

УДК 538.931

## РАССЕЯНИЕ ЭКСИТОНА ВАНЬЕ—МОТТА НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПРИМЕСИ

В. Д. Каган

При рассеянии экситона на заряженной примеси учитывается как кулоновское взаимодействие при постоянной внутренней структуре экситона, так и поляризационное взаимодействие экситона с примесью. Наложение двух таких взаимодействий приводит к минимуму в эффективном сечении рассеяния и во времени релаксации. Показано так, что для вычисления вероятности рассеяния медленных экситонов плохо применимо борновское приближение. Разработан приближенный метод, позволивший определить полную вероятность такого процесса.

Экситон представляет собой квазичастицу, которая является носителем запасенной энергии, и ее движение очень существенно для понимания процесса переноса энергии. Поскольку экситон — нейтральная частица, исследование его движения значительно сложнее, чем исследование движения заряженных частиц. Тем не менее современные методы позволяют провести подробные измерения коэффициента диффузии экситонов в полупроводниках [1]. При этом проводилось сопоставление с теорией, рассматривающей различные механизмы релаксации импульса экситонов. Среди таких механизмов весьма существенно рассеяние экситонов на фононах. Однако в зависимости от температуры и концентрации имеющихся в кристалле примесей важным может оказаться и рассеяние экситона на этих примесях. Поэтому с целью полного учета всех процессов релаксации импульса экситона в статье [2] было дано рассмотрение рассеяния экситона на заряженной примеси. Настоящая работа является развитием и в некоторых пунктах уточнением указанной статьи.

Экситон Ванье—Мотта представляет собой связанное состояние электрона и дырки с эффективными массами  $m_1$  и  $m_2$ , расположенных друг от друга на расстоянии порядка борновского радиуса  $a = \hbar^2 \epsilon_0 (m_2 + m_2) / m_1 m_2 e^2$  ( $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость), много большим постоянной решетки  $a_0$ . Экситон рассеивается на примеси благодаря кулоновскому взаимодействию зарядов электрона и дырки с зарядом примеси. Как показано в [2], усреднение волновой функции в основном состоянии экситона приводит к тому, что такое рассеяние эквивалентно рассеянию частицы с суммарной массой в поле потенциала

$$U(r) = \frac{Ze^2}{\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{(m_1 + m_2)}{m_2 a} + \frac{1}{r} \right] e^{-\frac{2(m_1 + m_2)r}{m_2 a}} - \left[ \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 a} + \frac{1}{r} \right] e^{-\frac{2(m_1 + m_2)r}{m_1 a}} \right\}, \quad (1)$$

$Ze$  — заряд примеси. В [2] была рассчитана вероятность рассеяния в борновском приближении и определено время релаксации экситона в широком интервале изменения величины  $pa/\hbar$ , где  $p$  — импульс экситона.

В настоящей работе мы определим степень применимости борновского приближения. Как оказывается, для медленных частиц ( $pa/\hbar \ll 1$ ) оно плохо применимо. Поэтому мы предложим приближенную формулу, позволяющую оценить вероятность рассеяния медленных частиц и соот-

ветствующее время релаксации. Это рассмотрение будет дано во второй части статьи, а сначала мы сосредоточим внимание на тех факторах, которые не позволяют свести взаимодействие экситона с примесью к потенциалу  $U(r)$ .

При рассеянии электронов на атомах, как хорошо известно, важную роль играют поляризация атома в поле электрона и взаимодействие электрона с наведенным диполем. Взаимодействие выступает как поляризационное только на больших расстояниях, где оно имеет вид [3]

$$U^{\text{pol}}(r) = -\alpha e^2 / 2\epsilon_1 r^4, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — поляризуемость атома. На близких же расстояниях взаимодействие уже не сводится к поляризационному, так как частицы, составляющие атом, взаимодействуют с налетающим электроном индивидуально. Рассеяние экситона на заряженной примеси эквивалентно рассеянию электрона на атоме водорода, поэтому необходимо учесть вклад поляризационного потенциала. В [4, 5] вычислен матричный элемент этого потенциала

$$U_q^{\text{pol}} = -\frac{\pi^2 \alpha e^2}{2\epsilon_0} q, \quad \hbar q = p' - p, \quad (3)$$

определяемый интегрированием  $U^{\text{pol}}(r)$  только по большим расстояниям, т. е. по той области координат, в которой электрон-экситонное взаимодействие представимо в виде (2), тогда как вклад от интегрирования по малым расстояниям вычтен. Выражение (3) представляет собой не борновское приближение, а матричный элемент, определяющий полную амплитуду вероятности. Тем не менее он зависит не от двух аргументов  $p$  и  $p'$  — значений импульсов частицы до и после рассеяния, а только от их разности.

