Краткие сообщения

01

Эволюция слабокоррелированных систем

© И.Н. Косарев

Институт проблем и информационных технологий РАН,
140700 Шатура, Московская область, Россия
e-mail: kossarev2006@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 6 февраля 2013 г.)

Постороен пропагатор с эффективным действием для квантовой многочастичной системы в приближении, учитывающем только парные корреляции между частицами. Теория легко обобщается на случай двух сортов частиц. В случае разреженных плазмы и газа этот пропагатор для одночастичной матрицы плотности дает решение кинетической задачи на временах, больших времени релаксации.

Основной задачей кинетической теории является нахождение одночастичной функции распределения частиц. В [1] был построен пропагатор для функций распределения частиц разреженных плазмы и газа, действующий в течение промежутка времени, меньшем по сравнению со временем релаксации. Этот пропагатор дает решение в квадратурах кинетической задачи для плазмы и газа на малых временах.

Далее рассмотрим слабокоррелированную квантовую систему из $N \gg 1$ частиц, в которой учтены только парные корреляции между частицами. Такое приближение является стандартным в кинетической теории разреженного газа [2], N — частичная матрица плотности имеет вид

$$\rho_N(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N;\mathbf{r}'_1,\ldots,\mathbf{r}'_N;t)=\prod_{i=1,N}\rho(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}'_i,t)$$
$$+\sum_{i,j=1,N;i>j} g(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j;\mathbf{r}'_i,\mathbf{r}'_j;t)\prod_{k=1,N;k\neq i,j}\rho(\mathbf{r}_k,\mathbf{r}'_k,t), \qquad (1)$$

где корреляционная матрица плотности $g(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j;\mathbf{r}'_i,\mathbf{r}'_j;t)$ выражается через одночастичные матрицы плотности $\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$ [2] и определяет интеграл столкновений в кинетическом уравнении,

$$\rho(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}'_1,t)$$
$$=\int\frac{d\mathbf{r}_2}{V}\ldots\frac{d\mathbf{r}_N}{V}\rho_N(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N;\mathbf{r}'_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N;t),$$

$$\int\frac{d\mathbf{r}}{V}\rho(\mathbf{r},\mathbf{r},t)=1. \qquad (2)$$

Здесь V является объемом системы.

Пропагатор для N-частичной матрицы плотности имеет вид [3]

$$K_N(f,in)=\int D[\mathbf{r}_1(t)]D[\mathbf{r}'_1(t)]\ldots D[\mathbf{r}_N(t)]D[\mathbf{r}'_N(t)]$$
$$\times\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_N-\frac{i}{\hbar}S'_N\right),$$

$$S_N=\int_{t_{in}}^{t_f}dtL_N,$$

$$L_n=\sum_{i=1,N}\left(\frac{m\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}-U^{ext}(\mathbf{r}_i,t)-\frac{1}{2}\sum_{j=1,N;j\neq i}U(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\right), \qquad (3)$$

где S_N и L_N являются действием и лагранжианом рассматриваемой системы соответственно, $U(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$ является потенциальной энергией взаимодействия частиц, $U^{ext}(\mathbf{r},t)$ является потенциальной энергией внешнего поля, m — масса частицы. Траектория в функциональном интеграле (3) удовлетворяют граничным условиям (t_{in} — начальный момент времени, t_f — конечный момент времени):

$$\mathbf{r}(t_{in})=\mathbf{r}_{in},\ \mathbf{r}(t_f)=\mathbf{r}_f;\quad \mathbf{r}'(t_{in})=\mathbf{r}'_{in},\ \mathbf{r}'(t_f)=\mathbf{r}'_f. \qquad (4)$$

Матрица плотности в конечный момент времени определяется соотношением

$$\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}',t_f)=\int K_1(f,in)\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}',t_{in})d\mathbf{r}d\mathbf{r}', \qquad (5)$$

где $K_1(f,in)$ является искомым пропагатором с эффективным действием для одночастичной матрицы плотности. С другой стороны (с учетом (2)),

