

11

## **Эффект захвата среднего времени возврата Пуанкаре как критерий вынужденной синхронизации хаоса**

© В.С. Анищенко, Я.И. Боев

Саратовский государственный университет  
E-mail: wadim@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 14 ноября 2013 г.

Предлагается новый метод диагностики вынужденной синхронизации хаотических автоколебаний с использованием локальной теории возвратов Пуанкаре. Установлено, что в области синхронизации имеет место эффект захвата среднего времени возвратов Пуанкаре внешним гармоническим сигналом.

Одной из фундаментальных характеристик временной динамики систем с заданной вероятностной мерой является возврат Пуанкаре. Эффект возврата означает возвращаемость фазовой траектории в произвольную  $\varepsilon$ -окрестность начального состояния сколь угодно большое количество раз. Времена возврата представляют собой случайную последовательность и требуют использования статистических методов для их анализа. Первоначально теорема о возвращаемости была доказана Пуанкаре [1] для автономных динамических систем, но позднее Н.Г. Четаев доказал ее для систем, находящихся под внешним периодическим воздействием [2]. Фазовые траектории, обладающие свойством возвращаемости, в математике называют устойчивыми по Пуассону. Таким образом, в качестве динамических систем, обладающих свойством возвращаемости, можно рассматривать неавтономные хаотические системы. Такие системы характеризуются наличием аттрактора, на котором можно задать вероятностное распределение, обладают свойством перемешивания (т.е. являются эргодическими) и являются устойчивыми по Пуассону. Для указанного класса систем применимы все основные результаты теории возвратов Пуанкаре, содержание и физическая интерпретация которых подробно описаны в работах [3–5].

В качестве примера указанного класса систем в данной статье рассматривается неавтономная система Рёсслера в режиме динамического хаоса [6]

$$\dot{x} = -y - x + A \sin(\omega_1 t), \quad \dot{y} = x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta + z(x - \mu), \quad (1)$$

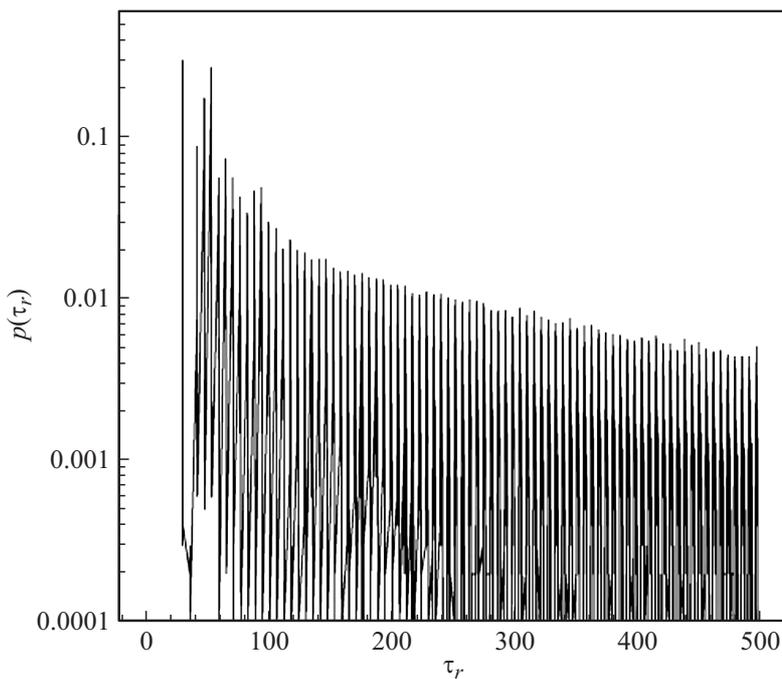
где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\mu$  — параметры автономной системы,  $A$  и  $\omega_1$  — амплитуда и частота внешней гармонической силы.

Вначале необходимо убедиться в том, что система (1) действительно характеризуется устойчивостью по Пуассону и подчиняется теоретическим закономерностям, доказанным для этого класса систем [2]. В качестве иллюстрации рассмотрим характер плотности распределения времен возврата в локальную окрестность выбранной точки аттрактора системы. С этой целью выбиралась начальная точка в трехмерном пространстве системы  $(x_0, y_0, z_0)$ , вводилась  $\varepsilon$ -окрестность этой точки в виде куба с ребром  $\varepsilon$ , численно определялась последовательность времен возврата в эту окрестность. На полученном множестве времен возврата строилась функция распределения  $p(\tau_r)$ . Установлено, что распределение  $p(\tau_r)$  удовлетворяет экспоненциальному закону [7]

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp\left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}\right), \quad \tau_r \geq \tau_r^*. \quad (2)$$