Определим время релаксации  $\tau_p$  для медленных экситонов, учитывая как борновский матричный элемент потенциала  $U(r)$ , так и выражение (3)

$$\tau_p^{-1} = \frac{4\pi n_i e^4 a^4 (m_1 + m_2) p}{\epsilon_0^2 \hbar^4} \left[ Z^2 \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_2 + m_1)^2} - \frac{4\pi}{5} \frac{Z(m_2 - m_1) p z}{(m_2 + m_1) a^2 \hbar} + \frac{\pi^2}{6} \frac{p^2 a^2}{a^4 \hbar^2} \right], \quad (4)$$

$n_i$  — концентрация примесей. Первое слагаемое составляет результат статьи [2]. Выражение (4) как функция импульса имеет сначала максимум при  $p_2 = Z\hbar a^2 (m_2 - m_1) \cdot (8 - \sqrt{14}) / \pi a (m_2 + m_1) \cdot 5$ , потом минимум при  $p_2 = Z\hbar a^2 (m_2 - m_1) \cdot (8 + \sqrt{14}) / \pi a (m_2 + m_1) \cdot 5$ , после чего снова возрастает. Минимальное значение  $\tau_p^{-1}$  почти в три раза меньше максимального. Приняв для экситона, как и для атома водорода, значение поляризуемости  $9/2a^3$  [3], мы получим, что минимум осуществляется тогда, когда величина  $pa/\hbar$  мала, т. е. в области применимости формулы (4). Мы должны заключить, что неправомерно вычислять время релаксации в широком интервале изменения  $pa/\hbar$  без учета поляризационного потенциала и что такой учет сильно уменьшает величину обратного времени релаксации.

Обсудим теперь то обстоятельство, которое отличает рассеяние экситона на примеси от рассеяния электрона на атоме водорода. В кристалле вокруг любого дефекта возникает поле упругих деформаций [5]. Величина смещения вблизи дефекта имеет порядок постоянной решетки  $a_0$ , что соответствует большим деформациям. Поле деформаций, возникшее вокруг примеси, через деформационный потенциал воздействует на электрон, связанный в экситоне, что является дополнительным взаимодействием между экситоном и примесью. Известно к тому же, что это поле смещений далекодействующее — на больших расстояниях оно спадает квадратично. Однако в [6] показано, что именно это обстоятельство приводит к макроскопическим эффектам — изменению из-за наличия дефекта объема или формы кристалла. Поскольку рассеяние экситона происходит уже в таком деформированном кристалле, эта макродеформация должна быть вычтена из экситон-примесного упругого взаимодействия. Для остающейся же части интеграл по всему объему от деформации схо-

дится, и в этом смысле это упругое поле можно считать короткодействующим. Энергия упругого экситон-примесного взаимодействия имеет порядок величины  $\Delta p a_0 / \hbar$ , где  $\Delta$  — константа деформационного потенциала. Несмотря на то что значения  $\Delta$  превышают величину кулоновского экситон-примесного взаимодействия  $Z e^2 / \epsilon_0 a$  (1), можно убедиться, что для медленных экситонов упругое взаимодействие мало по сравнению с (1).

