

УДК 539.21

КУЛОНОВСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ТОНКОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ КЛИНЕ

Е. А. Андрушин, А. П. Силин

Рассмотрена полупроводниковая квантовая яма в форме клина. Получено кулоновское взаимодействие носителей тока с учетом поляризации на ее границах при сильном различии диэлектрических проницаемостей полупроводника и окружающей диэлектрической матрицы.

В последнее время в полупроводниковой электронике применяются композиционные материалы со все более сложной структурой. Достижения технологии полупроводников (см., например, [1]) позволили выращивать полупроводниковые гетероструктуры различной размерности: двумерные (двойные гетеропереходы (квантовые ямы), сверхрешетки [2, 3]), одномерные (квантовые нити или проволоки [4-7]), нуль-мерные (квантовые диски или точки [8, 9]). Свойства этих гетероструктур сильно отличаются от свойств однородных полупроводников. В частности, они обладают уникальными оптическими и транспортными свойствами [1-3], которые определяются размерным квантованием и кулоновским взаимодействием носителей тока.

В настоящей работе мы рассмотрим гетероструктуры, в состав которых входят материалы с сильно различающимися диэлектрическими проницаемостями. Кулоновское взаимодействие носителей тока в таких системах сильно отличается от кулоновского взаимодействия в объемных полупроводниках. Ранее рассматривалось такое взаимодействие в полупроводниковых пленках, окруженных диэлектриком (см., например, [10] и указанную там литературу), и в полупроводниковых нитях в диэлектрической матрице [11] и в сверхрешетках, у которых диэлектрические проницаемости слоев сильно отличаются [12]. Ниже мы рассмотрим полупроводниковый клин, бесконечный вдоль оси z . Сечение клина в плоскости (x, y) изображено на рисунке. Угол при вершине клина обозначим $\alpha = \pi/N$, где N — целое (предположение о том, что N — целое, необходимо для применения метода изображений, но несущественно для конечного результата). Клин состоит из двух частей. Часть клина при его вершине с $\rho \leq R$, где ρ — полярный радиус, отсчитанный от вершины клина ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$), заполнена полупроводником I с диэлектрической проницаемостью ϵ , а часть с $\rho > R$ — полупроводником II с диэлектрической проницаемостью ϵ' . Составной клин окружен диэлектриком (вакуумом) с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 .

Мы предполагаем, что

$$\epsilon_1/\epsilon = \delta \gg 1, \quad (1)$$

а диэлектрические проницаемости полупроводников I и II отличаются слабо, $|\epsilon - \epsilon'|/\epsilon \ll 1$. Кроме того, будем считать, что минимум зоны проводимости и максимум валентной зоны полупроводника I (например, GaAs) находятся в энергетической щели полупроводника II (например, $Al_xGa_{1-x}As$) и диэлектрика, т. е. полупроводник I является квантовой

ямой для носителей тока. Мы будем также предполагать, что глубина квантовой ямы велика по сравнению со всеми рассматриваемыми энергиями.

Уровни размерного квантования электронов ($r=e$) и дырок ($r=h$) в такой системе определяются следующими соотношениями:

$$E_{nl}^{(r)} = \frac{\hbar^2}{2m_r R^2} j_{Nl, n}^2, \quad n, l = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где m_r — эффективная масса носителей тока, $j_{s, n}$ — n -й корень функции Бесселя с индексом « s »; n, l — радиальное и угловое квантовые числа.

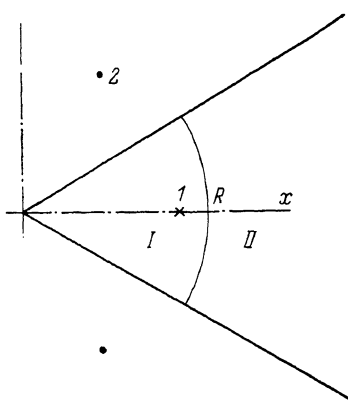
Волновая функция электронов и дырок в рассматриваемом клине имеет следующий вид:

$$\psi_{nlk_z}(r) = C_0 e^{ik_z z} J_{Nl}(kr) \sin\left(Nl\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad (3)$$

где C_0 — нормировочная постоянная, $k = (2m_r E_{nl}^{(r)}/\hbar^2 + k_z^2)^{1/2}$, $J_s(x)$ — функция Бесселя, φ — полярный угол в плоскости (x, y) .

