01;03;04

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ШАРОВОЙ МОЛНИИ ПО ОТНОШЕНИЮ К СОБСТВЕННОМУ НЕСКОМПЕНСИРОВАННОМУ ЗАРЯДУ

А.И.Григорьев, И.Д.Григорьева, С.О.Ширяева

Ярославский государственный университет,
150000, Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 2 марта 1994 г.)

Исследуется электрогидродинамическая устойчивость сферической границы раздела двух несмешивающихся жидкостей по отношению к неустойчивостям Тейлора и Рэлея. Найдена функциональная зависимость между двумя безразмерными физическими параметрами, характеризующими критические условия реализации неустойчивости капиллярных волн на границе раздела в поле сил тяжести и электрическом поле собственного заряда соответственно.

Введение

В работе [1] впервые обращено внимание на то обстоятельство, что шаровая молния, свободно плавающая в атмосфере (при уравновешивании силы тяжести, действующей на нее, архимедовой силой), должна испытывать неустойчивость Тейлора на верхней и на нижней частях своей поверхности. Там же найдены критические условия реализации подобной неустойчивости для ШМ. Но за пределами рассмотрения [1] остался важный случай наличия у ШМ нескомпенсированного электрического заряда, который должен ужесточать условия проявления указанной неустойчивости Тейлора [2]. Нижеследующее рассмотрение проведем по схеме, использованной в [1], моделируя вещество ШМ и среду идеальными несжимаемыми жидкостями, граница раздела которых обладает поверхностным натяжением.

1. Пусть подвешенная в поле силы тяжести ($\mathbf{g} \parallel \mathbf{n}_z$) неподвижная сферическая капля идеальной, идеально проводящей, несжимаемой жидкости плотностью ρ_1, радиуса R, имеющая заряд Q, находится в идеальной несжимаемой диэлектрической среде с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε. В сферической системе координат с началом в центре капли будем решать задачу об устойчивости

границы раздела сред, обладающей поверхностным натяжением с коэффициентом γ, имея в виду возможную неустойчивость капиллярных волн, существующих в такой системе уже в силу теплового движения молекул.

Уравнение возмущенной волновым движением поверхности капли в сферической системе координат с началом в центре капли будет иметь вид

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t), \tag{1}$$

где R — радиус невозмущенной капли, $\xi(\theta, t)$ — возмущение поверхности капли ($\max|\xi| \ll R$).

Волновые движения в капле и окружающей среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей Ψ_1 и Ψ_2 соответственно, которые для несжимаемой жидкости являются гармоническими функциями

$$\Delta\Psi_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

и на границе раздела сред (при $r = R + \xi(\theta, t)$) удовлетворяют граничным условиям равенства нормальных границе компонент скоростей

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \tag{3}$$

кинематическому

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} \approx \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \tag{4}$$

динамическому (условию равенства перепада давлений в капле и в среде лапласовскому давлению под искаженной волновым движением сферической поверхностью)

$$\Delta P - \rho_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + \rho_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} - (\rho_1 - \rho_2)g(z - R) + F(\theta, t) = \gamma\left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2}(2 + \hat{L})\xi\right]. \tag{5}$$

Здесь $F(\theta, t)$ — давление электрического поля; $\hat{L}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

В нижеследующем изложении все производные в граничных условиях (3)–(5) в линейном по $|\xi|/R$ приближении будем относить к невозмущенной поверхности капли $r = R$, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды [3].

Введем нормированные полиномы Лежандра $\mathcal{F}_n(\cos\theta)$

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{F}_n\mathcal{F}_m d\mu = \delta_{nm} \qquad (\mu \equiv \cos\theta)$$

и решения уравнений (2) будем искать в виде разложений по ним

$$\Psi_1(r, \theta, t) = \sum_n A_n r^n \mathcal{F}_n \exp(-i\omega t),$$

$$\Psi_2(r, \theta, t) = \sum_n B_n \frac{1}{r^{n+1}} \mathcal{F}_n \exp(-i\omega t). \tag{6}$$

Здесь коэффициенты A_n и B_n являются малыми того же порядка, что и Ψ, ξ. Связь между коэффициентами A_n и B_n легко находится из (3)

$$A_n n R^{n-1} = -B_n(n+1)\frac{1}{R^{n+2}}$$

или

$$B_n = -A_n \frac{n}{(n+1)} R^{2n+1}. \tag{7}$$

Потребуем теперь, чтобы решения (6) с учетом (7) удовлетворяли и граничным условиям (4) и (5). Для этого продифференцируем динамическое граничное условие (5) по времени (при $\theta = \text{const}$) и с учетом (3)–(4) получим

$$-\rho_2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} - (\rho_1 - \rho_2) g \cos\theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \gamma \frac{1}{R^2}(2 + \hat{L}) \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} F(\theta, t) = 0. \tag{8}$$

В (8) остается неопределенной частная производная по времени от электрического давления на поверхность капли $(\partial/(\partial t))F(\theta, t)$.