Рассмотрим теперь применимость борновского приближения при рассеянии частицы в потенциальном поле (1). Полная амплитуда рассеяния  $f_{pp'}$  связана с  $T$ -матрицей, для которой известно интегральное уравнение

$$f_{pp'} = - \frac{m}{2\pi\hbar^2} T_{pp'}, \quad (5)$$

$$T_{pp'} = U_{p-p'} + \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} U_{p-p_1} \frac{1}{\epsilon_p - \epsilon_{p_1} + i\delta} T_{p_1 p'}, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (6)$$

Энергия частицы  $\epsilon_p = p^2/2m$ ,  $m$  — масса частицы. Напомним, что это уравнение справедливо при  $\epsilon_p = \epsilon_{p'}$ . Подставляя в интегральный член матричный элемент потенциала (1) и сравнивая с первым членом, мы определим, насколько второе борновское приближение меньше первого. Для быстрых экситонов ( $pa/\hbar \gg 1$ ) параметром разложения оказывается как раз величина  $\hbar/pa$ , т. е. борновское приближение применимо. Для медленных частиц сравним выражения при  $p=p'=0$ . Для них

$$\frac{T_{00}^{(2)}}{U_0} = \frac{Z(m_2 - m_1)}{32m_2 m_1 (m_2 + m_1)^3} [25m_2^3 + 125m_2^2 m_1 + 204m_2 m_1^2 + 125m_1^3 m_2 + 25m_1^4]. \quad (7)$$

Считаем  $Z$  единицей. Выражение (7) зависит только от отношения эффективных масс электрона и дырки: при  $m_2 = m_1$  оно равно нулю, а при  $m_2/m_1 \gg 1$  велико. Легко определить, что (7) равно единице при  $m_2/m_1 \simeq 1.62$ . Так как для многих полупроводников это отношение превышает указанную величину, для рассеяния медленных экситонов борновское приближение неприменимо. Поскольку при низких температурах экситоны в полупроводнике являются медленными, нам необходимо найти полную вероятность рассеяния частицы в потенциале (1).

Хотя в квантовой механике разработан метод решения уравнения Шредингера для медленных частиц [3], он достаточно сложен и не позволяет в общем виде связать амплитуду рассеяния с параметрами рассеивающего потенциала. Я хочу предложить интерполяционную формулу для амплитуды рассеяния медленных частиц, в определенной степени передающую зависимость амплитуды от параметров потенциала. Рассмотрим интегральное уравнение для некоторой функции  $\Phi_{p-p'}$ , которое напоминает уравнение (6)

$$\Phi_{p-p'} = U_{p-p'} - \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} U_{p_1} \frac{1}{\epsilon_{p_1}} \Phi_{p-p'-p_1}. \quad (8)$$

Здесь подразумевается, что и в (6), и в (8)  $U(r)$  не только (1), но функция общего вида. Сходство уравнений (6) и (8) должно привести к аналогии в поведении  $T_{00}$  и  $\Phi_0$  как функционалов  $U(r)$ . В процессе итераций этих интегральных уравнений, т. е. при разложении по борновскому параметру, совпадение первых членов очевидно, но совпадают и вторые члены, и только третьи различаются.

Уравнение (8) допускает простое решение

$$\Phi_{p-p'} = \int \frac{U(r)}{1 + U_1(r)} \exp\left[\frac{i(p-p')r}{\hbar}\right] d^3 r, \quad (9)$$

$$U_1(r) = \int \frac{U_{p_1}}{\epsilon_{p_1}} \exp\left[\frac{i p_1 r}{\hbar}\right] \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (10)$$

Будем, однако, использовать только выражение  $\Phi_0$ . Подставив его в (5), вместо  $T_{00}$  получим некоторое выражение  $\tilde{f}$ , которое, согласно (9) —

(10), выражено через потенциал. Дает ли это выражение  $\bar{f}$  некоторое приближение для точного значения амплитуды  $\pm$ ? Для ответа на этот вопрос сопоставим значения  $f$  и  $\bar{f}$  для тех немногих потенциалов, для которых известны точные значения  $f$  [3]. Для сферического «потенциального горба» высоты  $U_0 = \hbar^2 \kappa^2 / 2m$  и ширины  $a$  точное значение

$$f = (\text{th } \kappa a - \kappa a) / \kappa, \quad (11)$$

тогда как приближенное

$$\bar{f} = \frac{1}{\kappa} \left[ 6\kappa a - 3^{3/2} (2 + \kappa^2 a^2)^{1/2} \ln \frac{3 + 2\kappa^2 a^2 + \kappa a (2 + \kappa^2 a^2)^{1/2}}{3 + \kappa^2 a^2} \right]. \quad (12)$$

