winn. Photonic crystals: the road from theory to practice. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1995). 611 p.
[11] B. Schulkin, L. Sztancsik, J.F. Federici. Am. J. Phys. **72**, 1051 (2004).
[12] Z. Sun, H.K. Kim. Appl. Phys. Lett. **85**, 642 (2004).
[13] Yu.E. Lozovik, A.V. Klyuchnik. In: The dielectric function of condensed systems / Eds L.V. Keldysh, D.A. Kerzhnitz, A.A. Marardudin. Elsevier (1987). P. 299.