1988 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 30, в. 6
1988 SOLID STATE PHYSICS Vol. 30, № 6

УДК 538.945

О ВОЗМОЖНОСТИ ПАРНОЙ КОНДЕНСАЦИИ В МОДЕЛИ ХАББАРДА

Р. О. Зайцев

Изучается нефононный механизм сверхпроводимости в модели Хаббарда с бесконечным отталкиванием. Установлены основные микроскопические уравнения с учетом рассеяния на флуктуациях локализованного спина. Получены уравнения типа Лондона для сверхпроводника в слабом магнитном поле. Для температур вблизи точки перехода в нормальное состояние произведен микроскопический расчет коэффициентов уравнения Гинзбурга—Ландау.

Открытие высокотемпературной сверхпроводимости [1, 2] без какого-либо существенного изотопического эффекта [3, 4] указывает на существование нефононных механизмов сверхпроводимости. В данной работе изучается сверхпроводимость электронов, имеющих предельно сильное отталкивание ($U \to \infty$) в одной и той же элементарной ячейке и конечный интеграл перескока (t) в соседнюю ячейку — так называемая модель Хаббарда [5]. При заданном химическом потенциале (μ) соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{r},\sigma} [\hat{n}_{\mathbf{r},\sigma}\hat{n}_{\mathbf{r},-\sigma} - \mu \hat{n}_{\mathbf{r},\sigma}] + {\sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}',\sigma}}' t(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\hat{a}^{+}_{\mathbf{r},\sigma}\hat{a}_{\mathbf{r}'\sigma}, \tag{1}$$

$$\hat{n}_{\mathbf{r}\sigma} = \hat{a}^{+}_{\mathbf{r}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{r}\sigma}.$$

Машинные исследования [6] в частном случае 1/4 заполненной зоны ($n=1/2$) указывают на существование максимума двучастичной корреляционной функции при некотором конечном значении отношения t/U. В диэлектрической фазе при $t/U < b_c$ этому факту соответствует низкотемпературный переход в антиферромагнитное состояние. Оставляя в стороне проверку этой гипотезы для случая точно наполовину заполненной зоны [7], в настоящей работе рассмотрим сверхпроводимость в недозаполненной зоне ($n < 1$), когда система всегда является металлом, и при $U=\infty$, так что нет вопроса о возможности возникновения антиферромагнетизма. В [8] было показано, что при сделанных предположениях температура перехода в сверхпроводящее состояние пропорциональна интегралу перескока и имеет максимум как функция степени недозаполнения $x=1-n$. Таким образом, удается качественно правильно объяснить не только отсутствие изотопического эффекта, но также сильную зависимость температуры перехода как от давления, так и от параметра x.[1]

В разделе 1 настоящей работы выводятся уравнения сверхпроводимости и уточняются результаты [8] с учетом рассеяния возбуждений на статических флуктуациях спиновой и зарядовой плотности. Во втором разделе проведен микроскопический вывод уравнений магнетостатики

---

[1] Вывод уравнений сверхпроводимости [9], основанный на эффективном гамильтониане Бете—Хюльтена, в пределе $U=\infty$ дает $T_c=0$ и приводит для $n < 0.6$ к конечной температуре перехода, что противоречит экспериментальным данным на $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ [10].

для сверхпроводника в слабом магнитном поле. В третьем разряде определены коэффициенты разложения Гинзбурга—Ландау, а также релаксационный коэффициент в нестационарном уравнении для параметра порядка. В Приложении дается краткое количественное описание термодинамических и кинетических свойств, относящихся к нормальной фазе.

1. Общие соотношения

В пределе $U=\infty$, когда нет необходимости учитывать переходы в состояния двоечного типа, операторы рождения и уничтожения элементарным образом выражаются через X-операторы

$$\hat{a}^{+}_{\mathbf{r},\sigma}=X^{\sigma,0}_{\mathbf{r}},\quad \hat{a}_{\mathbf{r},\sigma}=X^{0,\sigma}_{\mathbf{r}}, \tag{2}$$

которые образуют специальную линейную градуированную супералгебру Spl (1, 2) со следующими перестановочными соотношениями (подробнее см. [11])

$$\left.\begin{aligned} &\{X^{0,0}_{\mathbf{r}},\ X^{\bar\sigma,0}_{\mathbf{r}}\}=X^{\bar\sigma,\sigma}_{\mathbf{r}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'},\quad \bar\sigma=-\sigma,\\ &\{X^{0,\sigma}_{\mathbf{r}},\ X^{\sigma,0}_{\mathbf{r}'}\}=\left(X^{00}_{\mathbf{r}}+X^{\sigma,\sigma}_{\mathbf{r}}\right)\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'},\\ &[X^{0,\sigma}_{\mathbf{r}}\{X^{\sigma,0}_{\mathbf{r}'},\ X^{\sigma,0}_{\mathbf{r}'}\}]=0,\quad [X^{0,\sigma}_{\mathbf{r}}\{X^{0,\bar\sigma}_{\mathbf{r}'},\ X^{\bar\sigma,0}_{\mathbf{r}'}\}]=-X^{0,\sigma}_{\mathbf{r}}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Определим обычным образом одночастичные функции Грина

