

11

## Гиперсингулярное интегральное уравнение для плотности тока на поверхности микрополоскового вибратора

© Д.С. Ключев, Ю.В. Соколова

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара  
E-mail: klyuevd@yandex.ru

Поступило в Редакцию 20 сентября 2013 г.

Задача о распределении плотности тока на поверхности микрополоскового вибратора (МПВ), представляющего собой тонкую идеально проводящую полосу, нанесенную на диэлектрическую подложку, металлизированную с одной стороны, сведена к гиперсингулярному интегральному уравнению (ГСИУ). Представлены зависимости входного импеданса от длины вибратора, а также от толщины подложки.

Первыми работами по микрополосковым антеннам (МПА) следует считать [1,2]. К настоящему времени опубликовано очень много журнальных статей, монографий, описаны и запатентованы сотни конструктивных и функциональных разновидностей МПА и полосковых антенн (ПА). Столь пристальный интерес обусловлен в первую очередь достоинствами такого типа антенн: улучшенными массогабаритными характеристиками, возможностью применения современных технологий при серийном производстве как излучателей, так и устройств возбуждения, согласования и управления характеристиками излучения таких антенн. Основой МПА является слоистый высокочастотный диэлектрик, который выполняет как определенные „электрические“, так и конструктивные функции.

В [3] на основе тензорных функций Грина рассмотрены граничные задачи для ПА, расположенных на подложках плоской, цилиндрической и сферической форм. Основным недостатком, присущий многим публикациям, — это отсутствие самосогласованного решения задачи определения распределения плотности тока по поверхности МПА. Это,

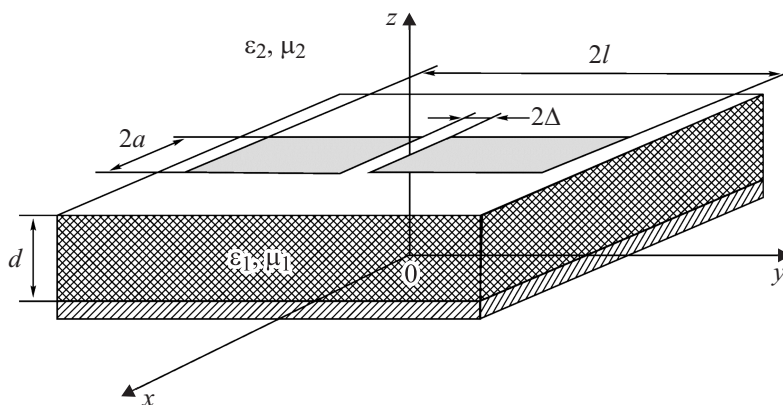


Рис. 1. Геометрия микрополоскового вибратора.

в частности, приводит к тому, что данное решение не позволяет непосредственно переходить от тока на излучающей поверхности к полю и обратно, т.е. не выполняются граничные условия. Самосогласованный метод, по сути, является методом физической регуляризации некорректных электродинамических задач [4] и заключается в получении сингулярного (гиперсингулярного) интегрального представления (СИП (ГСИП)) электромагнитного поля, переходящего при подстановке в него соответствующих граничных условий на излучающей поверхности в сингулярное (гиперсингулярное) интегральное уравнение (СИУ (ГСИУ)), численное решение которого является математически корректной задачей. Например, в [5] задача о распределении полного тока по поверхности МПВ сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода, численное решение которого, как известно, является некорректно поставленной задачей по Адамару [6]. В [7] задача о распределении плотности тока по поверхности МПВ сведена к СИУ с ядром Коши, однако оно справедливо лишь для узких МПВ, ширина которых много меньше их длины и длины волны. В данной статье описан самосогласованный метод решения задачи о распределении плотности тока по поверхности МПВ произвольной ширины.

МПВ представляет собой тонкий прямоугольный проводник длиной  $2l$  и шириной  $2a$ , расположенный на диэлектрической подложке

с односторонней металлизацией и возбуждаемый в области разрыва шириной  $2b$  генератором высокой частоты (рис. 1). Будем использовать физическую модель МПВ, аналогичную описанной в [7], за исключением пункта, накладывавшего ограничение на ширину вибратора, т.е. в [7] вибратор предполагался узким ( $2a \ll l, \lambda$ ), в данной статье это ограничение снято, т.е. вибратор может быть произвольной ширины. Итак:

1. МПВ предполагается бесконечно тонким и идеально проводящим.  
2. МПВ возбуждается сторонней гармонической ЭДС, включенной в зазор.

