

УДК 548.0 : 534.2

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПУЧКОВ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АКУСТИЧЕСКИ ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

А. Г. Хаткевич, С. Н. Курилкина

Получены взаимосвязанные выражения зависимости изменения групповой скорости и поляризации волн от волнового вектора вдоль и вблизи осей симметрии выше второго порядка в гиротропных кристаллах. Показано, что возникновение вследствие гиротропии вогнутости на полости медленных сдвиговых волн поверхности волновых векторов может приводить к одновременной с внутренней конической рефракцией фокусировке вдоль акустической оси поперечных волн с меньшей скоростью.

Распространение ультразвуковых пучков в гиротропных кристаллах обычно описывается в рамках плосковолнового приближения [1, 2]). В настоящем сообщении рассматривается распространение пучков ультразвукового излучения вдоль и вблизи акустических осей, совпадающих с осями симметрии, вдоль которых гиротропия не подавляется анизотропией и наблюдается на эксперименте, а дифракция излучения в кристаллах описывается довольно простыми выражениями [3]. Анализируется проявление гиротропии в расхождении пучков и возможность фокусировки ультразвукового излучения вдоль акустических осей, где в отсутствие гиротропии может иметь место явление внутренней конической рефракции [4-7].

Вектор смещения пучка ультразвукового излучения в кристалле представим в виде волны

$$A(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{q} A(\mathbf{q}) a \exp i \left[(\mathbf{r} - \mathbf{u}t) \mathbf{q} - \frac{t}{2} \mathbf{q} \omega \mathbf{q} \right] \exp i [\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t], \quad (1)$$

пространственно-временная зависимость амплитуды которой определяется групповой скоростью $\mathbf{u} = d\omega/d\mathbf{k}$ и ее производной $w = \partial u/\partial k$. В выражении (1) ω_0 и $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0 \mathbf{n}_0$ — частота и соответствующий волновой вектор центральной волны пучка, $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$, \mathbf{a} — вектор поляризации, удовлетворяющий условию $\mathbf{a} \mathbf{a}^* = 1$. Используемое в (1) приближение, ограничивающееся первыми тремя членами разложения в ряд частоты по волновому вектору, применимо лишь для слабо расходящихся пучков, для которых «нецентральные» волны мало отличаются от центральной [3]. Тогда групповая скорость и ее производная, как коэффициенты этого разложения, определяются непосредственно из характеристического (дисперсионного) уравнения

$$\left. \begin{aligned} \det L_{jl} &= \det (r_{jl} - \omega^2 \delta_{jl}) = \frac{1}{3} \text{Sp} (L\bar{L}) = 0, \\ r_{jl} &= c'_{ijkl} k_i k_k = e_{ijkl} k_i k_k + i \delta_{jml} G_m, \quad c'_{ijkl} = c_{ijkl} + \\ &+ \frac{1}{2} i (\delta_{js} \delta_{ls} - \delta_{ja} \delta_{la}) b_{irksn} k_i k_n, \\ G_m &= \frac{1}{2} \delta_{rms} b_{irksn} k_i k_k k_n, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где c_{ijkl} и b_{irksn} — компоненты тензоров модулей упругости и акустической гирации, отнесенные к плотности среды; G_m — вектор акустической гирации; δ_{jr} и δ_{jml} — символы Кронекера и Леви—Чивита. Подставляя в (2) $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}$, используя соотношение $a_i a_i^* \sim L_{,il} = \frac{1}{2} \delta_{ijk} \delta_{imn} L_{jm} L_{kn}$ и пренебрегая произведениями с q_i в степени выше второй, получаем

$$u_i = a_j r_{jki} a_k^* / 2\omega, \quad (3)$$

$$w_{,il} = \{r_{jki} a_j a_k^* + r_{jki} (a_j a_k^*)_{,l} - 2u_i u_{,l}\} / 2\omega. \quad (4)$$

Здесь индекс после запятой означает частную производную по соответствующей компоненте волнового вектора.