2. В общем случае давление электрического поля напряженностью $\mathbf{E}(\theta, t)$ в среде с диэлектрической проницаемостью ε определяется выражением [4]

$$F(\theta, t) = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2.$$

И искомую производную $\partial F/\partial t$ легко найти

$$\frac{\partial F(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} E(\theta, t) \frac{\partial E(\theta, t)}{\partial t}.$$

Но для того чтобы воспользоваться этой формулой в рассматриваемом случае, необходимо найти выражение для напряженности электрического поля в окрестности возмущенной волновым движением сферической поверхности капли.

Будем искать потенциал поля Φ, создаваемого возмущенной заряженной каплей в окружающем пространстве, учитывая, что он должен быть гармонической функцией,

$$\Delta \Phi = 0,$$

$$r \to \infty: \qquad \Phi \to 0 \tag{9}$$

и удовлетворять на границе раздела условию

$$r = R + \xi: \qquad \Phi = \text{const}. \tag{10}$$

Потенциал Φ представим в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi,$$

где Φ_0 — потенциал невозмущенной сферической капли; $\delta\Phi$ — добавка к потенциалу, возникающая из-за возмущения поверхности.

Тогда задача (9), (10) примет вид

$$\Delta(\Phi_0 + \delta\Phi) = 0, \tag{9a}$$

$$r = R + \xi: \qquad \Phi_0 + \delta\Phi = \frac{Q}{\varepsilon \cdot R}. \tag{10a}$$

Ввиду малости амплитуды возмущения поверхности ($|\xi| \ll R$) разложим граничное условие (10а) в ряд в окрестности точки $\xi = 0$ и, отбрасывая члены 2-го порядка малости, получим

$$r = R: \qquad \Phi_0 + \delta\Phi + \xi\frac{\partial}{\partial r}\Phi_0 = \frac{Q}{\varepsilon \cdot R}. \tag{11}$$

Тогда задача (9а), (11) разбивается на две: задачу нахождения Φ

$$\Delta\Phi_0 = 0,$$

$$r = R: \qquad \Phi_0 = \frac{Q}{\varepsilon \cdot R} \tag{12}$$

и задачу нахождения $\delta\Phi$

$$\Delta(\delta\Phi) = 0, \tag{13}$$

$$r = R: \qquad \delta\Phi + \xi\frac{\partial}{\partial r}\Phi_0 = 0. \tag{14}$$

Из (14) (учитывая, что решение задачи (12) известно $\Phi_0(r) = Q/\varepsilon r$) имеем

$$r = R: \qquad \delta\Phi = -\xi\frac{\partial}{\partial r}\Phi_0 = \xi E_{0r} = \xi\frac{Q}{\varepsilon \cdot R^2}. \tag{15}$$

Будем искать $\delta\Phi$ в виде ряда

$$\delta\Phi = \sum_n D_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \mathcal{F}_n(\cos\theta). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$r = R: \qquad \delta\Phi = \sum_n D_n \cdot \mathcal{F}_n(\cos\theta) = \xi\frac{Q}{\varepsilon \cdot R^2}.$$

Из этого выражения легко найти коэффициенты D_n

$$D_n = \frac{Q}{\varepsilon R^2}\int_0^\pi \xi\mathcal{F}_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{17}$$

Отметим, что коэффициент D_n является малой величиной того же порядка, что и ξ. Найдем теперь напряженность поля в окрестности капли

$$r = R + \xi: \qquad \mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\nabla(\Phi_0 + \delta\Phi).$$

Относя это выражение к границе раздела $r = R+\xi$ и разлагая получившееся соотношение в окрестности невозмущенной границы, найдем в линейном приближении по $|\xi|/R$

$$\mathbf{E}\Big|_{r=R+\xi} \approx \left[-\nabla(\Phi_0+\delta\Phi) - \xi\frac{\partial}{\partial r}\nabla\Phi_0\right]_{r=R}. \tag{18}$$

Учтем, что давление электрического поля на поверхность капли с точностью до малых первого порядка малости выражается только через радиальную компоненту напряженности поля, и выпишем выражение для радиальной компоненты $\mathbf{E}$, подставляя соответствующие компоненты векторов $\Delta\Phi_0$, $\nabla(\delta\Phi)$, $\frac{\partial}{\partial r}(\nabla\Phi_0)$ в (18),

$$\mathbf{E}\Big|_{r=R+\xi} \approx \left[\frac{Q}{\varepsilon R^2} + \frac{1}{R}\sum_n D_n(n+1)\mathcal{F}_n - \xi\frac{2Q}{\varepsilon R^3}\right]_{r=R}.$$