$$D_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}(t,\ t')=-\begin{Vmatrix} \left\langle \hat{T}\left(X^{0+}_{\mathbf{r}}(t)\,X^{+0}_{\mathbf{r}'}(t')\right)\right\rangle, & \left\langle \hat{T}\left(X^{0+}_{\mathbf{r}}(t)\,X^{0-}_{\mathbf{r}'}(t')\right)\right\rangle\\ \left\langle \hat{T}\left(X^{-0}_{\mathbf{r}}(t)\,X^{+0}_{\mathbf{r}'}(t')\right)\right\rangle, & \left\langle \hat{T}\left(X^{-0}_{\mathbf{r}}(t)\,X^{0-}_{\mathbf{r}'}(t')\right)\right\rangle \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

так что в импульсном представлении им соответствует обратная виртуальная функция Грина

$$G^{-1}_{\omega}(\mathbf{p})=\begin{array}{c} \\ (0,\ +)\\ (-,\ 0)\end{array}\left\|\begin{array}{cc} (0,\ +) & (-,\ 0)\\ i\omega-f(0,\ +)\,t_{\mathbf{p}}+\mu-\sigma^{(+)}_{\omega}t_{\mathbf{p}}, & -\tilde\Delta^{(+)}_{\omega}(\mathbf{p}),\\ -\tilde\Delta^{(-)}_{\omega}(\mathbf{p}), & i\omega+f(-,\ 0)\,t_{\mathbf{p}}-\mu-\sigma^{(-)}_{\omega}t_{\mathbf{p}} \end{array}\right\|. \tag{5}$$

Здесь наряду с нормальными собственно-энергетическими частями $\sigma^{(k)}_{\omega}$ выписаны также и аномальные $\tilde\Delta^{(k)}_{\omega}(\mathbf{p})$, как и в обычной теории сверхпроводимости [12],

$$f(0,\ \sigma)=f(\sigma,\ 0)=\left\langle X^{00}_{\mathbf{r}}+X^{\sigma\sigma}_{\mathbf{r}}\right\rangle,\quad \omega=(2n+1)\,\pi T.$$

Выразим собственно-энергетические части через точную одночастичную функцию Грина (5), используя для этой цели однопетлевое приближение (см. рисунок). Волнистой линией изображен множитель $t_p=\sum_{\mathbf{r}}{}' t(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}$; корреляторы, обведенные овалом, изображают продольные и поперечные флуктуации спинов

$$\left.\begin{aligned} K_{\parallel}&=\left\langle\delta\{X^{0\sigma},\ X^{\sigma0}\}_1\,\delta\{X^{0\bar\sigma},\ X^{\bar\sigma0}\}_2,\right.\\ K_{\perp}&=\left\langle X^{+-}_1X^{-+}_2\right\rangle,\quad \delta\{X^{0\sigma},\ X^{\sigma0}\}_1=X^{00}_{\mathbf{r}_1}+X^{\sigma\sigma}_{\mathbf{r}_1}-\left\langle\left(X^{00}_{\mathbf{r}_1}+X^{\sigma\sigma}_{\mathbf{r}_1}\right)\right\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В аналитической форме

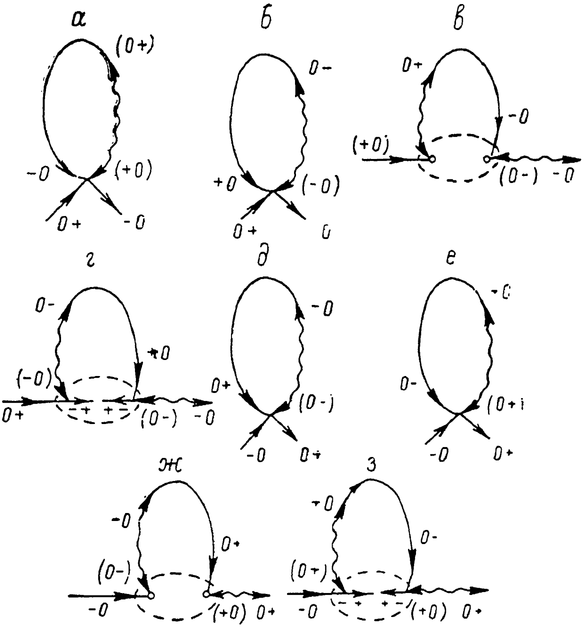
$$\left.\begin{aligned} \tilde\Delta^{(+)}_{\omega}(\mathbf{p})&=\Delta_1-\sum_{\mathbf{p}'}t_{\mathbf{p}'}G^{0+;\,-0}_{\omega}(\mathbf{p}')\,t_{\mathbf{p}}K_{\parallel}-\sum_{\mathbf{p}'}t_{\mathbf{p}'}G^{0-;\,+0}_{\omega}(\mathbf{p}')\,t_{\mathbf{p}}K_{\perp},\\ \tilde\Delta^{(-)}_{\omega}(\mathbf{p})&=\Delta_2-\sum_{\mathbf{p}'}t_{\mathbf{p}'}G^{-0;\,0+}_{\omega}(\mathbf{p}')\,t_{\mathbf{p}}K_{\parallel}-\sum_{\mathbf{p}'}t_{\mathbf{p}'}G^{+0;\,0-}_{\omega}(\mathbf{p}')\,t_{\mathbf{p}}K_{\perp}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1&=-T\sum_{\omega,\,\mathbf{p}}t_{\mathbf{p}}G^{0+;\,-0}_{\omega}(\mathbf{p})+T\sum_{\omega,\,\mathbf{p}}t_{\mathbf{p}}G^{0-;\,+0}_{\omega}(\mathbf{p}),\\ \Delta_2&=-T\sum_{\omega,\,p}t_{\mathbf{p}}G^{-0;\,0+}_{\omega}(\mathbf{p})+T\sum_{\omega,\,\mathbf{p}}t_{\mathbf{p}}G^{+0;\,0-}_{\omega}(\mathbf{p}). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Второе и третье слагаемые уравнений (7) не содержат суммирования по ω, что отвечает выделению статической части корреляторов $K_\perp$ и $K_\parallel$. В этом же предположении запишем уравнение для нормальной собственно-энергетической части