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, t_f)V^{N-1} = \int K_N(f, in)$$
$$\times \rho_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \ldots, \mathbf{r}'_N; t_{in}) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}'_2 \ldots d\mathbf{r}_N d\mathbf{r}'_N$$
$$\times \delta(\mathbf{r}_{2f} - \mathbf{r}'_{2f}) d\mathbf{r}_{2f} d\mathbf{r}'_{2f} \ldots \delta(\mathbf{r}_{Nf} - \mathbf{r}'_{Nf}) d\mathbf{r}_{Nf} d\mathbf{r}'_{Nf}, \tag{6}$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — δ-функция. Во многих множителях в (6), которые определяют взаимодействие выделенной частицы с самосогласованным полем, точная потенциальная энергия взаимодействия заменяется на усредненную одночастичную потенциальную энергию:

$$\sum_{j=2,N; j\neq i} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \approx (N-2)\Phi(\mathbf{r}_i, t),$$

$$\Phi(\mathbf{r}_i, t) = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}, t). \tag{7}$$

Замена (7) соответствует приближению самосогласованного поля, когда пренебрегается корреляциями между частицами. Сопоставление (5) и (6) с учетом (7), (3) дает

$$K_1(f, in) = \int D[\mathbf{r}] D[\mathbf{r}'] \Bigg[\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_1[\mathbf{r}] - \frac{i}{\hbar} S_1[\mathbf{r}'] \right\}$$
$$\times \prod_{l=2,N} \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_{lf} \delta(\mathbf{r}_{lf} - \mathbf{r}'_{lf}) d\mathbf{r}'_{lf} d\mathbf{r}_l d\mathbf{r}'_l \rho(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}'_l, t_{in})$$
$$\times \int D[\mathbf{r}_l] D[\mathbf{r}'_l] \exp\Bigg\{ \frac{i}{\hbar} (S_1[\mathbf{r}_l] - S_1[\mathbf{r}'_l]) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_f} dt \Big(U(\mathbf{r}_l - \mathbf{r})$$
$$- U(\mathbf{r}'_l - \mathbf{r}') + \frac{1}{2}(N-2)\big(\Phi(\mathbf{r}_l, t) - \Phi(\mathbf{r}'_l, t)\big)\Big) \Bigg\}$$
$$+ \frac{1}{2V^2} \sum_{k,j=2,N; k\neq j} \int d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}'_k d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}'_j d\mathbf{r}_{kf}$$
$$\times \delta(\mathbf{r}_{kf} - \mathbf{r}'_{kf}) d\mathbf{r}'_{kf} d\mathbf{r}_{jf} \delta(\mathbf{r}_{jf} - \mathbf{r}'_{jf}) d\mathbf{r}'_{jf} g(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j; \mathbf{r}'_k, \mathbf{r}'_j; t_{in})$$
$$\times \int D[\mathbf{r}_k] D[\mathbf{r}'_k] D[\mathbf{r}_j] D[\mathbf{r}'_j]$$
$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (S_3[\mathbf{r}, \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j] - S_3[\mathbf{r}', \mathbf{r}'_k, \mathbf{r}'_j]) \right\}$$
$$\times \prod_{l=2,N; l\neq k,j} \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_{lf} \delta(\mathbf{r}_{lf} - \mathbf{r}'_{lf}) d\mathbf{r}'_{lf} d\mathbf{r}_l d\mathbf{r}'_l \rho(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}'_l, t_{in})$$
$$\times \int D[\mathbf{r}_l] D[\mathbf{r}'_l] \exp\Bigg\{ \frac{i}{\hbar} (S_1[\mathbf{r}_l] - S_1[\mathbf{r}'_l]) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_f} dt \Big(U(\mathbf{r}_l - \mathbf{r})$$
$$- U(\mathbf{r}'_l - \mathbf{r}') + \frac{1}{2}(N-4)\big(\Phi(\mathbf{r}_l, t) - \Phi(\mathbf{r}'_l, t)\big)\Big) \Bigg\} \Bigg]. \tag{8}$$

