

03

Нелинейное вырожденное резонансное взаимодействие волн на заряженной поверхности жидкости

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 14 ноября 2013 г.)

В аналитическом асимптотическом исследовании второго порядка малости изучены физические закономерности нелинейного вырожденного резонансного обмена энергией между волнами на плоской заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости. Получена система дифференциальных уравнений, описывающих временную эволюцию амплитуд, взаимодействующих в нелинейном вырожденном резонансе волн. Выяснилось, что количество вырожденных резонансов в нелинейных расчетах (с учетом зависимости частоты волн от величины конечной амплитуды) оказывается бесконечным в отличие от их счетности при расчетах на основе частот, определенных в линейной теории. Положение нелинейных вырожденных резонансов зависит от величины плотности поверхностного заряда (перпендикулярной свободной поверхности жидкости напряженности внешнего электростатического поля), тогда как расчеты на основе частот, определенных в линейной теории, такой зависимости не показали. Обнаружено, что при приближении к состоянию точного вырожденного резонанса по волновому числу (в его ближайшей окрестности) происходит смена направления перекачки энергии: от направления перекачки из короткой волны в длинную волну на противоположное.

Введение

Асимптотическое аналитическое исследование нелинейных периодических волн на незаряженной поверхности жидкости началось около века назад [1–2] и активно продолжалось в последующие годы (см., например, [3–5]). Позднее возник интерес к исследованию нелинейных волн на заряженной поверхности жидкости [6–11], к особенностям их резонансного взаимодействия [12–15]. Настоящая работа посвящена изучению не проясненного до конца вопроса о физических закономерностях межволнового обмена энергией в положениях внутренних нелинейных вырожденных резонансов.

Под нелинейным внутренним взаимодействием волн в изложенных ниже асимптотических расчетах второго порядка малости будем понимать взаимодействие волн, определяющих начальную деформацию, и волн с кратно увеличенным волновым числом, возбужденных за счет нелинейности гидродинамических уравнений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно глубокую идеальную, несжимаемую идеально проводящую жидкость, характеризующуюся массовой плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения свободной поверхности γ , которая заполняет полупространство $z \leq 0$ в декартовой системе координат. Плоскость $z = 0$ примем совпадающей со свободной невозмущенной поверхностью жидкости, а ось OZ направим вертикально вверх параллельно вектору напряженности электростатического поля \mathbf{E}_0 , которое существует в области пространства, не занятой жидкостью ($\mathbf{E}_0 = E_0(\mathbf{e}_z)$), где \mathbf{e}_z — орт оси OZ . Вся

система находится в гравитационном поле \mathbf{g} так, что $\mathbf{E}_0 \parallel -\mathbf{g}$.

Предполагаем, что на поверхности жидкости существует волновое движение во всем спектре длин волн весьма малой (тепловой) амплитуды с характерной высотой гребней $\propto \sqrt{\kappa T / \gamma}$, где $\kappa = 8.31 \cdot 10^7 \text{ erg}(\text{mol K})$ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура [16]. При температурах порядка комнатной тепловая амплитуда для всех жидкостей меньше либо порядка 1 \AA . За счет нелинейного резонансного взаимодействия амплитуды некоторых из этих волн могут увеличиваться.

Примем, что в начальный момент времени поверхность жидкости искажена волновым возмущением конечной безразмерной амплитуды ε и ее форма определяется выражением вида $\xi \propto \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(k_j x)$; $\sum_{j \in \Xi} h_j = 1$, где h_j — парциальный вклад j -й волны, Ξ — множество номеров волновых чисел k_j , определяющих начальную деформацию. Амплитуду ε (обезразмеренную на капиллярную постоянную жидкости $\delta \equiv \sqrt{\gamma / \rho g}$) будем рассматривать в качестве малого параметра. Примем также, что в начальный момент времени скорость движения поверхности жидкости равняется нулю.

Проследим эволюцию заданного возмущения во времени с точностью до второго порядка малости и проанализируем особенности нелинейного резонансного взаимодействия волн.