$$\sigma_\omega^{(\sigma)} = \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}} G_\omega^{0\sigma;\,0\sigma}(\mathbf{p}) K_\sigma + \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}} G_\omega^{0\bar\sigma;\,0\bar\sigma}(\mathbf{p}) K_\perp, \tag{9}$$

$$K_\sigma = \langle \delta \{X^{0\sigma},\ X^{\sigma 0}\}_1 \delta \{X^{0\sigma},\ X^{\sigma 0}\}_2 \rangle.$$



Аномальные собственно-энергетические части.

В отсутствие внешнего магнитного поля $\sigma_\omega^{(+)} = \sigma_\omega^{(-)} = \lambda_\omega$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, $\tilde\Delta_\omega^{(+)}(\mathbf{p}) = \tilde\Delta_\omega^{(-)}(\mathbf{p}) = \tilde\Delta_\omega(\mathbf{p})$, так что задача нахождения виртуальной функции Грина сводится к решению трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} \lambda_\omega &= K_1 \sum_p t_{\mathbf{p}} G_\omega^{11}(\mathbf{p}), \\ \Delta &= -2T \sum_{\omega,\,\mathbf{p}} \tilde\Delta_\omega(\mathbf{p})\, \Phi_\omega(\mathbf{p}), \\ \tilde\Delta_\omega(p) &= \Delta + K_2 \sum_{\mathbf{p}'} \tilde\Delta_\omega(\mathbf{p}')\, t_{\mathbf{p}'} \Phi_\omega(\mathbf{p}')\, t_{\mathbf{p}}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\Phi_\omega^{-1}\mathbf{p} = (i\omega - \lambda_\omega t_{\mathbf{p}})^2 - (f t_{\mathbf{p}} - \mu)^2 - \tilde\Delta_\omega^2(\mathbf{p}),$$

$$K_1 = K_\perp + K_\sigma,\quad K_2 = K_\perp - K_\parallel,\quad f(0+) = f(0-) = f = 1 - \frac{n}{2}.$$

Полная функция Грина (4) выражается через виртуальную (5) с помощью общего соотношения $\hat D = \hat G \hat K$, где $\hat K$ — матрица концевых множителей. В нашем приближении

$$\hat K_\omega = -\frac{\delta}{\delta t_{\mathbf{p}}} \hat G_\omega^{-1}(\mathbf{p}). \tag{11}$$

Вблизи точки перехода корреляторы $K_{1,2}$ выражаются через магнитную и диэлектрическую восприимчивости нормальной фазы (см. Приложение), а уравнения (10) допускают линеаризацию по Δ и $\tilde\Delta$.

Разделяя переменные, получим $\tilde{\Delta}_\omega(p) = \Delta_1 + \Delta_\omega t_p$, откуда

$$\left.\begin{aligned} \Delta_\omega &= -\Delta_1 K_2 S_\omega^{(1)}/[1 + K_2 S_\omega^{(2)}], \\ \Delta_1 &= 2T \sum_\omega [\Delta_1 S_\omega^{(1)} + \Delta_\omega S_\omega^{(2)}], \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$S_\omega^{(k)} = \sum_p t_p^k G_\omega^{(0)}(p)\, G_{-\omega}^{(0)}(-p),$$