При малых  $\kappa a$  по построению совпадают два первых члена разложения, при больших  $\kappa a$

$$f = -a, \quad \bar{f} = -a [3^{3/2} \ln (2 + 3^{1/2}) - 6] \approx -0.84a. \quad (13)$$

Как видно, совпадение хорошее и поведение  $\bar{f}$  как функции  $\kappa a$  повторяет поведение  $f$ , несколько отличаясь от нее по абсолютной величине. Для экспоненциального потенциала отталкивания  $U(r) = U(0)e^{-r/a}$  приближенное выражение амплитуды рассеяния

$$\bar{f} = -\kappa^2 a^2 \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x}}{1 + 2\kappa^2 a^2 \frac{1}{x} (1 - e^{-x} - \frac{x}{2} e^{-x})} dx, \quad (14)$$

тогда как точное выражение

$$f = -a \left[ \frac{K_0(\kappa a)}{I_0(\kappa a)} + \ln \kappa a + C \right]. \quad (15)$$

При больших  $\kappa a$  точная амплитуда слабо — логарифмически — возрастает, тогда как приближенная стремится к насыщению, тем не менее в большом интервале  $\kappa a$   $\bar{f}$  неплохо передает поведение  $f$ . Можно думать, что формулы (9)—(10) можно применить для определения амплитуды рассеяния медленных частиц в произвольном потенциале.

Воспользуемся этими выражениями для определения вероятности рассеяния медленного экситона на заряженной примеси. Вычислим  $\Phi_0$  согласно (9), где отличие от борновского приближения заключено в отличии знаменателя от единицы

$$\Phi_0 = \frac{4\pi Z e^2 a^2}{\epsilon_0} \int_0^\infty dx \frac{\left[ \left( x^2 \frac{m_1 + m_2}{m_2} + x \right) e^{-2x \frac{m_1 + m_2}{m_2}} - \left( x^2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} + x \right) e^{-2x \frac{m_1 + m_2}{m_1}} \right]}{1 + \frac{Z}{m_1 m_2} \left[ \frac{m_2^2}{x} \left( 1 - e^{-2x \frac{m_1 + m_2}{m_2}} \right) - \frac{m_1^2}{x} \left( 1 - e^{-2x \frac{m_1 + m_2}{m_1}} \right) + \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{2} e^{-2x \frac{m_1 + m_2}{m_1}} - \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{2} e^{-2x \frac{m_1 + m_2}{m_2}} \right]}. \quad (16)$$

Если считать, что главный вклад в этот интеграл вносят малые значения переменной интегрирования, то можно упростить (16)

$$\Phi_0 = \frac{2\pi Z \frac{e^2 a^2}{\epsilon_0} (m_2 - m_1)}{1 + \frac{3}{2} Z \frac{(m_2^2 - m_1^2)}{m_1 m_2}}. \quad (17)$$

Для низких температур параметр  $ra/\hbar$  достаточно мал, так что в (4) остается только первое слагаемое [3]. Согласно (17), при этом выражение (4) должно быть уменьшено в  $\left[ 1 + \frac{3}{2} Z \frac{(m_2^2 - m_1^2)}{m_1 m_2} \right]^2$  раз, что снижает эффективность экситон-примесного рассеяния.

Я благодарю Ю. М. Гальперина, В. И. Козуба, И. Г. Ланг за полезные обсуждения.

#### Л и т е р а т у р а

- [1] *Зиновьев Н. Н., Иванов Л. П., Ланг И. Г.* и др. ЖЭТФ, 1983, т. 84, № 6, с. 2153—2167.
- [2] *Проказников А. В., Ланг И. Г., Павлов С. Т.* ФТТ, 1983, т. 25, № 8, с. 2354—2359.
- [3] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 750 с.
- [4] *Друкарев Г. Ф.* Столкновение электронов с атомами и молекулами. М.: Наука, 1978. 255 с.
- [5] *Смирнов Б. М.* Физика слабоионизованного газа. М.: Наука, 1972. 416 с.
- [6] *Лейбфрид Г., Бройер Н.* Точечные дефекты в металлах. М.: Мир, 1981. 439 с.

Физико-технический институт  
им. А. Ф. Иоффе АН СССР  
Ленинград

Поступило в Редакцию  
18 апреля 1988 г.  
В окончательной редакции  
26 мая 1988 г.

---