В общем случае тензор $w_{,il}$ имеет отличный от нуля определитель и три различных собственных значения. При отсутствии дисперсии одно из собственных значений обращается в нуль, тензор $w_{,il}$ оказывается двумерным, и, как для монохроматических пучков, поверхность волновых векторов в точке \mathbf{k}_0 аппроксимируется уравнением поверхности второго порядка

$$k_{\parallel} = k_0 - v^{-1} \mathbf{u} \mathbf{q}_{\perp} - v^{-1} \mathbf{q}_{\perp} \omega \mathbf{q}_{\perp} / 2, \quad (5)$$

где $\mathbf{q}_{\perp} = [\mathbf{q} \mathbf{n}_0]$, v — фазовая скорость. При совмещении соответствующей оси системы координат с направлением луча центральной волны пучка тензором $w_{,il}$ определяется вторая основная квадратичная форма и кривизна поверхности волновых векторов. Собственные векторы и собственные значения $w_{,il}$ задают главные направления и главные кривизны этой поверхности.

Существенным следствием наличия гиротропии является устранение касания полостей поверхности фазовых скоростей в особых кратных или конических точках. В результате в направлении осей симметрии выше второго порядка скорости распространения сдвиговых волн в кристалле будут равны $v_{\pm}^2 = v_0^2 \pm g$, $v_0^2 = c_{44}$, $g = Gn$. Волны, в общем случае эллиптически поляризованные [1, 2], в направлении осей оказываются циркулярно-поляризованными, и их векторы поляризации, неоднозначно определенные при отсутствии гиротропии, определяются проективными матрицами, или проекторами $\mathbf{a} \mathbf{a}^*$, где $\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 \pm i \mathbf{e}_2) / \sqrt{2}$.

Вблизи оси симметрии 3-го порядка, для которой при отсутствии гиротропии имеет место касание первого порядка полостей поверхности волновых векторов и вдоль которой наблюдается явление внутренней конической рефракции [4-7], путем дифференцирования характеристического уравнения для определения векторов поляризации и групповых скоростей получаем следующие выражения

$$(\mathbf{a} \mathbf{a}^*)_{\pm} = \pm \frac{1}{2u} \begin{pmatrix} \pm u + u_2 & u_1 + i g \\ u_1 - i g & \pm u - u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \pm \cos \varphi & \pm e^{i\chi} \sin \varphi \\ \pm e^{-i\chi} \sin \varphi & 1 \mp \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [I \pm U(\varphi, \chi)], \quad (6)$$

$$u_1 = c_{14} \sin \varphi / v, \quad u_2 = c_{14} \cos \varphi / v, \quad u_3 = v_{\pm} = v_0 \pm g / 2v_0, \quad u = [u_1^2 + u_2^2 + g^2]^{1/2},$$

где верхние и нижние знаки относятся соответственно к быстрой и медленной сдвиговой волне, угол φ определяет направление групповой скорости в отсутствие гиротропии, $\varphi/2$ — ориентацию большой оси эллипса поляризации, $\chi/2$ — эллиптичность волны, а $u(\varphi, \chi)$ — унитарная матрица, образованная из компонент вектора групповой скорости. Изменение продольной составляющей волнового вектора во втором приближении определяется выражением

$$w_{,il} q_i q_l = \frac{q^2}{2v} \left\{ a_{\pm} \pm \frac{g(c_{11} + c_{66} - 2c_{44})}{c_{33} - c_{44}} - 2c_{44}^2 / v^2 \mp \left[a_{\pm} \pm \frac{g(c_{11} + c_{66})}{c_{33} - c_{44}} \right] \cos 3\varphi \right\}, \quad (7)$$

где $a_{\pm} = c_{11} \pm c_{66} - (c_{13} + c_{44})^2 / (c_{33} - c_{44})$, $q = [q_1^2 + q_2^2]^{1/2}$. Соответствующие выражения для осей симметрии 3-го порядка в кубических кристаллах получаются при замене $c_{33} = c'_{33} - 2c/3$, $c_{11} = c'_{11} - c/2$, $c_{66} = c'_{44} + c/6$, $c_{44} =$

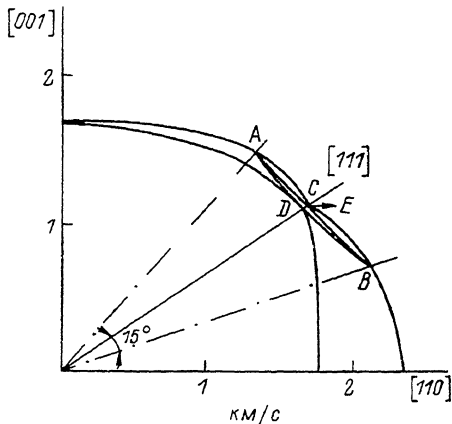
$= c'_{44} + c/3$, $c_{13} = c'_{12} - c/3$, $c_{14} = c/3 \sqrt{2}$, $c = c'_{11} - c'_{12} - 2c'_{44}$, где c'_{ik} — модули упругости кубического кристалла.