$G_\omega^{(0)}(p)$ — функция Грина нормального металла, определяемая уравнением

$$\left.\begin{aligned} G_\omega^{(0)}(\mathbf{p}) &= (i\tilde{\omega} - ft_\mathbf{p} + \mu)^{-1}, \\ i\tilde{\omega} &= i\omega - K_1 \sum_\mathbf{p} t_\mathbf{p} G_\omega^{(0)}(\mathbf{p}). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Исключив из уравнений (12) Δ_ω, получим условие для нахождения температуры перехода T_c

$$1 = 2T \sum_\omega S_\omega^{(1)}/[1 + K_2 S_\omega^{(2)}]. \tag{14}$$

Для выделения слагаемых, имеющих особенность на Ферми-поверхности $\xi_p = ft_\mathbf{p} - \mu = 0$, прибавим и вычтем из (14) соответствующую сумму при $K_{1,2} = 0$. В результате разность будет сходиться на $|\omega| \sim T_c$; в оставшемся слагаемом произведем сначала суммирование по частоте, а затем проинтегрируем по $\xi_\mathbf{p}$ с помощью затравочной плотности состояний

$$\left.\begin{aligned} \rho_0(\varepsilon) &= \frac{1}{N} \sum_\mathbf{p} \delta(\varepsilon - t_\mathbf{p}), \\ g^{-1} &= \int_0^w \operatorname{th}\frac{\xi}{2T}\frac{d\xi}{\xi} + \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{K}_s}{2\pi T}\right), \quad \psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Здесь $g = \frac{2}{N}\sum_\mathbf{p} t_\mathbf{p}\delta(\xi_\mathbf{p})$ играет роль эффективной безразмерной константы взаимодействия, $\bar{K}_s = (K_1 + K_2)\pi g\mu/2f$ — среднее обратное время релаксации с переворотом спина.

Верхний предел интегрирования w имеет порядок ширины затравочной электронной зоны $w \sim \max t_\mathbf{p}$ и должен быть определен из машинных вычислений [13].

Если считать, что $\bar{K}_s$ есть линейная функция температуры (что следует из Приложения для частного случая прямоугольной плотности состояний), тогда роль спиновых флуктуаций сводится к перенормировке эффективной константы $g \to \tilde{g} = g\Big/\left\{1 + g\left[\psi\left(\frac{1}{2} + \varphi\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$, где

$$\varphi = \bar{K}_s/2\pi T_c, \quad T_c = \frac{2\gamma}{\pi} w \exp(-1/\tilde{g}). \tag{16}$$

Соотношение (16) сохраняет основные результаты, полученные ранее [8], поскольку учет рассеяния на флуктуациях спина перенормирует, но не обращает в нуль температуру сверхпроводящего перехода. Область существования сверхпроводящего спаривания определяется условием $g > 0$, что отвечает максимальному значению $x_0 = 1 - n_0$, для которого $\mu = 0$.

В предельном случае $T \ll T_c$ естественно предположить, что корреляторы $K_{1,2}$ малы, поэтому щель в спектре совпадает со значением Δ_0, которое находим из уравнения (8) (при $T = 0$),

$$\Delta_0 = \sum_p t_\mathbf{p}(\xi_\mathbf{p}^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} = g\int_0^w \frac{d\xi}{(\xi^2 + \Delta_0^2)^{1/2}}. \tag{17}$$

Сравнение с (16) позволяет получить соотношение, измеряемое на эксперименте

$$\frac{2\Delta_0}{T_c}=\frac{2\pi}{\gamma}\exp\left[\psi\left(\frac{1}{2}+\varphi_c\right)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \tag{18}$$

При $\varphi_c=\bar{K}_s/2\pi T_c$ это отношение всегда больше $2\pi/\gamma\simeq 3.53\ldots$. С повышением температуры, когда возрастает интенсивность спиновых флуктуаций, величина щели убывает быстрее, чем Δ. Условие обращения щели в нуль находим, как и в теории сверхпроводников с парамагнитными примесями [14]

$$\Delta=\bar{K}_s=(K_1+K_2)\,\pi g\mu'2f, \tag{19}$$

это уравнение всегда имеет решение, так как коррелятор K_1+K_2 возрастает, а параметр Δ убывает с повышением температуры, так что в окрестности точки перехода всегда существует бесщелевая сверхпроводимость.

2. Сверхпроводник в слабом магнитном поле

Для вычисления плотности тока в линейном приближении по векторному потенциалу **A** достаточно определить сумму трех слагаемых

$$j_\alpha=\sum_{k=1}^{3}Q_{\alpha\beta}^{(k)}A_\beta, \tag{20}$$

$$Q_{\alpha\beta}^{(1)}=\frac{2T}{V}\sum_{\omega,\,\mathbf{p}}\frac{\partial^2 t}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}D_\omega^{11}(\mathbf{p}), \tag{21}$$

$$Q_{\alpha\beta}^{(2)}=\frac{2T}{V}\sum_{\omega,\,\mathbf{p}}\frac{\partial t}{\partial p_\alpha}\frac{\partial t}{\partial p_\beta}[D_\omega^{11}(\mathbf{p})]^2, \tag{22}$$

$$Q_{\alpha\beta}^{(3)}=\frac{2T}{V}\sum_{\omega,\,\mathbf{p}}\frac{\partial t}{\partial p_\alpha}\frac{\partial t}{\partial p_\beta}[D_\omega^{12}(\mathbf{p})]^2. \tag{23}$$

Первое и второе слагаемые обобщают обычное выражение для тока на случай произвольной анизотропии. Третье слагаемое определяет дополнительный вклад в сверхпроводящий ток за счет аномальной функции Грина. Используя связь (11) между полной и виртуальной функциями Грина, преобразуем сумму (21) к тому же виду, что и (22), (23). В результате интегрирования по частям происходит полное сокращение нормальной и квадратичной по $\tilde{\Delta}^2$, Δ^2 и $\tilde{\Delta}\Delta$ частей.