В пределе $N \to \infty$, $V \to \infty$, $n = N/V$ и с учетом соотношения $\lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e$ из (8) получаем

$$K_1(f, in) = \int D[\mathbf{r}] D[\mathbf{r}']$$
$$\times \Bigg[\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_1[\mathbf{r}] - \frac{i}{\hbar} S_1[\mathbf{r}'] + nV^{coll}[\mathbf{r}, \mathbf{r}'] \right\}$$
$$+ \frac{n^2}{2} \int d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}'_j d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}'_k d\mathbf{r}_{jf} d\mathbf{r}'_{jf} \delta(\mathbf{r}_{jf} - \mathbf{r}'_{jf}) d\mathbf{r}_{kf} d\mathbf{r}'_{kf}$$
$$\times \delta(\mathbf{r}_{kf} - \mathbf{r}'_{kf}) g(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k; \mathbf{r}'_j, \mathbf{r}'_k; t_{in}) \int D[\mathbf{r}_j] D[\mathbf{r}'_j] [D\mathbf{r}_k] D[\mathbf{r}'_k]$$
$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (S_3[\mathbf{r}, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k] - S_3[\mathbf{r}', \mathbf{r}'_j, \mathbf{r}'_k]) + nV^{coll}[\mathbf{r}, \mathbf{r}'] \right\} \Bigg], \tag{9}$$

где функционал

$$V^{coll}[\mathbf{r}, \mathbf{r}'] = \int d\mathbf{r}_{kf} d\mathbf{r}'_{kf} \delta(\mathbf{r}_{kf} - \mathbf{r}'_{kf}) d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}'_k \rho(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}'_k, t_{in})$$
$$\times \int D[\mathbf{r}_k] D[\mathbf{r}'_k]$$
$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(S_1[\mathbf{r}_k] - S_1[\mathbf{r}'_k] - \frac{n}{2} \int_{t_{in}}^{t_f} dt \big(\varphi(\mathbf{r}_k, t) - \varphi(\mathbf{r}'_k, t) \big) \right) \right\}$$
$$\times \left(\exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\int_{t_{in}}^{t_f} dt \big(U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) - U(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_k) \big) \right) \right\} - 1 \right),$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = V\Phi(\mathbf{r}, t) \tag{10}$$

имеет структуру столкновительного объема адиабатической теории уширения спектральных линий [4]. Этот функционал имеет сложную зависимость от траекторий частицы, однако в случае разреженного газа он может быть учтен в (9) по теории возмущений по параметру $nr_W^3 \ll 1$, где вайскопфовский радиус r_W является характерным для $V^{coll}[\mathbf{r}, \mathbf{r}']$. В свою очередь, влияние среднего поля $\varphi(\mathbf{r}, t)$ на столкновительный объем (10) также определяется этим малым параметром. Поэтому можно заменить

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \to \varphi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \int U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \rho^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, t), \tag{11}$$

где $\rho^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, t)$ — является матрицей плотности при $n = 0$. Таким образом, (9)–(11) можно рассматривать как решение задачи об эволюции одночастичной матрицы плотности для разреженного газа. В общем случае задача остается достаточно сложной, так как для вычисления второго слагаемого в (9) необходимо решить задачу динамики трех частиц. Для кулоновского потенциала $U(\mathbf{r}) = Z^2e^2/r$ параметр, определяющий применимость теории возмущений для рассеяния частиц (фермионов), $Z^2e^2/\hbar v_F \sim n^{1/3} r_W \ll 1$ [5] (здесь скорость Ферми v_F

является характерной скорсотью, r_W равен длине Ландау). Поэтому потенциальная энергия в функциональных интегралах (9), (10) может быть учтена в рамках теории возмущений. В этом случае (9)–(11) является решением задачи об эволюции одночастичной матрицы плотности в квадратурах.

Для плазмы необходимо рассматривать два сорта частиц: a, b. Пропагатор для сорта частиц a имеет вид

$$K_a(f, in) = \int D[\mathbf{r}_a]D[\mathbf{r}'_a]\Bigg[\exp\bigg\{\frac{i}{\hbar}S_1[\mathbf{r}_a] - \frac{i}{\hbar}S_1[\mathbf{r}'_a] + n_a V_a^{coll}[\mathbf{r}_a, \mathbf{r}'_a] + n_b V_b^{coll}[\mathbf{r}_a, \mathbf{r}'_a]\bigg\} + \sum_{jk=aa,ab,bb}\frac{n_j n_k}{2} \times \int d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}'_j d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}'_k d\mathbf{r}_{jf} d\mathbf{r}'_{jf}\delta(\mathbf{r}_{jf} - \mathbf{r}'_{jf}) d\mathbf{r}_{kf} d\mathbf{r}'_{kf} \times \delta(\mathbf{r}_{kf} - \mathbf{r}'_{kf}) g_{jk}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k; \mathbf{r}'_j, \mathbf{r}'_k; t_{in}) \int D[\mathbf{r}_j]D[\mathbf{r}'_j]D[\mathbf{r}_k]D[\mathbf{r}'_k] \times \exp\bigg\{\frac{i}{\hbar}(S_3[\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k] - S_3[\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_j, \mathbf{r}'_k]) + n_a V_a^{coll}[\mathbf{r}_a, \mathbf{r}'_a] + n_b V_b^{coll}[\mathbf{r}_a, \mathbf{r}'_a]\bigg\}\Bigg], \quad (12)$$