Для направлений вблизи оси симметрии 4-го порядка, в случае которой при отсутствии гиротропии имеет место касание второго порядка и явление конической рефракции отсутствует, в результате последовательного дифференцирования характеристического уравнения для определения векторов поляризации и изменения продольной компоненты волнового вектора во втором приближении получаем выражения

$$(aa^*)_{\pm} = \pm \frac{1}{2w'} \begin{pmatrix} \pm w' - w'_2 & w'_1 + ig \\ w'_1 - ig & \pm w' + w'_2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \mp \cos 2\bar{\varphi} & \pm e^{i2\chi} \sin 2\bar{\varphi} \\ \pm e^{-2\chi} \sin 2\bar{\varphi} & 1 \pm \cos 2\bar{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [I \mp U(2\bar{\varphi}, 2\chi)], \quad (8)$$

$$w_{i1}q_iq_i = \frac{q^2}{2v} \left\{ a_{\pm} \pm \frac{g(c_{11} + c_{66} - 2c_{44})}{c_{33} - c_{44}} \mp \left[w_1'^2 + w_2'^2 \pm \frac{2g(c_{11} - c_{66})a_{\pm}}{c_{33} - c_{44}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (9)$$

где $w_1' = b \sin 2\varphi$, $w_2' = a \cos 2\varphi$, $w' = [w_1'^2 + w_2'^2 + g^2]^{1/2}$, $b = c_{12} + c_{66} - (c_{13} + c_{44})^2 / (c_{33} - c_{44})$, φ и $\bar{\varphi}$ определяют соответственно направление отклонения волновой нормали от акустической оси и ориентацию поляризации, причем $\text{tg } 2\bar{\varphi} = b \text{tg } 2\varphi / a_{\pm}$. Выражения для осей симметрии 4-го порядка в кубических и 6-го в гексагональных кристаллах получаются из (8) и (9) при учете соотношений $c_{33} = c_{11}$, $c_{66} = c_{44}$, $c_{13} = c_{12}$ для кубических и $c_{12} + c_{66} = c_{11} - c_{66}$, $\bar{\varphi} = \varphi$ для гексагональных кристаллов. При отсутствии гиротропии $g=0$ и (6)–(9) сводятся к со-



Сечение поверхности лучевых скоростей в кристалле германата висмута.

ответствующим выражениям для осей симметрии выше второго порядка в негиротропных кристаллах [7]. Как видно, зависимости направления векторов поляризации, эллиптичности и изменения групповой скорости волн от волновой нормали вблизи осей симметрии взаимосвязаны и различны для осей четного и нечетного порядка, т. е. определяются порядком касания полостей поверхности волновых векторов в направлении акустической оси.

Согласно (7), (9), в направлении осей симметрии полости волновых векторов в гиротропных кристаллах имеют омбилические точки, в которых в случае осей 4-го и 3-го порядка кривизна и эллиптичность волн зависит от направления удаления от оси. Кроме этого, согласно (7), в направлении оси симметрии 3-го порядка обе главные кривизны полости медленных сдвиговых волн оказываются отрицательными и при отклонении от оси, поскольку полости замкнуты, сначала одна, а потом другая (может быть вместе) становятся положительными. Следовательно, вблизи акустической оси в гиротропных кристаллах имеется область эллиптических точек с отрицательными кривизнами, которая отделена от области точек с положительными кривизнами «поясом» гиперболических точек с отрицательной гауссовой кривизной $K = w_1 w_2$, ограниченными кривыми параболических точек, в которых гауссова кривизна равна нулю. Указанным кривым на волновой (лучевой) поверхности соответствуют острые грани и каустики в поле излучения [8]. На рисунке представлены кривые сечения лучевой поверхности для лежащих в плоскости $\{1\bar{1}0\}$ волновых

нормалей в кубическом кристалле германата висмута. Как видно, наличие гиротропии приводит к расщеплению полостей указанной поверхности и появлению новых областей ADB и AEB и острых граней, соответствующих параболическим точкам.