Окончательно

$$Q_{\alpha\beta}=-\frac{4Te^2}{V}\sum_{\omega,\,\mathbf{p}}\frac{\partial t}{\partial p_\alpha}\frac{\partial t}{\partial p_\beta}\left(G'_{11}G_{12}^{-1}-G_{11}^{-1}G'_{12}\right)\left(G'_{22}G_{21}^{-1}-G_{22}^{-1}G'_{21}\right)\Phi_\omega^2(\mathbf{p}). \tag{24}$$

Здесь $G'_{ik}=\frac{\delta}{\delta t_{\mathbf{p}}}(G_{ik}^{-1})$, функция $\Phi_\omega(\mathbf{p})$ определена в (10). В выражении (24) суммы по частотам быстро сходятся, так что имеет смысл сразу проинтегрировать вблизи поверхности Ферми. Величины $i\tilde{\omega}=i\omega-\lambda_\omega t_{\mathbf{p}}$ и $\tilde{\Delta}_\omega$ вычисляем при $t_{\mathbf{p}}=\mu/f$, после чего остается просуммировать по

$$Q_{\alpha\beta}=2\pi e^2\rho_{\alpha\beta}T\sum_{\omega}\frac{\tilde{\Delta}^2+\mu^{-2}(\tilde{\omega}\Delta-\tilde{\Delta}\omega)^2}{(\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}^2)^{3/2}}, \tag{25}$$

$$\rho_{\alpha\beta}=\frac{f}{V}\sum_{\mathbf{p}}\delta(\varepsilon-t_{\mathbf{p}})\frac{\partial t}{\partial p_\alpha}\frac{\partial t}{\partial p_\beta},\quad \varepsilon=\mu/f, \tag{26}$$

а уравнения для $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\Delta}$ совпадают с уравнениями для сверхпроводника с парамагнитными примесями [14]

$$\left.\begin{aligned} i\tilde{\omega} &= i\omega + \bar{K}_1 i\tilde{\omega}\,(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2)^{-1/2}, \\ \tilde{\Delta} &= \Delta - \bar{K}_2\tilde{\Delta}\,(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2)^{-1/2}, \\ \bar{K}_{1,\,2} &= K_{1,\,2}\pi g\mu/2f. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

В предельном случае $T \ll T_c$, когда $K_{1,2} \to 0$, $\tilde{\Delta} = \Delta$, $\tilde{\omega} = \omega$, получаем известное соотношение Лондона

$$Q_{\alpha\beta} = 2\pi e^2 \rho_{\alpha\beta} = 4\pi e^2 \mu \bar{\rho}/3m_{\alpha\beta}. \tag{28}$$

Вблизи точки перехода уравнения (27) разлагаем по степеням $\tilde{\Delta}/\tilde{\omega}$, после чего

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{4\Delta^2 e^2 C}{m_{\alpha\beta}} = \frac{6e^2\Delta^2 C \sum\limits_{p} \dfrac{\partial\xi}{\partial p_\alpha}\dfrac{\partial\xi}{\partial p_\beta}\,\delta(\xi_{\mathbf{p}})}{\mu \sum\limits_{\mathbf{p}} \delta(\xi_{\mathbf{p}})}, \tag{29}$$

$$C = T\sum_{\omega} \pi\mu\bar{\rho}/3\,(|\omega| + \bar{K}_1)\,(|\omega| + \bar{K}_s)^2,$$

$\bar{\rho}$ — электронная плотность состояний на уровне Ферми, $\bar{\rho} = \dfrac{1}{V}\sum\limits_{\mathbf{p}} \delta(\xi_{\mathbf{p}})$.

3. Уравнения Гинзбурга—Ландау

Для получения уравнений сверхпроводимости в сильном магнитном поле запишем все соотношения при заданном значении суммарного импульса электронной пары $\mathbf{s}$, а затем, используя принцип градиентной инвариантности, произведем замену $\mathbf{s} \to \hat{\mathbf{s}} - \dfrac{2e}{c}\mathbf{A}$. В нашей модели зависимость от суммарного импульса входит не только через электронную функцию Грина, но также и через амплитуду рассеяния $t_{\mathbf{p}}$ [8]. Так, линеаризованное по Δ уравнение имеет тот же вид (14), но с функционалом $S_\omega^{(k)}$, зависящим от $\mathbf{s}$

$$\left.\begin{aligned} S_\omega^{(1)}(\mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{p}} t_p\left[G_\omega^{(0)}(\mathbf{p})\,G_{-\omega}^{(0)}(-\mathbf{p}+\mathbf{s}) + G_\omega^{(0)}(\mathbf{p}+\mathbf{s})\,G_{-\omega}^{(0)}(-\mathbf{p})\right], \\ S_\omega^{(2)}(\mathbf{s}) &= \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{s}}{2}}\,t_{-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{s}}{2}}\,G_\omega^{(0)}\left(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{s}}{2}\right)G_{-\omega}^{(0)}\left(-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{s}}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Поскольку электронная функция Грина $G_\omega^{(0)}(\mathbf{p})$, определяемая из (13), имеет полюсную особенность, при разложении по степеням $\mathbf{s}$ нет необходимости учитывать производные от амплитуды рассеяния. Учет таких слагаемых приводит к поправкам порядка T_c/w, где w — полуширина затравочной электронной зоны.