На данном этапе рассмотрения можно найти и выражение для частной производной по времени от напряженности поля на поверхности капли

$$\frac{\partial E}{\partial t}\Big|_{r=R+\xi} \approx \left[\frac{1}{R}\sum_n \frac{\partial D_n}{\partial t}(n+1)\mathcal{F}_n - \frac{2Q}{\varepsilon R^3}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right]_{r=R}. \tag{19}$$

Производную $\partial D_n/\partial t$ легко найти из (17)

$$\frac{\partial D_n}{\partial t} = \frac{Q}{\varepsilon R^2}\int_{-1}^{1}\frac{\partial\xi}{\partial t}\mathcal{F}_n(\mu)d\mu.$$

Из (3), (4) и (6) несложно получить

$$r = R: \qquad \frac{\partial D_n}{\partial t} = \frac{Q}{\varepsilon R^2}\int_{-1}^{1}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathcal{F}_n(\mu)d\mu =$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon R^2}\sum_m\int_{-1}^{1} A_m m R^{m-1}\mathcal{F}_m\mathcal{F}_n d\mu\exp(-i\omega t) =$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon R^3}\sum_m mA_m\exp(-i\omega t)R^m\int_{-1}^{1}\mathcal{F}_m(\mu)\mathcal{F}_n(\mu)d\mu = \frac{Q}{\varepsilon R^3}nC_n\exp(-i\omega t), \tag{20}$$

где $C_n \equiv R^n A_n$.

Учтем далее, что, согласно (4),

$$r = R: \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} \approx \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \sum_n C_n\mathcal{F}_n n\frac{1}{R}\exp(-i\omega t). \tag{21}$$

Подставляя (20) и (21) в (19), окончательно найдем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{Q}{\varepsilon R^4}\sum_n n(n+1)C_n\mathcal{F}_n\exp(-i\omega t) - \frac{2Q}{\varepsilon R^4}\sum_n nC_n\mathcal{F}_n\exp(-i\omega t) =$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon R^4}\sum_n n(n-1)C_n\mathcal{F}_n\exp(-i\omega t).$$

Тогда для искомой частной производной по времени от давления поля на поверхности капли получится соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{8\pi}2E\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{Q}{\varepsilon R^2} + \frac{1}{R}\sum_n D_n(n+1)\mathcal{F}_n - \xi\frac{2Q}{\varepsilon R^3}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{Q}{\varepsilon R^4}\sum_n n(n-1)C_n\mathcal{F}_n\exp(-i\omega t)\right).$$

Отбросим члены 2-го порядка малости, пропорциональные произведениям $\sim D_n\cdot C_n$ и $\sim \xi\cdot C_n$. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{\varepsilon R^6}\sum_n n(n-1)C_n\mathcal{F}_n\exp(-i\omega t). \tag{22}$$

3. Подставим теперь (6), (7) и (22) в динамическое граничное условие (8) и получим

$$\sum_n\left[-\omega^2\left[\rho_2\frac{n}{n+1} + \rho_1\right] + \frac{\gamma}{R^3}(n-1)(n+2)n - \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{\varepsilon R^6}n(n-1)\right]C_n\mathcal{F}_n =$$

$$= -\frac{(\rho_1-\rho_2)g}{R}\sum_n C_n n\cos\theta\mathcal{F}_n. \tag{23}$$

Здесь учтено, что $\mathcal{F}_n$ являются собственными функциями оператора $\hat{L}$, т.е. $\hat{L}\mathcal{F}_n = -n(n+1)\mathcal{F}_n$. Если в этом выражении положить g равным нулю (т.е. исключить влияние поля сил тяжести), то получим задачу о капиллярных колебаниях заряженной капли, отличающуюся от решенной Рэлеем задачи [5] как способом, так и наличием внешней диэлектрической среды.