Для полупроводников характерны большие значения диэлектрической проницаемости $\epsilon, \epsilon' \sim 10 \div 100$. Поэтому кулоновское взаимодействие

в них сильно ослаблено и водородоподобные состояния, такие, например, как экситоны Ванье—Мотта, имеют малые энергии связи E^* и макроскопически большие радиусы a^*



Поперечное сечение клина, составленного из полупроводников I и II с диэлектрическими проницаемостями ϵ, ϵ' соответственно.

1 — заряд, 2 — его изображения.

$$E^* = \frac{m^* e^4}{2\epsilon^2 \hbar^2} \lesssim 10^{-2} \text{ эВ}, \quad a^* = \frac{\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} \gtrsim 10^{-6} \text{ см}, \quad (4)$$

здесь m^* — приведенная эффективная масса электрона и дырки.

Как было показано для тонких полупроводниковых пленок [10] и нитей [11], окруженных диэлектриком, взаимодействие носителей тока возрастает при уменьшении толщины пленок или нитей. Аналогичный эффект возникает и в случае клина.

Методом изображений можно получить энергию взаимодействия зарядов e и e' , расположенных в точках клина с координатами (ρ_1, φ_1, z_1) и (ρ_2, φ_2, z_2) , $z = z_1 - z_2$, $\rho_1, \rho_2 < R$

$$V(\rho, z) = 2 \sum_{n=1}^N \tilde{V}(n-1) + \tilde{V}(N) - \tilde{V}(0), \quad (5)$$

где

$$\tilde{V}(x) = \frac{ee'}{\epsilon} \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^x \frac{1}{\sqrt{2\rho^2(1-\cos \pi x/N) + z^2}}. \quad (6)$$

Из соображений симметрии мы ограничились случаем $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Используя формулу суммирования Эйлера—Маклорена, можно переписать (5) в виде

$$V(\rho, z) = 2 \int_0^N dx \tilde{V}(x) + \theta, \quad (7)$$

где θ — поправочные члены (см. [13]), которые играют роль в пределе малых расстояний ($z \ll R N$), когда энергия взаимодействия имеет обычный «трехмерный» вид. В рассматриваемой далее области параметров

$$\delta \ll 1, N \gg 1 \quad (8)$$

можно при $z \gg \rho/N$ ограничиться первым членом в правой части формулы (7). В двух предельных случаях по параметрам (8) можно получить следующие асимптотические выражения для V .

Если, кроме соотношений (8), выполняется еще и условие

$$\delta N \ll 1, \quad (9)$$

то

$$V(\rho, z) = \frac{2\sqrt{2} ee' N}{\pi \epsilon \rho} \frac{1}{\sqrt{y+1}} K\left(\sqrt{\frac{2}{y+1}}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2ee' N}{\pi \epsilon \rho} \ln \frac{8\rho}{|z|}, & \frac{\rho}{N} \ll |z| \ll \rho, \\ \frac{2ee' N}{\epsilon |z|}, & |z| \gg \rho, \end{cases} \quad (10a)$$

$$(10b)$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $y = 1 + z^2/2\rho^2$.

В противоположном предельном случае

$$\delta N \gg 1 \quad (11)$$

получим

$$V(\rho, z) = \frac{ee' N}{\epsilon \rho} \left[H_0\left(\frac{2\delta N |z|}{\pi \rho}\right) - N_0\left(\frac{2\delta N |z|}{\pi \rho}\right) \right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{2ee' N}{\pi \epsilon \rho} \left(\ln \frac{\pi \rho}{\delta N |z|} - C \right), & \frac{\rho}{N} \ll |z| \ll \frac{\rho}{\delta N}, \\ \frac{ee'}{\epsilon_1 |z|}, & |z| \gg \frac{\rho}{\delta N}, \end{cases} \quad (12a)$$

$$(12b)$$

где $H_0(x)$, $N_0(x)$ — функции Струве и Неймана; $C = 0.577 \dots$ — постоянная Эйлера.