3. Электрический ток на поверхности проводника вместе с магнитным током в зазоре заменяется некоторым эквивалентным непрерывным в области зазора электрическим током с поверхностной плотностью  $\boldsymbol{\eta}(x, y)$ .

4. На поверхности МПВ справедливы следующие граничные условия:

$$\eta_y(x, -l) = \eta_y(x, +l) = 0, \quad \eta_x(-a, y) = \eta_x(a, y) = 0, \\ \eta_y(-a, y) = \eta_y(a, y) = \infty, \quad \eta_x(x, -l) = \eta_x(x, l) = \infty, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_\tau(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-a, a], y \in [-l, -b] \cup [b, l], \\ -\mathbf{E}_\tau^{ext} & \text{при } x \in [-a, a], y \in [-b, b], \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}_\tau^{ext} = \{E_x^{ext}, E_y^{ext}\}$  — тангенциальная составляющая напряженности стороннего электрического поля в зазоре вибратора.

На плоскости  $z = d$  Фурье-образ  $\vec{\mathcal{E}}_\tau = \{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y\}$  тангенциальной составляющей напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_\tau$  и Фурье-образ  $\vec{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y\}$  поверхностной плотности тока  $\boldsymbol{\eta}$  на вибраторе связаны через матрицу поверхностных импедансов  $[Z]$  плоскости  $z = d$  следующим образом [8]:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_y \\ \mathcal{F}_x \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $Z_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — элементы матрицы поверхностных импедансов  $[Z]$ , представляющие собой функции переменных Фурье-пространства  $\beta, h$ :  $Z_{ij} = Z_{ij}(\beta, h)$ . Вывод элементов  $Z_{ij}$  подробно описан в [7]. Здесь приведем в явном виде лишь элемент  $Z_{11}$ , который будет использован в дальнейшем:

$$Z_{11} = \frac{\alpha[\omega\mu_0\mu_1\mu_2r_1r_2]}{\alpha[\mu_1r_1\gamma_2 + \mu_2r_2\gamma_1i \operatorname{ctg}(r_1y)] - \beta^2h^2[\mu_1r_1 + \mu_2r_2i \operatorname{ctg}(r_1y)]^2}, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \left[ \mu_1 r^{(1)} (k^2 \varepsilon_2 \mu_2 - h^2) + \mu_2 r^{(2)} (k^2 \varepsilon_1 \mu_1 - h^2) i \operatorname{ctg}(r^{(1)} y) \right],$$

$$\gamma_{1,2} = (k^2 \varepsilon_{1,2} \mu_{1,2} - \beta^2).$$

Предположим, что напряженность стороннего электрического поля имеет лишь продольную составляющую  $E_y^{ext}$ , тогда продольная составляющая плотности тока на поверхности МПВ  $\eta_y$  будет много больше ее поперечной составляющей  $\eta_x$ , и в дальнейшем будем учитывать только продольную составляющую поверхностной плотности тока  $\eta_y$ , не забывая при этом, что она является функцией двух переменных —  $x$  и  $y$ . Запишем следующее выражение для  $E_y$  в плоскости  $z = d$  [7]

$$E_y(x, y, z = d) = \int_{-a}^a \int_{-l}^l \eta_y(x', y') \mathcal{Z}_{11}(x', y'; x, y) dx' dy', \quad (5)$$

где

$$\mathcal{Z}_{11}(x', y'; x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{11}(\beta, h) e^{-i\beta(x-x')} e^{-ih(y-y')} d\beta dh. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что асимптотическое представление  $Z_{11}(\beta, h)$  в (14) при  $|\beta| \rightarrow \infty$ ,  $|h| \rightarrow \infty$

$$Z_{11}^{\infty} = i\omega\mu_0 \left[ \frac{h^2}{k^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\sqrt{h^2 + \beta^2}} - \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_2 + \mu_1)\sqrt{h^2 + \beta^2}} \right], \quad (7)$$

поэтому интегралы по  $\beta$  и  $h$  в (16) являются расходящимися. Устраним эту расходимость следующим образом. В подынтегральном выражении в (15) прибавим и вычтем слагаемые с асимптотическим множителем  $Z_{11}^{\infty}(\beta, h)$ . В результате можно записать следующее ГСИП для  $E_y$

на плоскости  $z = d$ :

$$\begin{aligned}
 E_y(x, y, z = d) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-a}^a \int_{-l}^l \eta_y(x', y') \\
 &\times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Z_{11}(\beta, h) - Z_{11}^{\infty}(\beta, h)) e^{-i\beta(x-x')} e^{-ih(y-y')} d\beta dh \right) dx' dy' \\
 &+ \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-l}^l \eta_y(x', y') \left( \frac{(x-x')^2 - 2(y-y')^2}{k^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)R^5} - \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_2 - \mu_1)R} \right) dx' dy'.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя (8) в граничное условие (2), получаем ГСИУ относительно неизвестной функции  $\eta_y(x', y')$ . Это ГСИУ можно решить, например, методом дискретных вихрей [9].