Нами установлено, что экспоненциальный закон (2) имеет место не только для возвратов в трехмерный куб с ребром  $\varepsilon$ , но и квадрат со стороной  $\varepsilon$ , взятый на плоскости  $XU$  проекции хаотического аттрактора. На рис. 1 приведены данные расчетов распределения времени возвратов в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0 = -6.75$ ,  $y_0 = 5.53$  в проекции трехмерного аттрактора неавтономной системы (1) на плоскость фазовых переменных  $XU$ . Как видно из рис. 1, огибающая функции  $p(\tau_r)$  для  $\tau_r \geq 120$  в логарифмическом масштабе линейно спадает с ростом  $\tau_r$ , что соответствует (2). При этом наклон аппроксимирующей прямой на графике (рис. 1) соответствует теоретическому закону (2) и равен  $k = -1/\langle \tau_r \rangle$ , где  $\langle \tau_r \rangle$  — среднее время возврата. Таким образом, эксперименты подтверждают тот факт, что в режиме хаоса система (1) характеризуется устойчивостью по Пуассону.

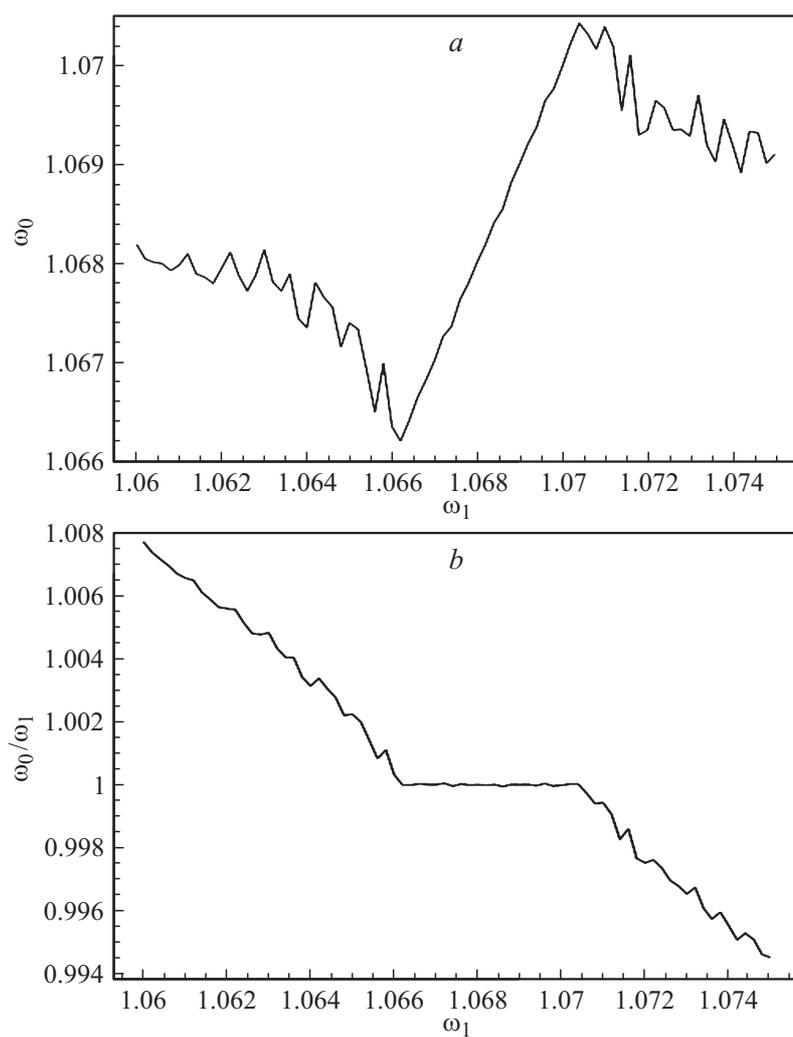
Перейдем к вопросу диагностики синхронизации хаоса с использованием статистики времен возврата Пуанкаре. Эффект фазочастотной синхронизации хаотических автоколебаний впервые был установлен численно и экспериментально в работах [8,9] с использованием