В системе координат с осями, совмещенными с главными направлениями волновой поверхности, тензор w_{ij} диагонализуется, и, если изменением эллиптичности в пучке можно пренебречь, для простейшего случая гауссовых пучков с амплитудой $A(r) = A_0 \exp - \sum_{a=1}^2 r_a^2 / 2z_a^2$ из (1) для вектора смещения получаем выражение

$$A(r) = \prod_a (1 - zw_a^2 / v^2 z_a^2)^{-1/2} \exp - \{ (r_a - zu_a / v)^2 [2(z_a^2 - izw_a^2 / v)]^{-1} \} a. \quad (10)$$

Как видно, при наличии гиротропии, как и в ее отсутствие, расходимость пучка ультразвукового излучения определяется кривизной: пучок в кристалле расходится или сходится в зависимости от того, положительны или отрицательны главные кривизны. Поскольку вдоль осей симметрии 3-го порядка кривизны полости медленных сдвиговых волн поверхности волновых векторов отрицательны, в указанных направлениях имеет место фокусировка поперечных волн с меньшей фазовой скоростью.

Однако изменением эллиптичности и ориентации эллипсов поляризации для пучков волн, распространяющихся вдоль оси симметрии, пренебрегать, вообще говоря, нельзя. Тогда выражение для вектора смещения ультразвукового пучка, который удобно представить в цилиндрической системе координат $A(r) = A(z, \rho, \varphi)$, получается интегрированием (1) с учетом вида распределения амплитуды падающего на кристалл пучка и соотношений (6), (8). В случае гауссовых пучков, распространяющихся вдоль оси симметрии 6-го, а также 4-го порядка (если произвести замену $\bar{\varphi} \rightarrow \varphi$ или пренебречь их различием), и лоренцевских пучков, распространяющихся вдоль оси 3-го порядка, интегрирование (1) с использованием соотношения

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp [iq\rho \cos(\varphi' - \varphi)] (aa^*)_{\pm} d\varphi' = \frac{1}{2} [I_{\mathcal{J}_0}(\rho q) \pm i^n \mathcal{J}_n(\rho q) U(n\varphi, n\chi)], \quad (11)$$

где \mathcal{J}_n — функция Бесселя с индексом, равным 1 или 2 соответственно в случае оси нечетного или четного порядка, приводит к тем же выражениям, что и при отсутствии гиротропии [7], в которых ортогональная матрица $O(n\varphi)$ заменяется унитарной $U(n\varphi, n\chi)$ вследствие эллиптической поляризации волн.

Следовательно, наличие гиротропии не устраняет явление внутренней конической рефракции, а лишь несколько изменяет его. Ультразвуковой пучок в гиротропных кристаллах разделяется на эллиптически поляризованные волны с большей и меньшей скоростью, распространяющиеся соответственно вне и внутри конуса внутренней конической рефракции. Однако теперь вблизи последнего вместо ослабления излучения создается отчетливая интерференционная картина. Наряду с этим исчезновение особых кратных точек на поверхности волновых векторов в направлении оси симметрии 3-го порядка также может привести к появлению вогнутости на полости медленных сдвиговых волн, острых граней на волновой поверхности (см. рисунок) и фокусировке поперечных волн с меньшей фазовой скоростью.

Л и т е р а т у р а

- [1] Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
 [2] Бокуть Б. В., Хило П. А. Кристаллография. 1980, т. 25, № 4, с. 836—837.

- [3] Хаткевич А. Г. *Акустический журнал*, 1978, т. 24, № 1, с. 108—115.
[4] Федоров Ф. И. *Теория упругих волн в кристаллах*. М.: Наука, 1965. 386 с.
[5] Красильников В. А., Лямов В. Е., Маматова Т. А., Прохоров В. Н. *ФТТ*, 1974, т. 16, № 5, с. 1552—1554.
[6] Анисимкин В. И., Морозов А. И. *ФТТ*, 1975, т. 17, № 10, с. 3006—3009.
[7] Хаткевич А. Г. *Кристаллография*, 1986, т. 31, № 4, с. 629—634.
[8] Гилмор Р. *Прикладная теория катастроф*. М.: Мир, 1984. 350 с.

Институт физики
АН БССР
Минск

Поступило в Редакцию
27 ноября 1987 г.