Ток на поверхности вибратора определяется следующим выражением:

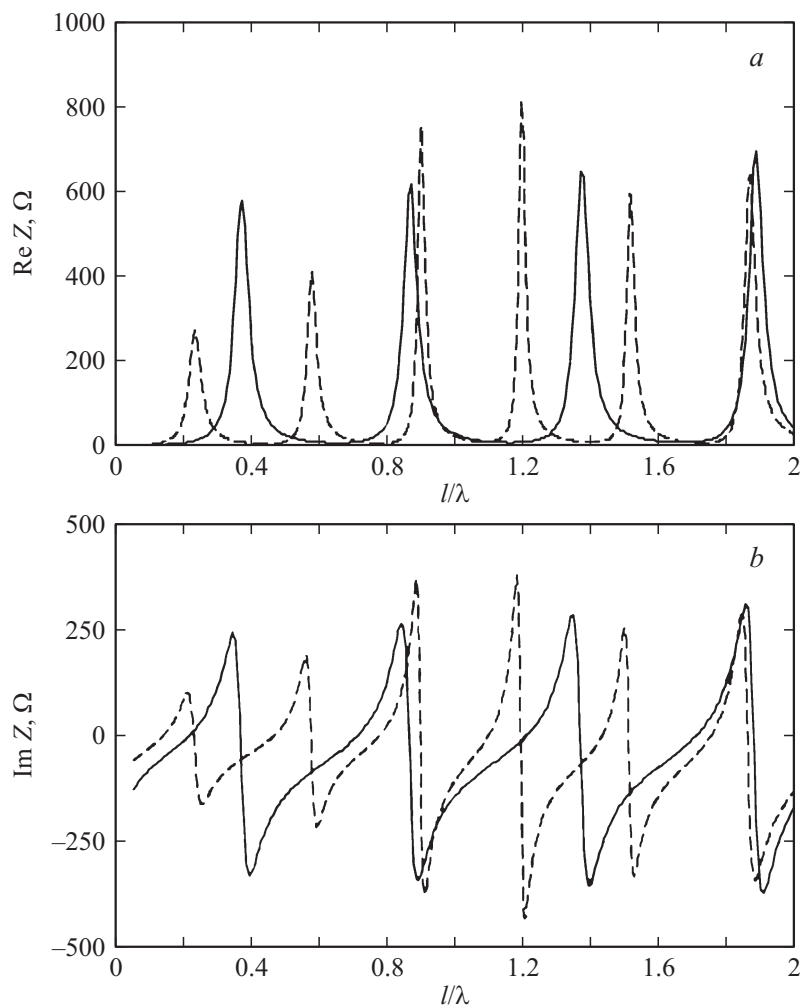
$$I_y(y) = \int_{-a}^a \eta_y(x, y) dx.$$