Задачу будем решать в модели потенциального движения жидкости, в рамках которой поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ определяется гидродинамическим потенциалом $\psi(\mathbf{r}, t)$: $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi(\mathbf{r}, t)$. Полагая, что гидродинамические скорости много меньше скорости распространения электромагнитного сигнала, определим напряженность

электрического поля через электрический потенциал $\Phi(\mathbf{r}, t)$: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка имеет вид

$$d_t \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{r}, t) + \mathbf{g}, \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$z \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{E}_0.$$

На свободной поверхности жидкости граничные условия будут иметь вид

$$z = \xi: \quad \partial_t F(x, z, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \nabla F(x, z, t) = 0,$$

$$F(x, z, t) \equiv z - \xi(x, t) = 0,$$

$$P - P_{\text{atm}} + P_e - P_\gamma = 0, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1)$$

где P — гидродинамическое давление в жидкости, а давления электрического поля P_e и капиллярных сил P_γ определяются следующими выражениями:

$$P_e = \frac{\epsilon_{\text{ex}}}{8\pi} \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi(\mathbf{r}, t), \quad P_\gamma = \gamma \nabla \mathbf{n},$$

где ϵ_{ex} — диэлектрическая проницаемость внешней среды, вектор нормали к свободной поверхности \mathbf{n} определяется ее формой

$$\mathbf{n} = \nabla F(x, z, t) / |\nabla F(x, z, t)|.$$

Начальные условия запишем в виде

$$t = 0: \quad \xi(x, t) = \epsilon \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j \cos(k_j x), \quad \partial_t \xi(x, t) = 0.$$

В рамках модели потенциального движения жидкости перейдем от векторных полей к скалярным, при этом математическая формулировка задачи (1) в терминах гидродинамического и электрического потенциалов примет вид

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\partial_t \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \nabla \psi(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho} P(\mathbf{r}, t) - gz,$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \psi(z, x, t) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{E}_0,$$

$$z = \xi: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\partial_t \xi(x, t) - \partial_z \psi(\mathbf{r}, t) + \partial_x \psi(\mathbf{r}, t) \partial_x \xi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$P - P_{\text{atm}} + \frac{\epsilon_{\text{ex}}}{8\pi} \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi(\mathbf{r}, t)$$

$$+ \gamma \partial_x \left(\frac{\partial_x \xi(x, t)}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi(x, t))^2}} \right) = 0,$$

$$t = 0: \quad \xi(x, 0) = \epsilon \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j \cos(k_j x), \quad \partial_t \xi(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $\rho = \gamma = g = 1$, и сохраним за всеми безразмерными физическими величинами прежние обозначения.

2. Решение задачи

Представим искомые в краевой задаче (2) функции $\xi(x, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi(\mathbf{r}, t)$ в виде разложений по степеням параметра ϵ :

$$\xi(x, t) = \epsilon \xi_1(x, T_0, T_1) + \epsilon^2 \xi_2(x, T_0) + O(\epsilon^3),$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \epsilon \psi_1(\mathbf{r}, T_0, T_1) + \epsilon^2 \psi_2(\mathbf{r}, T_0) + O(\epsilon^3),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) + \Phi_0(z) + \epsilon \Phi_1(\mathbf{r}, T_0, T_1) + \epsilon^2 \Phi_2(\mathbf{r}, T_0) + O(\epsilon^3),$$

полагая их зависящими от разных временных масштабов: $T_0 \equiv t$, $T_1 \equiv \epsilon t$. Производная по времени при этом вычисляется по правилу

$$\partial_t \equiv \partial_{T_0} + \epsilon \partial_{T_1} + O(\epsilon^2).$$

В силу линейности уравнения Лапласа будут выполняться для функций каждого порядка малости в отдельности

$$\Delta \psi_m(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (m = 1; 2), \quad \Delta \Phi_j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (j = 0, 1, 2).$$

Граничные условия на $\pm\infty$ примут вид

$$z \rightarrow -\infty: \quad \psi_m(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$z \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi_0(z) \rightarrow -E_0 \mathbf{e}_z, \quad \Phi_j(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad (j = 1, 2),$$

Не выписывая краевые задачи различных порядков малости (см. их явный вид в [10]), запишем сразу полученные решения.