где столкновительные объемы определяются выражениями

$$V_a^{coll}[\mathbf{r}_a, \mathbf{r}'_a] = \int d\mathbf{r}_{kf} d\mathbf{r}'_{kf}\delta(\mathbf{r}_{kf} - \mathbf{r}'_{kf}) d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}'_k \rho_a(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}'_k, t_{in}) \times \int D[\mathbf{r}_k]D[\mathbf{r}'_k]\Bigg[\exp\bigg\{\frac{i}{\hbar}\bigg(S_{1a}[\mathbf{r}_k] - S_{1a}[\mathbf{r}'_k] - \frac{1}{2}\int_{t_{in}}^{t_f} dt\big(n_a(\varphi_{aa}(\mathbf{r}_k, t) - \varphi_{aa}(\mathbf{r}'_k, t)) + n_b(\varphi_{ab}(\mathbf{r}_k, t) - \varphi_{ab}(\mathbf{r}'_k, t))\big)\bigg)\bigg\}\bigg(\exp\bigg\{-\frac{i}{\hbar}\bigg(\int_{t_{in}}^{t_f} dt\big(U_{aa}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_k) - U_{aa}(\mathbf{r}'_a - \mathbf{r}'_k)\big)\bigg)\bigg\} - 1\bigg),$$

$$V_b^{coll}[\mathbf{r}_a, \mathbf{r}'_a] = \int d\mathbf{r}_{kf} d\mathbf{r}'_{kf}\delta(\mathbf{r}_{kf} - \mathbf{r}'_{kf}) d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}'_k \rho_b(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}'_k, t_m) \times \int D[\mathbf{r}_k]D[\mathbf{r}'_k]\exp\bigg\{\frac{i}{\hbar}\bigg(S_{1b}[\mathbf{r}_k] - S_{1b}[\mathbf{r}'_k] - \frac{n_b}{2}\int_{t_{in}}^{t_f} dt\big(\varphi_{bb}(\mathbf{r}_k, t) - \varphi_{bb}(\mathbf{r}'_k, t)\big)\bigg)\bigg\} \times \bigg(\exp\bigg\{-\frac{i}{\hbar}\bigg(\int_{t_m}^{t_f} dt\big(U_{ab}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_k) - U_{ab}(\mathbf{r}'_a - \mathbf{r}'_k)\big)\bigg)\bigg\} - 1\bigg),$$

$$\varphi_{ab}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_1 U_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\rho_b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, t). \quad (13)$$

Соотношения (11)–(13) можно использовать и в случае релятивистской классической плазмы [1]. При этом берется классический предел пропагатора, в котором учитывается только классическая траектория. Также необходимо использовать релятивистские действия для частиц, векторный потенциал в потенциальной энергии взаимодействия и релятивистские факторы в предэкспоненциальном множителе классического пропагатора [6,7].

Итак, полученные здесь выражения (9)–(13) для пропагаторов одночастичной матрицы плотности дают решение кинетической задачи на временах, бо́льших времени релаксации, в случае разреженных кулоновских плазмы и газа.

Список литературы

[1] *Косарев И.Н.* // УФН. 2006. Т. 176. С. 1267.
[2] *Климонтович Ю.Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975.
[3] *Фейнман З., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
[4] *Anderson P.W.* // Phys. Rev. 1949. Vol. 76. P. 647.
[5] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2004.
[6] *Kosarev I.N.* // Proc. of 37th EPS Conf. ond Plasma Physics. Europhys. Conf. Abst. 2010. Vol. 34A. P. 4.404.
[7] *Косарев И.Н.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 3. С. 137–140.