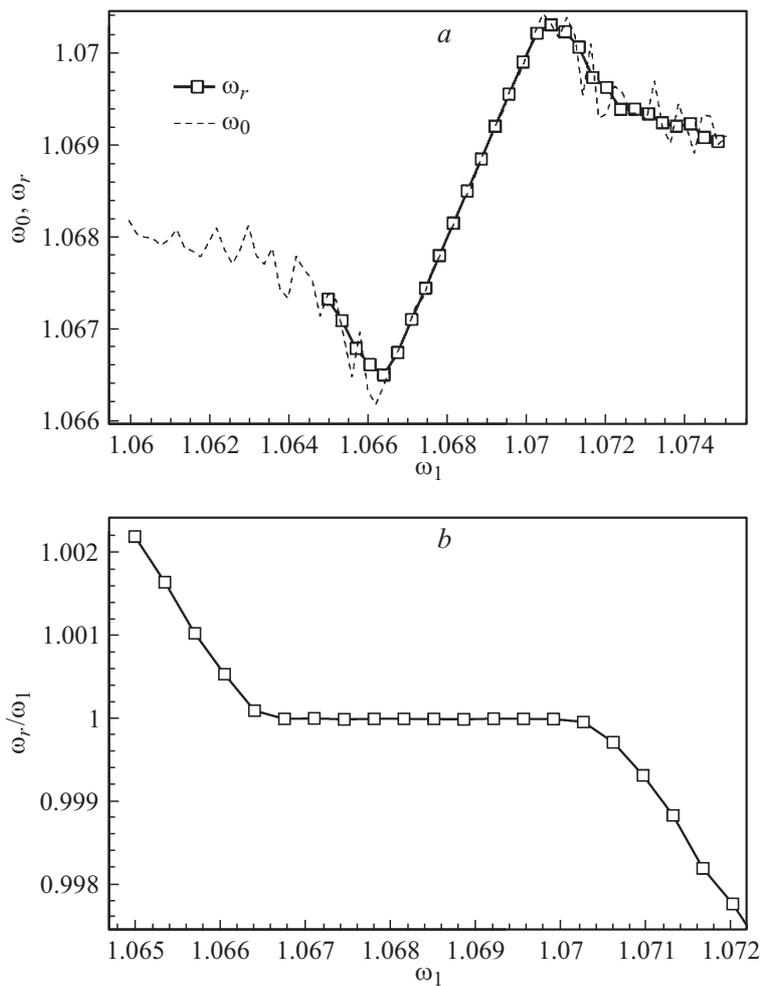
**Рис. 1.** Распределение времени возврата  $p(\tau_r)$  в системе (1) в окрестность точки  $x_0 = -6.75$ ,  $y_0 = 5.53$  размером  $\varepsilon = 0.1$ . Значения параметров:  $\alpha = \beta = 0.2$ ,  $\mu = 6.5$ ,  $A = 0.025$ ,  $\omega_1 = 1.0713$ .

неавтономного генератора Анищенко–Астахова [10,11]. Суть эффекта заключается в следующем. Хаотические аттракторы спирального типа характеризуются наличием ярко выраженной спектральной линии базовой частоты  $\omega_0$  на фоне сплошного спектра хаотического аттрактора. Если частота внешней силы  $\omega_1$  приближается к  $\omega_0$ , имеет место захват базовой частоты  $\omega_0$  сигналом внешнего воздействия и  $\omega_0 = \omega_1$  в некоторой конечной области синхронизации. Воспроизводя результаты работы [8] применительно к системе Рёсслера (1), мы получили аналогичные результаты [8], представленные на рис. 2.

Учитывая тот факт, что возвраты Пуанкаре являются следствием временной динамики системы, естественно ожидать, что статистика времен возврата будет отражать эффект синхронизации. Наши расчеты



**Рис. 2.** Зависимость базовой частоты  $\omega_0$  от частоты внешнего сигнала  $\omega_1$  (a) и зависимость отношения частот  $\omega_0/\omega_1$  от частоты  $\omega_1$  (b). Области синхронизации отвечает условие  $\omega_0/\omega_1 = 1$ . Параметры системы (1):  $\alpha = \beta = 0.2$ ,  $\mu = 6.5$ ,  $A = 0.025$ .



**Рис. 3.** Зависимость базовой частоты колебаний  $\omega_0$  и средней частоты возврата  $\omega_r$  от частоты внешнего воздействия  $\omega_1$  (a); зависимость отношения  $\omega_r/\omega_1$  от частоты внешнего воздействия  $\omega_1$  (b). Параметры системы:  $\alpha = \beta = 0.2$ ,  $\mu = 6.5$ ,  $A = 0.025$ . Возвраты рассматривались в окрестности точки с координатами  $x_0 = -6.756523$ ;  $y_0 = 5.536153$ . Размер области возврата  $\varepsilon = 12.0$ . Зависимость  $\omega_r$  от частоты внешнего воздействия  $\omega_1$  при различных значениях  $\varepsilon$ . Параметры системы:  $\alpha = \beta = 0.2$ ,  $\mu = 6.5$ ,  $A = 0.025$  (c).