В нулевом приближении по $\mathbf{s}$ снова получим соотношение (15). Градиентный член удобно записать, вводя в рассмотрение функцию, определяемую, согласно (26). В результате получим линеаризованную часть уравнений Горькова [15]

$$\left\{1 - \sum_{\mathbf{p}} t_{\mathbf{p}}\xi_{\mathbf{p}}^{-1}\,\mathrm{th}\,(\xi_{\mathbf{p}}/2T) + g\left[\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{K}_s}{2\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + T\sum_{\omega} \frac{\pi\mu s_\alpha s_\beta \rho_{\alpha\beta} v_0}{2f\,(|\omega| + \bar{K}_1)\,(|\omega| + \bar{K}_s)^2}\right\}\Delta^* = 0. \tag{31}$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{m_{\alpha\beta}} = 3\sum_{\mathbf{p}} \frac{\partial\xi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\xi}{\partial p_\beta}\,\delta(\xi_p)/2\mu\sum_{p}\delta(\xi_p), \quad |\psi|^2 = C\,|\Delta|^2, \tag{32}$$

где $m_{\alpha\beta}^{-1}$ — обратный тензор электронной массы, вычисленный на уровне Ферми, функция C определена в (29); $|\psi|^2$ имеет смысл плотности сверхпроводящих электронов, так как плотность сверхпроводящего тока (29) через обозначения (32) записывается в естественном виде

$$j_\alpha = -2e^2 |\psi|^2 A_\beta / m_{\alpha\beta}. \tag{33}$$

Вводя в уравнение (31) тензор эффективной массы (32) и разлагая три первых слагаемых по степеням близости к точке перехода $(T_c - T) \ll T_c$, получаем линеаризованную часть уравнений Гинзбурга—Ландау [16]

$$\frac{s_\alpha s_\beta}{2m_{\alpha\beta}} \psi^* + a\psi^* = 0, \tag{34}$$

$$a = \frac{T - T_c}{T_c \eta} \left[1 + \frac{\partial (\bar{K}_s / T_c)}{2\pi \partial (\ln T_c)} \psi' \left(\frac{\bar{K}_s}{2\pi T_c} + \frac{1}{2} \right) \right],$$

$$\eta = T \sum_\omega \frac{\pi\mu}{3(|\omega| + \bar{K}_1)(|\omega| + \bar{K}_s)^2}. \tag{35}$$

Нелинейное слагаемое в уравнениях Гинзбурга—Ландау получаем разложением уравнений (10) и (27) по степеням $\tilde{\Delta}/\tilde{\omega}$ и Δ/T_c

$$\hat{L}\Delta = gT \sum_\omega \frac{\pi |\Delta|^2 \Delta |\omega|}{2(|\omega| + \bar{K}_s)^4}.$$

Здесь $\hat{L}$ — линейный оператор (15) или (34), $g = 2\mu v_0 \bar{\rho}/f$ — эффективная константа, входящая в определение температуры перехода (16). Отсюда определяем второй коэффициент $b = -a/C|\Delta|^2$.

$$b = \frac{\pi T}{2\eta C} \sum_\omega \frac{|\omega|}{(|\omega| + \bar{K}_s)^4}. \tag{36}$$

Как уже отмечалось, величина $\bar{K}_s$ имеет смысл обратного времени релаксации с переворотом спина, которая исчезает только в пределе $T \ll T_c$. Как показано в Приложении, при $T \ll w$, $\bar{K}_s$ зависит от температуры в основном по линейному закону. Таким образом, развитая теория совпадает с теорией сверхпроводников с парамагнитными примесями, но с зависящими от температуры временами релаксации с переворотом и без переворота спина. Используя это соображение, удается получить нестационарные уравнения типа Горькова—Элиашберга [17]. Для достижения этой цели достаточно считать величину Δ медленно меняющейся во времени (с частотами $\Omega \ll \{T_c, \bar{K}_s\}$. Произведя линеаризацию уравнений самосогласования и разлагая их по малому параметру Ω/T_c, находим уравнение для ψ

$$\left.\begin{aligned} &R\partial\psi^* + a\psi^* + \frac{s_\alpha s_\beta}{2m_{\alpha\beta}} \psi^* + b|\psi|^2 \psi^* = 0, \\ &R = \frac{\pi T}{2\eta} \sum_\omega \frac{\hbar}{(|\omega| + \bar{K}_s)^2}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2ie}{\hbar}\varphi, \quad s_\alpha = i\hbar\nabla_\alpha - \frac{2e}{c} A_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

В бесщелевой области полный ток состоит из двух частей, одна из них сверхпроводящая (25), другая имеет «неравновесное» происхождение и пропорциональна току проводимости нормальной фазы.