3.1. Нулевой порядок малости

Решение задачи нулевого порядка малости описывает равновесное состояние системы

$$\Phi_0(z) = -E_0 z, \quad P_0 = P_{\text{atm}} - \frac{E_0^2 \epsilon_{\text{ex}}}{8\pi} - gz. \quad (3)$$

3.2. Первый порядок малости

В первом порядке малости решения будем искать в виде

$$\xi_1(x, T_0, T_1) = \alpha_1(T_0, T_1) \exp(ikx) + \bar{\alpha}_1(T_0, T_1) \exp(-ikx),$$

$$\psi_1(\mathbf{r}, T_0, T_1) = [A_1(T_0, T_1) \exp(ikx) + \bar{A}_1(T_0, T_1) \exp(-ikx)] \exp(kz),$$

$$\Phi_1(\mathbf{r}, T_0, T_1) = [B_1(T_0, T_1) \exp(ikx) + \bar{B}_1(T_0, T_1) \exp(-ikx)] \exp(-kz), \quad (4)$$

где $\alpha_1(T_0, T_1)$, $A_1(T_0, T_1)$, $B_1(T_0, T_1)$ — искомые функции времени, чертой сверху над символом обозначено комплексное сопряжение, i — мнимая единица. Подставляя (4) в систему граничных условий первого порядка,

получим выражения для функций $A_1(T_0, T_1)$ и $B_1(T_0, T_1)$ через амплитуду $\alpha_1(T_0, T_1)$:

$$A_1(T_0, T_1) = \frac{\partial_{T_0} \alpha_1(T_0, T_1)}{k}, \quad B_1(T_0, T_1) = E_0 \alpha_1(T_0, T_1). \quad (5)$$

Используя соотношения (5), из граничного динамического условия получим эволюционное уравнение для амплитуды $\alpha_1(T_0, T_1)$:

$$\partial_{T_0, T_0} \alpha_1(T_0, T_1) + \omega^2 \alpha_1(T_0, T_1) = 0. \quad (6)$$

Частота ω определяется дисперсионным уравнением

$$\omega^2 = (k^3 + k - wk^2), \quad w \equiv \frac{\epsilon_{ex} E_0^2}{4\pi}, \quad (7)$$

где w — полевой параметр. Решение уравнения (6) для амплитуды $\alpha_1(T_0, T_1)$ запишем в виде

$$\alpha_1(T_0, T_1) = \xi(T_1) \exp(-iT_0\omega) + \bar{\xi}(T_1) \exp(iT_0\omega).$$

Это позволяет с учетом соотношений (5) найти остальные неизвестные $A_1(T_0, T_1)$, $B_1(T_0, T_1)$ и записать общее решение задачи первого порядка малости в виде

$$\begin{aligned} \xi_1(x, T_0, T_1) &= \int_0^\infty \xi(T_1 k) \left(\exp[i(kx - T_0\omega(k))] \right. \\ &\quad \left. + \exp[-i(kx + T_0\omega(k))] \right) dk + c.c., \\ \psi_1(\mathbf{r}, T_0, T_1) &= - \int_0^\infty \frac{i\omega(k)}{k} [\xi(T_1) \{ \exp[i(kx - T_0\omega(k))] \\ &\quad + \exp[-i(kx + T_0\omega(k))] \} \exp(kz) dk + c.c., \\ \Phi_1(\mathbf{r}, T_0, T_1) &= E_0 \int_0^\infty \xi(T_1) \{ \exp[i(kx - T_0\omega(k))] \\ &\quad + \exp[-i(kx + T_0\omega(k))] \} \exp(-kz) dk + c.c., \\ \xi(T_1) &\equiv a_1(T_1) \exp[ib(T_1)], \end{aligned} \quad (8)$$

где $a(T_1)$ и $b(T_1)$ — вещественные амплитуда и фаза. Аббревиатура „с.с.“ означает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным.

3.3. Второй порядок малости

Задача второго порядка малости является неоднородной, где функции неоднородности в граничных условиях выражаются через решения (3), (8) нулевого и первого порядков малости [10]. Частота волн принимается такой же, как и в расчетах первого порядка (так это принято в аналогичных задачах и различных геометриях [1–11, 17–19]), т.е. определяется (7). Это

связано с тем, что нелинейная поправка к частоте имеет третий порядок малости и рассчитывается в третьем порядке.