а) Из (23) при $g = 0$ в силу ортогональности полиномов Лежандра легко найти дисперсионные соотношения для капиллярных колебаний капли

$$\omega_n^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{\rho_2 n + (n+1)\rho_1}\frac{1}{R^3}\left[\gamma(n+2) - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{R^3}\right].$$

Из этого выражения легко видеть, что с увеличением заряда капли частоты капиллярных колебаний будут уменьшаться, а когда выражение в квадратных скобках (а значит, и квадрат частоты) пройдет через нуль и станет отрицательным, некоторые частоты капиллярных волн станут мнимыми, т.е. капля претерпит неустойчивость, так как появятся экспоненциально растущие со временем моды капиллярных волн. Поэтому критерий устойчивости заряженной капли по отношению к капиллярным колебаниям бесконечно малой амплитуды будет иметь вид

$$\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\gamma R^3} < (n+2). \tag{24}$$

Поскольку минимальное значение номера моды капиллярных колебаний неподвижной несжимаемой капли есть $n = 2$ [3], то критерий устойчивости (24) можно выписать только для второй моды в виде

$$\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon\gamma R^3} < 1.$$

Это и есть критерий устойчивости заряженной электропроводной капли или критерий Рэлея [1]. Как показано в [6], при выполнении для основной моды с $n = 2$ условия, противоположного (24), капля начинает вытягиваться в сфероид. При этом происходит перераспределение заряда по поверхности капли. Его концентрация на вершинах сфероида увеличивается, что приводит к генерации неустойчивости более высоких мод капиллярных волн. Суперпозиция всех высоких неустойчивых мод приводит к формированию на вершинах капли заостренных выступов, с которых начинается сброс избыточного заряда в виде струйки высокодисперсных сильнозаряженных капелек [6,7]. Такой тип неустойчивости отмечается очевидцами и у шаровой молнии [8,9]. Интересно отметить, что наличие внешней для капли диэлектрической среды сказалось на частотах капиллярных колебаний капли, которые сместились в сторону уменьшения по сравнению с частотами капиллярных колебаний такой же капли в вакууме и на критических условиях устойчивости капиллярных колебаний капли, которые стали в ε раз менее жесткими.

4. Для дальнейшего анализа соотношение (23) целесообразно переписать в безразмерном виде

$$\sum_n \left[\Omega^2\delta_n - E_n + W_n\right] C_n\mathcal{F}_n = \eta\sum_n C_n n\cos\theta\mathcal{F}_n, \tag{25}$$

где

$$\Omega^2 = \omega^2\frac{\rho_1 R^3}{\gamma}, \quad E_n = (n-1)(n+2)n, \quad \delta_n = \left[1 + \frac{n}{n+1}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right],$$

$$W_n = \frac{Q^2}{4\pi\gamma R^3}(n-1)n \equiv Wn(n-1), \quad \eta = \frac{(\rho_1-\rho_2)R^2 g}{\gamma}. \tag{26}$$

Параметр W характеризует устойчивость границы раздела по отношению к собственному электрическому заряду, параметр η, имеющий смысл капиллярной постоянной, характеризует устойчивость границы раздела по отношению к действию поля сил тяжести и архимедовых сил.

Умножим (25) на $\mathcal{F}_s$ и интегрируя по углам, придем к бесконечной системе однородных уравнений для нахождения коэффициентов C_n

$$C_n\left(\Omega^2\delta_n - E_n + W_n\right) = \eta\left(\mu_n C_{n-1} + \lambda_n C_{n+1}\right),$$

где

$$\mu_n = (n-1)n\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}, \qquad \lambda_n = (n+1)^2\frac{1}{\sqrt{4(n+1)^2-1}}.$$

Условием существования решений такой системы является равенство нулю определителя, составленного из ее коэффициентов,

$$\begin{vmatrix} \Omega^2\delta_2 - E_2 + W_2 & -\eta\lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ -\eta\mu_3 & \Omega\delta_3^2 - E_3 + W_3 & -\eta\lambda_3 & 0 & \dots \\ 0 & -\eta\mu_4 & \Omega^2\delta_4 - E_4 + W_4 & -\eta\lambda_4 & \dots \\ 0 & 0 & -\eta\mu_5 & \Omega\delta_5^2 - E_5 + W_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Это выражение представляет собой дисперсионное уравнение рассматриваемой физической системы и определяет частоты волновых движений как функции от остальных физических параметров, входящих в дисперсионное уравнение $\Omega_n^2 = \Omega_n^2(W,\eta)$. Дисперсионное уравнение (27) имеет бесконечно большой порядок в связи с бесконечностью системы (26) и должно решаться численно методом последовательных приближений, когда решаются по очереди системы из 2, 3, 4, 5 и т.д. уравнений системы. При фиксированном n дисперсионное уравнение представляет собой полином $(n-1)$-го порядка относительно Ω^2. Ясно, что при изменении параметров W и η будут меняться и значения корней уравнения. При некоторых значениях параметров W и η некоторые из решений Ω_i^2 могут перейти через нуль и стать отрицательными. Но отрицательное значение Ω_n^2 соответствует появлению пары мнимых корней разного знака $\pm i\Omega_n$, что означает неустойчивость n-й волны из существующих в системе. Несложно видеть, что условием появления нулевых решений для Ω_n^2 является равенство нулю свободного члена дисперсионного уравнения (27), который имеет вид