В Приложении показано, что проводимость нормальной фазы обратно пропорциональна коррелятору K_1, который при $T \ll w$ пропорционален температуре. Ясно, однако, что, поскольку эта зависимость имеет чисто корреляционное электрон-электронное происхождение, вопрос о температурной зависимости как проводимости, так и спиновой релаксации требует специального рассмотрения даже вблизи точки перехода в сверхпроводящее состояние. Коэффициенты (29), (35) и (36) выражаются через обратные времена релаксации по импульсу $\bar{K}_1$ и спину $\bar{K}_s$. Первая из этих величин выражается через проводимость. В Приложении показано, что вблизи T_c отношение $\bar{K}_1/\bar{K}_s$ выражается через магнитную проницаемость и статическую диэлектрическую функцию нормального металла.

Можно заметить, что все коэффициенты теории Гинзбурга—Ландау (37) зависят от механизма сверхпроводящего спаривания только неявно, — через T_c; остальные коэффициенты выражаются через параметры, относящиеся к нормальной фазе. Аналогичная ситуация сохраняется и при большой, но конечной энергии Хаббарда. Как показано в [8], при этом возникает двухкомпонентный параметр порядка. Однако вблизи точки перехода обе компоненты пропорциональны одной и той же скалярной величине и можно показать, что все физические свойства определяет единственная комбинация, которая по-прежнему удовлетворяет уравнению (37). При этом, согласно [8],

$$g = 8U\mu(U-\mu)\rho_0(\varepsilon)/[U(1+x)-2\mu]^2. \tag{38}$$

Параметр ε определяем из условия $\xi^{\pm}(t_p=\varepsilon)=0$ соответственно для верхней и нижней подзоны Хаббарда (П, 1). Остальные коэффициенты могут быть получены из общих соотношений (29), (32), (37), (П, 13), которые вместе с (38) и (П, 1) и определением химпотенциала (П, 3) полностью решают поставленную задачу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНОЙ ФАЗЫ

Магнитное поле H расщепляет каждую хаббардовскую подзону на две, в которых размещаются n_+ и n_- электронов со спином «вдоль» и «против» намагниченности $M=n_+-n_-$ (в единицах магнетона Бора). В приближении «Хаббард I» электронные зоны с проекцией спина имеет следующий вид

$$\xi_{\mathbf{p}}^{(\sigma)} = \frac{t_{\mathbf{p}}}{2} + \frac{U}{2} - \sigma H - \mu \pm \frac{1}{2}\left[(t_{\mathbf{p}} - U^2) + 2Ut_{\mathbf{p}}(n - \sigma M)\right]^{1/2}. \tag{П, 1}$$

Вычисление функции Грина в приближении (П, 1) дает возможность выразить средние числа заполнения через вариационную производную

$$n_\sigma = -T\sum_{\omega,\,\mathbf{p}} e^{i\omega\delta}\frac{\delta}{\delta t_{\mathbf{p}}}\ln\left[(i\omega-\xi_+^{(\sigma)})(i\omega-\xi_-^{(\sigma)})\right]. \tag{П, 2}$$

Производя суммирование по $\omega=(2n+1)\pi T$, получим

$$n_\sigma = -T\sum_{\mathbf{p},\,k=\pm}\frac{\delta}{\delta t_{\mathbf{p}}}\ln\left[1+e^{-\frac{\xi_k^{(\sigma)}}{T}}\right]. \tag{П, 3}$$

В качестве простейшего примера рассмотрим случай прямоугольной плотности состояний полуширины w

$$\rho_0(\varepsilon) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{p}}\delta(\varepsilon - t_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2w}\,\theta(w^2-\varepsilon^2). \tag{П, 4}$$

Произведя интегрирование в соотношении (П, 3), удается найти явное выражение для магнитного момента, восприимчивости, а также квадрата обратной длины экранирования $\varkappa^2 = 4\pi e^2\frac{\partial n}{\partial\mu}\Big/v_0$. В интересующем нас пределе $U=\infty$, когда можно ограничиться рассмотрением только нижней подзоны, получаем

$$\mathrm{th}\frac{Mw}{2T} = \mathrm{th}\frac{H}{T}\,\mathrm{th}\left[\frac{(1-x)w}{2T}\right]. \tag{П, 5}$$

$$\varkappa^2 = \frac{4\pi e^2}{w v_0}\left\{\mathrm{cth}\left(\frac{xw}{2T}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{cth}\left[\frac{(1-x)\,w}{2T}\right]\right\}^{-1}, \qquad (\text{П}, 6)$$

откуда находим магнитную проницаемость

$$\chi(T) = \frac{2}{w}\,\mathrm{th}\left[\frac{(1-x)\,w}{2T}\right]. \qquad (\text{П}, 7)$$

Искомые корреляторы $K_{1,2}$ выражаются через электрическую и магнитную проницаемости с помощью следующих соотношений

$$K_1 - K_2 = \frac{T v_0 \varkappa^2}{4\pi e^2} = \frac{T}{w}\left\{\mathrm{cth}\left(\frac{xw}{2T}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{cth}\left[\frac{(1-x)\,w}{2T}\right]\right\}^{-1}, \qquad (\text{П}, 8)$$

$$K_1 + K_2 = \frac{3T\chi(T)}{2w} = \frac{3T}{w}\,\mathrm{th}\left(\frac{w(1-x)}{2T}\right). \qquad (\text{П}, 9)$$