Следует заметить, что функциональный вид энергии взаимодействия на промежуточных расстояниях z (10a), (12a) $V(\rho, z) \sim (1/\rho) \ln(1/|z|)$ совпадает с энергией взаимодействия двух заряженных колец радиуса ρ , как бы колец изображений (см. рисунок). Такая аналогия является универсальной для различных гетероструктур: при взаимодействии зарядов в пленке мы получаем логарифмическую энергию взаимодействия «нитей» изображений [14] $V \sim \ln(1/\rho)$ (здесь ρ — расстояние между зарядами в пленке, ось z перпендикулярна плоскости пленки), а для зарядов в нити — линейную энергию взаимодействия «плоскостей» изображений [11] $V \sim |z|$ (здесь z — расстояние между зарядами вдоль оси нити). Следовательно, если мы рассмотрим полупроводниковый клин, со всех сторон окруженный диэлектриком, то в промежуточной области расстояний получим линейный по z вид энергии взаимодействия $V(\rho, z)$.

В случаях (10b) и (12b) одномерное кулоновское взаимодействие сохраняет свой функциональный вид (как и обычное «трехмерное» взаимодействие обратно пропорционально расстоянию), но наличие диэлектрика увеличивает энергию взаимодействия зарядов в $2N$ раз в случае (10b) (число изображений), а в случае (12b) — в $1/\delta$ раз. Этот последний случай соответствует взаимодействию только через диэлектрик с диэлектрической постоянной ϵ_1 , т. е. в пределе (11) клин как бы является бесконечно тонким.

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера для экситона

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dz^2} \psi(z) + V(\rho, z) \psi(z) = E \psi(z), \quad (13)$$

причем $e' = -e$, где e — заряд электрона. В случаях (10а), (12а), когда потенциальная энергия $V(\rho, z)$ имеет логарифмический вид, проведем замену переменных. Вводя единицы энергии и расстояния

$$a_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a^* \rho}{N} \right)^{1/2}, \quad E_x = \frac{2e^2 N}{\pi \epsilon \rho} = \frac{\hbar^2}{2m^* a_x^2}, \quad (14)$$

получим безразмерное уравнение

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \ln |x| \right) \psi(x) = \gamma \psi(x), \quad (15)$$

где $x = z/a_x$, а собственные значения $|\gamma| \sim 1$. Уровни энергии экситона E выражаются через собственные значения уравнения (15) γ следующим образом:

$$E = -E_x (\ln \rho/a_x - \gamma + A), \quad (16)$$

где $A = 3 \ln 2$ в случае (10а) и $A = \ln(\pi/\delta N) - C$ в случае (12а).

Уравнение (15) решалось вариационным методом. Наименьшее значение γ было получено с пробной функцией $\psi_0(x) = B/\text{ch } bx$ (B — нормировочная постоянная, b — вариационный параметр)

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} - C - \frac{1}{2} \ln \frac{24}{\pi^2} \approx -0.521. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь ограничения на значения параметров R , δ , N , а также координаты ρ .

В равновесном состоянии носители тока находятся на первом уровне размерного квантования, волновая функция (3) ψ_{11kz} имеет резкий максимум при $\varphi = 0$, $\rho = (1 - 1.05 N^{-2/3}) R$ (при $N \gg 1$) и носители тока будут сосредоточены в основном в толстой части клина при $\rho \simeq R$. Положив в дальнейших оценках $\rho = R$, получим, что для применимости формулы (10а) должны выполняться следующие условия:

$$a_x \ll R, \quad \Delta E_{\text{кв}} \gg E_x \ln(R/a_x), \quad (18), (19)$$

где $\Delta E_{\text{кв}}$ — расстояние между двумя первыми уровнями размерного квантования