Входное сопротивление вибратора вычисляется по формуле

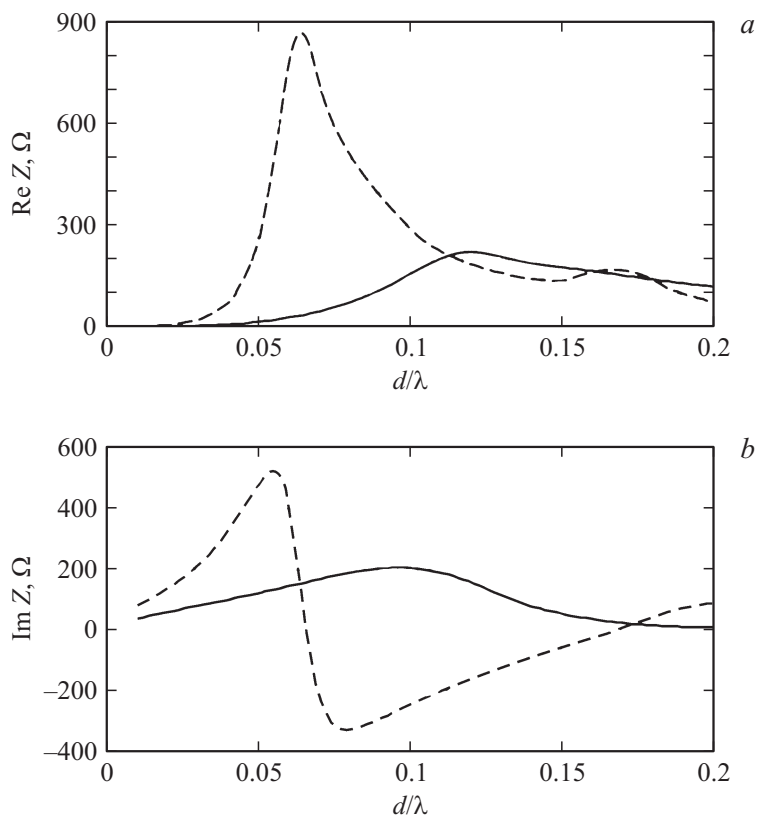
$$Z = \frac{U}{I_y(0)},$$

где  $U$  — напряжение в зазоре вибратора.

С помощью разработанных численных алгоритмов были рассчитаны зависимости входного сопротивления от длины плеча вибратора и толщины подложки при различных значениях ее диэлектрической проницаемости. На рис. 2 представлены зависимости действительной ( $a$ ) и мнимой ( $b$ ) частей входного сопротивления МПВ от длины плеча, нормированной на длину волны (сплошной линией показаны графики для вибратора, расположенного на подложке с  $\varepsilon_1 = 1$ , а штриховой линией —  $\varepsilon_1 = 3$ ). Расчеты выполнены для вибраторов со следующими параметрами: ширина вибратора  $2a = 0.05\lambda$ , ширина зазора  $2b = 0.02\lambda$ , толщина подложки  $d = 0.1\lambda$ , относительная магнитная проницаемость подложки  $\mu_1 = 1$ . Как видно из рис. 2, при изменении  $l/\lambda$  от 0 до 2



**Рис. 2.** Зависимости входного сопротивления микрополоскового вибратора от длины плеча (сплошная линия —  $\epsilon_1 = 1$ , штриховая линия —  $\epsilon_1 = 3$ ):  $a$  — активная часть,  $b$  — реактивная часть.



**Рис. 3.** Зависимости входного сопротивления микрополоскового вибратора от толщины подложки (сплошная линия —  $\epsilon_1 = 2.4$ , штриховая линия —  $\epsilon_1 = 3.5$ ):  $a$  — активная часть,  $b$  — реактивная часть.

наблюдается ряд резонансов. Первый резонанс возникает при  $l/\lambda \approx 0.25$  для подложки с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1 = 1$ , а для подложки с  $\epsilon_1 = 3$  — при  $l/\lambda \approx 0.15$ , т.е. резонансы смещаются по частоте вследствие так называемого эффекта укорочения. На рис. 3 представлены графики зависимости входного сопротивления МПВ от толщины подложки, нормированной на длину волны, при различных значениях ее диэлектрической проницаемости ( $a$  — действительная часть,  $b$  —

мнимая часть). Расчеты выполнены для вибратора со следующими параметрами: длина вибратора  $2l = 0.5\lambda$ , ширина вибратора  $2a = 0.028\lambda$ , ширина зазора  $2b = 0.02\lambda$ . Как видно из рис. 3, резонансы (мнимая часть обращается в ноль) наблюдаются при  $d/\lambda \approx 0.065$  и  $d/\lambda \approx 0.165$  для случая  $\varepsilon_1 = 3.5$ , а для случая  $\varepsilon_1 = 2.4$  — при  $d/\lambda \approx 0.2$ . Наличие этих резонансов подтверждено результатами численного моделирования в CST MicrowaveStudio. Отметим, что в известной авторам литературе об этих резонансах не упоминается.

## Список литературы

- [1] *Munson R.E.* // IEEE Trans. 1974. V. AP-22. N 1. P. 74–77.
- [2] *Hammerstad E.O.* // Proc. of 5th European Microwave Conf. Hamburg. 1975. P. 268–272.
- [3] *Панченко Б.А., Князев С.Т., Нечаев Ю.Б.* и др. Электродинамический расчет характеристик излучения полосковых антенн. М.: Радио и связь, 2002. 256 с.
- [4] *Неганов В.А.* Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики. М.: Сайнс-Пресс, 2008. 450 с.
- [5] *Чебышев В.В.* Микрополосковые антенны в многослойных средах. М.: Радиотехника, 2007. 160 с.
- [6] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
- [7] *Неганов В.А., Клюев Д.С., Соколова Ю.В.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. LI. № 12. С. 1061–1070.
- [8] *Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П.* Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневисоких частот. М.: Наука. Физматлит, 1996. 304 с.
- [9] *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.