$$\begin{vmatrix} -E_2 + W_2 & -\eta\lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ -\eta\mu_3 & -E_3 + W_3 & -\eta\lambda_3 & 0 & \dots \\ 0 & -\eta\mu_4 & -E_4 + W_4 & -\eta\lambda_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Уравнение (28) определяет связь между параметрами W, η и n, при которых становится неустойчивой та либо иная мода капиллярных колебаний. Раскрывая по очереди определители 2-го, 3-го, 4-го, 5-го и т.д. порядка, можно найти критические условия проявления неустойчивости любого количества мод в виде $W_n = W_n(\eta)$. Как показывает анализ, критические условия при нахождении их методом последовательных приближений сходятся к искомым значениям достаточно быстро. Так, для нахождения критических условий неустойчивости основной моды с точностью до третьего знака достаточно раскрыть определитель третьего порядка. В этом случае получается соотношение между критическими параметрами W и η следующего вида:

$$\eta^2 = \frac{(E_2 - W_2)(E_3 - W_3)(E_4 - W_4)}{\lambda_3\mu_4(E_2 - W_2) + \lambda_2\mu_3(E_4 - W_4)}. \qquad (29)$$

Поскольку первой становится неустойчивой основная мода, то при оценке влияния заряда (параметр W) на устойчивость ШМ по отношению к проявлению неустойчивости Тейлора величину параметра W следует брать такой, чтобы W_2 было меньше E_2 (связь параметра W_i с параметром W см. в (26)), так как при $W_2 > E_2$ зависимость (29) теряет физический смысл, поскольку η по своему физическому смыслу может быть только положительным вещественным. При $W = 0$ соотношение (29) определяет критические условия неустойчивости ШМ в поле силы тяжести, т.е. критические условия проявления неустойчивости Тейлора, которая реализуется при $\eta_2^2 = 126$. Как только параметр η превысит критическое значение, становится неустойчивой основная мода капиллярных колебаний, которая проявится в сплющивании капли вдоль направления $\mathbf{g}$. Из соотношения $\eta = \text{const}$ для устойчивой ШМ фиксированного радиуса можно найти отношение разности плотностей вещества ШМ и воздуха к коэффициенту поверхностного натяжения вещества ШМ, величину которого (как показано в [8]) можно определить из других соображений. При $\eta = 0$ из (29) легко находятся критические условия неустойчивости ШМ по отношению к нескомпенсированному заряду в виде (24). При отличных от нуля значениях η и W соотношение (29) показывает, что наличие у ШМ нескомпенсированного электрического заряда снижает устойчивость ее границы в поле силы тяжести. Наличие же у ШМ такого заряда представляется вполне реальным, так как позволяет истолковать многие свойства ШМ: ее способность парить на одном уровне, опускаться и подниматься в атмосфере, притягиваться к заземленным проводникам и поражать свидетелей электрическим разрядом [8,9].

Следует отметить, что сказанное об устойчивости границы раздела вещество ШМ–воздух остается справедливым и для случая заряженных капель электропроводной жидкости, взвешенных в диэлектрической жидкости, например для капель воды в трансформаторном масле, — ситуации, представляющей интерес в связи с исследованием пробойной прочности жидких диэлектриков [10], а также для химической технологии в связи с разработкой методов получения двухфазных систем несмешивающихся жидкостей [11]. Применимы полученные результаты и к исследованию закономерностей дробления заряженных капель в грозовых облаках [12,13].

Список литературы

[1] *Стаханов И.П.* // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 7. С. 1373–1379.
[2] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 6. С. 73–77.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[5] *Rayleigh* // Phys. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
[6] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
[7] *Schweizer J.W., Hanson D.N.* // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
[8] *Стаханов И.П.* Физическая природа шаровой молнии. М.: Атомиздат, 1979. 242 с.
[9] *Григорьев А.И., Григорьева И.Д., Ширяева С.О.* // Химия плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1991. № 17. С. 218–248.
[10] *Балыгин И.Е.* Электрическая прочность жидких диэлектриков. М.; Л.: Энергия, 1964. 227 с.
[11] *Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О.* // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020–2026.
[12] *Бейтуганов М.Н.* // Метеорология и гидрология. 1989. № 9. С. 42–49.
[13] *Гонор А.Л., Ривкинд В.Я.* // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М., 1982. Т. 17. С. 86–159.