$$\Delta E_{\text{кв}} \simeq 2.78 (\hbar^2 N^{1/3} / 2m^* R^2) \quad (20)$$

или

$$a^*/N \ll R \ll a^* N^{1/3} / \ln(RN/a^*). \quad (21)$$

В случае (12а) это условие принимает вид

$$\delta^2 N a^* \ll R \ll a^* N^{1/3} / \ln(R/\delta^2 N a^*). \quad (22)$$

Таким образом, при любых значениях параметров клина δ и N можно указать размеры клина R , при которых энергия взаимодействия носителей тока имеет логарифмический вид. При этом значительно возрастает энергия связи экситона и уменьшается его эффективный радиус, что приводит к возрастанию вклада свободных экситонов в комплексную диэлектрическую проницаемость системы и, следовательно, в коэффициенты отражения и поглощения света (эти вопросы подробно рассмотрены в работах [14, 15]). При уменьшении размера клина R и нарушении левых частей неравенств (21), (22) необходимо уже пользоваться выражениями (10б), (12б) для энергии взаимодействия $V(\rho, z)$. Тогда в соответствии с [16] можно получить с логарифмической точностью следующие предельные выражения для энергии экситона; при $\delta N \ll 1$

$$E = -16N^2 E^* [\ln(a^*/\rho N)]^2, \quad \rho \simeq R \ll a^*/N, \quad (23)$$

а при $\delta N > 1$

$$E = -\frac{4}{\delta^2} E^* \left[\ln \frac{a^* \delta^2 N}{\rho} \right]^2, \quad \rho \approx R \ll a^* \delta^2 N. \quad (24)$$

Следует заметить, однако, что условия применимости (23), (24) достаточно жесткие, вряд ли можно реализовать макроскопический клин с такими размерами.

При сравнении рассчитанной выше энергии связи экситона с экспериментальными значениями необходимо также учитывать энергию взаимодействия находящегося в клине заряда с наведенным на границах клина зарядом (эффект самодействия) [17]. Самодействие, как и размерное квантование, дает вклад в перенормировку энергетической щели полупроводника. Этот вклад имеет тот же порядок, что и энергия связи экситона, он существенно меньше энергии размерного квантования.

Энергия самодействия (взаимодействие с собственными изображениями) носителя тока с координатами $\varphi=0$, ρ есть

$$W(\rho) = \frac{e^2}{\rho \varepsilon} \left[\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^k \frac{1}{\sin \pi k/2N} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\delta}{1+\delta} \right)^N \right]. \quad (25)$$

В предельных случаях (9) и (11) с логарифмической точностью можно получить, что

$$W(\rho) = E_x \begin{cases} \ln N, & \delta N \ll 1, \\ \ln(1/\delta), & \delta N \gg 1. \end{cases} \quad (26a)$$

$$(26b)$$

При перетекании носителей тока в квантовую яму время установления поляризации на ее границах является самым малым среди всех характерных времен происходящих при этом процессов, поэтому энергия $W(\rho)$ фактически модифицирует вид квантовой ямы. Таким образом, учет поляризации видоизменяет формулы (2), (3), характеризующие размерное квантование. Если мы по-прежнему пренебрежем зависимостью потенциала самодействия $W(\rho)$ от угла φ , то для получения новых уровней энергии и волновых функций необходимо решить радиальное уравнение Шредингера в цилиндрических координатах

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho \frac{d\psi}{d\rho} \right) + \left(U(\rho) + \frac{(lN)^2}{\rho^2} \right) \psi = E\psi, \quad (27)$$

где потенциал $U(\rho)$ есть

$$U(\rho) = \begin{cases} W(\rho) = \kappa_i \rho, & \rho \leq R, \\ \infty, & \rho > R. \end{cases} \quad (28)$$

Уравнение (27) есть частный случай гипергеометрического уравнения, однако записать его собственные значения в явной форме не удастся. Мы оценили поправку к основному уровню энергии (2) при $N \gg 1$. Расчеты в первом порядке теории возмущения по $W(\rho)$ и вариационным методом с пробной функцией $\psi_{11}(\rho) = \rho^N (R^2 - \rho^2) (R^2 - b\rho^2)$, где b — вариационный параметр, дают одинаковый результат

$$\Delta E_{11} = \frac{\kappa}{R} = \frac{2e^2 N}{\pi \varepsilon R} \begin{cases} \ln N, & \delta N \ll 1, \\ \ln(1/\delta), & \delta N \gg 1. \end{cases} \quad (29)$$