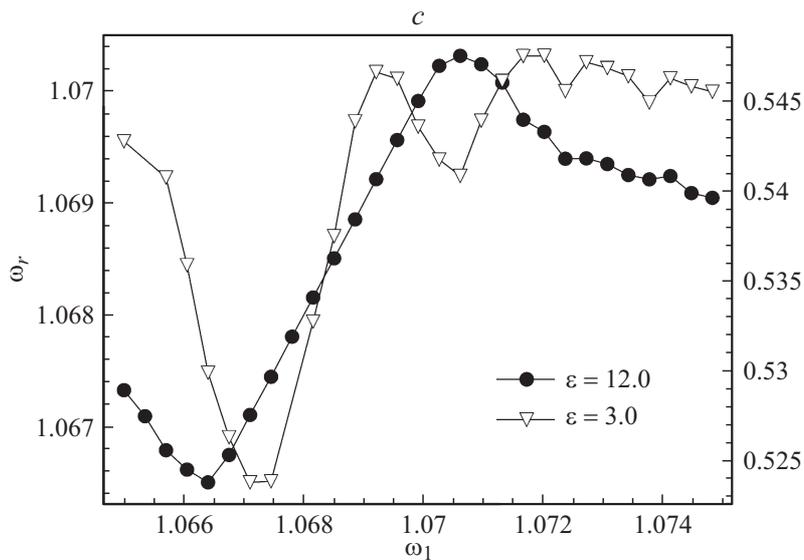


Рис. 3 (продолжение).

этот факт подтвердили. Основные результаты представлены на рис. 3. Мы ввели в рассмотрение среднюю частоту возвратов Пуанкаре  $\omega_r$ :

$$\omega_r = 2\pi f_r = 2\pi \frac{1}{\langle \tau_r \rangle}. \quad (3)$$

Исследования показали, что при входе в область синхронизации хаоса имеет место захват средней частоты возвратов Пуанкаре  $\omega_r$  частотой внешней силы  $\omega_1$  точно так же, как в классическом случае (рис. 2) имеет место захват базовой частоты  $\omega_0$ . Таким образом, эффекту внешней синхронизации хаотических автоколебаний отвечает эффект захвата средней частоты  $\omega_r$  возвратов Пуанкаре (или среднего времени возврата Пуанкаре  $\langle \tau_r \rangle$ ).

Необходимо отметить следующее. Точность определения размера области синхронизации с использованием эффекта захвата средней частоты возвратов существенно зависит от величины  $\varepsilon$ -окрестности точки аттрактора. В нашем случае полное соответствие данных рис. 2 и 3

имеет место, если  $\varepsilon = 12$ . При  $\varepsilon < 12$  размер области синхронизации будет определяться с ошибкой, которая возрастает с уменьшением  $\varepsilon$ . Сказанное иллюстрирует рис. 3, с.

Таким образом, установлено, что режиму внешней синхронизации хаотических колебаний гармоническим сигналом отвечает эффект захвата среднего времени возврата Пуанкаре (средней частоты возвратов) внешней силой. Отметим, что первой попыткой использовать теорию возвратов для диагностики синхронизации были результаты работы [12]. Данные расчетов получены на основе глобальной теории [5] путем определения так называемой размерности возвратов Афраймовича–Песина. Было показано [12], что в режиме почти полной синхронизации размерности Афраймовича–Песина взаимодействующих систем становятся равными. Так как оценкой размерности Афраймовича–Песина является величина положительного показателя Ляпунова [4], то результаты [12] являются достаточно просто объяснимыми. При этом расчеты размерности Афраймовича–Песина весьма трудоемки, а показатель Ляпунова можно определить достаточно просто.

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку работы в рамках гранта РФФИ № 13-02-00216.

## Список литературы

- [1] Пуанкаре А. // Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.
- [2] Четаев Н.Г. // Ученые записки Казанского ун-та. 1929. № 2. С. 198.
- [3] Анищенко В.С., Астахов С.В. // УФН. 2013. Т. 183. № 10.
- [4] Anishchenko V. et al. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2013. V. 18. Is. 12. P. 3423–3435.  
[dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.05.013](http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.05.013).
- [5] Афраймович В., Угальде Э., Уриас Х. Фрактальные размерности для времени возвращения Пуанкаре. М.–Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2011.
- [6] Rossler O.E. // Phys. Lett. A. 57. 1976. V. 57. P. 397.
- [7] Hirata M., Saussol B., Vaienti S. // Commun. Math. Phys. 1999. V. 206. P. 33.
- [8] Анищенко В.С., Постнов Д.Э. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 6. С. 569–573.
- [9] Anishchenko V. et al. // Int. J. of Bif. and Chaos. 1992. V. 2. N 3. P. 633.

- [10] Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е. // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. № 10. С. 1972.
- [11] Анищенко В.С., Астахов В.В. // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 6. С. 1109.
- [12] Afraimovich V.S., Lin W.W., Rulkov N.F. // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2000. V. 10. P. 2323.