Вычисление проводимости основано на использовании общей формулы Кубо

$$j_\alpha = -\frac{2Te^2}{V}\sum_{\omega,\,\mathbf{p}}\left\{\frac{\partial t}{\partial p_\alpha}\frac{\partial t}{\partial p_\beta}D_\omega(\mathbf{p})\,D_{\omega-\Omega}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + \frac{\partial^2 t}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}D_\omega(\mathbf{p})\right\}A_\beta. \qquad (\text{П}, 10)$$

После аналитического продолжения разложим (П, 10) по степеням Ω. В нулевом приближении происходит полное сокращение. В следующем приближении и для случая низких температур, когда можно положить $\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{\omega}{2T}\right) \approx 4T\delta(\omega)$, удается проинтегрировать по внутренней частоте, после чего находим проводимость

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2e^2}{V}\sum_{\mathbf{p}}\frac{\partial t}{\partial p_\alpha}\frac{\partial t}{\partial p_\beta}D_+(\mathbf{p})\,D_-(\mathbf{p}), \qquad (\text{П}, 11)$$

$$D_\pm(\mathbf{p}) = \lim_{\omega\to 0\pm} D_\omega(\mathbf{p}).$$

Подставляя сюда общее выражение для нормальной функции Грина

$$D_\pm(\mathbf{p}) = (f + \lambda_\pm)/(f t_{\mathbf{p}} - \mu + \lambda_\pm t_{\mathbf{p}})$$

и используя общее определение тензора эффективной массы (32), произведем интегрирование (П, 11) вблизи поверхности Ферми и при $t_p \sim \mu/f$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{4\pi i e^2 \bar\rho\,(f+\lambda_+)\,(f+\lambda_-)}{3m_{\alpha\beta} f\,(\lambda_+ - \lambda_-)}, \quad \bar\rho = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}}\delta(\xi_{\mathbf{p}}). \qquad (\text{П}, 12)$$

Вычисляя мнимую часть $\lambda_\pm$ в однопетлевом приближении (13), получаем

$$\mathrm{Im}\,\lambda_\pm = \mp\pi v_0 \bar\rho K_1 \mu/f,$$

откуда

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\pi e^2\bar\rho}{3m_{\alpha\beta}}\,\Phi\,(\pi v_0\bar\rho K_1\mu/f), \qquad (\text{П}, 13)$$

$$\Phi\,(z) = \frac{1+z^2}{z}.$$

В области $z \ll 1$ проводимость $\sigma \sim 1/K_1$, так что, согласно (П, 8) и (П, 9), при $T \ll w$ сопротивление пропорционально T.

Литература

[1] *Bednorz J. G., Muller K. A.* Z. Physik B, 1986, Bd B64, N 12, S. 189—193.
[2] *Wu M. K.* et al. Phys. Rev. Lett., 1987, vol. 58, N 9, p. 908—910.
[3] *Batlogg B.* et al. Phys. Rev. Lett., 1987, vol. 58, N 22, p. 2333—2336.
[4] *Bourne L. C.* et al. Phys. Rev. Lett., 1987, vol. 58, N 22, p. 2337—2339.
[5] *Hubbard J.* Proc. Roy. Soc., 1964, vol. A281, N 1386, p. 401—419.
[6] *Hirsch J. E.* Phys. Rev. Lett., 1985, vol. 54, N 12, p. 1317—1320.

[7] *Anderson P. W.* Science, 1987, vol. 235, N 4793, p. 1196—1198.
[8] *Зайцев Р. О., Иванов В. А.* ФТТ, 1987, т. 29, № 8, с. 2554—2556; т. 29, № 10, с. 3111—3119.
[9] *Fukuyama E., Yosida K.* Jap. J. Appl. Phys., 1987, vol. 26, N 4, part 2, p. L371—373.
[10] *Шаплыгин И. С., Тищенко Э. А.* Письма в ЖЭТФ, 1987, т. 46, (Приложение), с. 152—154.
[11] *Зайцев Р. О.* ЖЭТФ, 1976, т. 70, № 4, с. 1100—1111.
[12] *Горьков Л. П.* ЖЭТФ, 1958, т. 34, № 2, с. 735—745.
[13] *Зайцев Р. О., Иванов В. А.* Письма в ЖЭТФ, 1987, т. 46, (Приложение), с. 140—142.
[14] *Абрикосов А. А., Горьков Л. П.* ЖЭТФ, 1960, т. 39, № 12, с. 1781—1796.
[15] *Горьков Л. П.* ЖЭТФ, 1959, т. 36, № 6, с. 1918—1930.
[16] *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* ЖЭТФ, 1950, т. 20, № 4, с. 1064—1056.
[17] *Горьков Л. П., Элиашберг Г. М.* ЖЭТФ, 1968, т. 54, № 3, с. 612—634.

Поступило в Редакцию
5 января 1988 г.