Условие применимости теории возмущений (малость поправки ΔE_{11} по сравнению с $\Delta E_{\text{кв}}$) дает неравенства, почти совпадающие с правыми неравенствами (21), (22)

$$R \ll a^* N^{1/2} / \ln N, \quad \delta N \ll 1, \quad (30a)$$

$$R \ll a^* N^{1/2} / \ln(1/\delta), \quad \delta N \gg 1. \quad (30b)$$

Таким образом, в условиях применимости логарифмического приближения для энергии взаимодействия поправка к уровням размерного квантования мала. Следует заметить, что можно реализовать и другой пре-

дельный случай — когда энергия самодействия χ/ρ велика по сравнению с расстояниями между уровнями размерного квантования (2) или случай больших размеров клина R . Для обычно применяемых полупроводниковых материалов и достаточно малых углов клина α в этом случае R должно составлять несколько сотен ангстрем, а $\Delta E_{\text{кв}}$ порядка десятков мэВ.

Квантовая яма в форме клина характеризуется тремя параметрами δ , N , R и как бы сочетает в себе свойства пленки толщиной αR и нити диаметром αR . Носители тока сосредоточиваются в широкой части клина, поэтому несовершенство вершины клина не должно оказывать существенного влияния. Эффективный размер клина R должен быть порядка радиуса экситона a^* . Применение рассмотренной клиновидной структуры или пленки переменной толщины может оказаться полезным при использовании перетекания неравновесных носителей.

Л и т е р а т у р а

- [1] *Esaki L.* In: Heterojunctions and semiconductor superlattices / Ed. G. Allan, G. Bastard, N. Voccara, M. Lannoo, M. Voos. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1986, p. 12—21; *Андрюшин Е. А., Быков А. А.* УФН, 1988, т. 154, № 1, с. 123—132.
- [2] *Ploog K., Döhler G. H.* Adv. Phys., 1983, vol. 32, N 3, p. 285—359.
- [3] *Силин А. П.* УФН, 1985, т. 147, № 3, с. 485—521.
- [4] *Богомолов В. Н.* УФН, 1978, т. 124, № 1, с. 171—182.
- [5] *Petroff P. M., Gossard A. C., Logan R. A., Wiegmann W.* Appl. Phys. Lett., 1982, vol. 41, N 7, p. 635—638.
- [6] *Webb R. A., Hurslein A., Wainer J. J., Fowler A. B.* Phys. Rev. Lett., 1985, vol. 54, N 14, p. 1577—1580.
- [7] *Scocpol W. J., Jackel L. D., Howard R. E.* et al. Surf. Sci., 1986, vol. 170, N 1, p. 1—13.
- [8] *Scherer A., Craighead H. G.* Appl. Phys. Lett., 1986, vol. 49, N 19, p. 1284—1286.
- [9] *Вындышев Ю. В., Днепровский В. С., Екимов А. И.* и др. Письма в ЖЭТФ, 1987, т. 46, № 10, с. 393—396.
- [10] *Андрюшин Е. А., Келдыш Л. В., Санина В. А., Силин А. П.* ЖЭТФ, 1980, т. 79, № 4, с. 1509—1517.
- [11] *Бабиченко В. С., Келдыш Л. В., Силин А. П.* ФТТ, 1980, т. 22, № 4, с. 1238—1240.
- [12] *Pokatilov E. P., Beril S. I., Fomin V. M., Pogorilko G. A.,* Phys. St. Sol. (b), 1985, vol. 130, p. 619—628; *Guseinov R. R.* Phys. St. Sol. (b), 1985, vol. 127, p. K133—136.
- [13] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1970, с. 134.
- [14] *Келдыш Л. В.* Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, № 6, с. 716—718.
- [15] *Keldysh L. V.* Proc. III Intern. Conf. on the Physics of Heterostructures and Superlattices. Chicago, 1988 (in press).
- [16] *Hasegawa H., Howard R. E.* J. Phys. Chem. Solids, 1961, vol. 21, N 3/4, p. 179—198.
- [17] *Fomin V. M., Pokatilov E. P.* Phys. St. Sol. (b), 1986, vol. 136, p. 187—199, 593—602.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
13 мая 1988 г.