Решение задачи второго порядка малости будем искать в виде, аналогичном решению задачи первого порядка:

$$\xi_2(x, T_0) = \int_0^\infty \alpha_2(T_0, k) \exp(ikx) + \bar{\alpha}_2(T_0, k) \exp(-ikx) dx,$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\mathbf{r}, T_0) &= \int_0^\infty [A_2(T_0, k) \exp(ikx) + \bar{A}_2(T_0, k) \exp(-ikx)] \\ &\quad \times \exp(kz) dk, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\mathbf{r}, T_0) &= \int_0^\infty [B_2(T_0, k) \exp(ikx) + \bar{B}_2(T_0, k) \exp(-ikx)] \\ &\quad \times \exp(-kz) dk. \end{aligned}$$

После подстановки проектов решений в систему граничных условий получим выражения для коэффициентов

$$\begin{aligned} A_2(T_0, k) &= \frac{1}{k} \partial_{T_0} \alpha_2(T_0, k) + \frac{1}{k} \int_{-\infty}^\infty F_1(x, t) e^{-ikx} dx + c.c., \\ B_2(T_0, k) &= E_0 \alpha_2(T_0, k) + \int_{-\infty}^\infty F_2(x, t) e^{-ikx} dx + c.c. \end{aligned}$$

Из динамического граничного условия получим эволюционное уравнение для амплитуд второго порядка

$$\partial_{T_0, T_0} \alpha_2(T_0, k) + \omega(k)^2 \alpha_2(T_0, k) = F_0(t, k). \quad (9)$$

$F_0(t, k)$, $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$ — функции неоднородности, явный вид которых приведен в Приложении.

Из вида правой части уравнения (9) (см. Приложение) следует, что при определенных соотношениях между частотами волн и их волновыми числами, когда для трех волн с индексами p, q, n выполняются соотношения [20]:

$$\omega_p + \omega_q = \omega_n, \quad k_p + k_q = k_n$$

или

$$\omega_p - \omega_q = \omega_n, \quad k_p - k_q = k_n, \quad (10)$$

между ними возникает резонансное взаимодействие. Когда $n = q$, резонанс называют вырожденным. В этом резонансе волна с волновым числом $2k$ дважды взаимодействует с вдвое более длинной волной. Энергия передается из волны с более высоким значением волнового числа в волну с более низким его значением.

Данный резонанс при расчетах, выполняющихся на основе частот, рассчитанных в линейном приближении, не зависит от наличия электрического заряда на свободной

поверхности жидкости, т.е. от наличия внешнего электрического поля. В этом несложно убедиться, подставив в резонансное соотношение $\omega(2k) = \omega(k) + \omega(k)$ явные выражения для частот (7) и возводя его в квадрат:

$$8k^3 + 2k - 4wk^2 = 4(k^3 + k - wk^2).$$

Видно, что слагаемое $4wk^2$ сокращается, а оставшееся уравнение $2k^3 - k = 0$ имеет решения $k = 0, k = 1/\sqrt{2}$. Таким образом, вырожденный резонанс для частот (7) имеет место только для двух выделенных волн $k = 1/\sqrt{2}$ и $2k = \sqrt{2}$.

4. Вырожденный резонанс

Рассмотрим внутренний нелинейный вырожденный резонанс $\omega(2k) = \omega(k) + \omega(k)$ более подробно. Введем параметр расстройки σ , характеризующий величину отклонения соотношения между частотами от точного резонанса. Перепишем соотношение частот в виде $\omega(2k) = \omega(k) + \omega(k) - \varepsilon\sigma(k)$. Подчеркнем, что параметр расстройки σ зависит от волнового числа k , поскольку при варьировании изменяются частоты волн и параметр расстройки.

Условия исключения секулярных слагаемых из функций неоднородности двух эволюционных уравнений вида (9), записанных для волн k и $2k$, позволяют получить систему дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих зависимость комплексных амплитуд ξ_k и ξ_{2k} от временного масштаба T_1 . Представив эти амплитуды в виде (8) и приравнявая нулю вещественную и мнимую части уравнений гидродинамики, получим систему четырех дифференциальных уравнений для расчета вещественных амплитуд $a(T_1, k)$, $a(T_1, 2k)$ и фаз $b(T_1, k)$, $b(T_1, 2k)$ взаимодействующих волн

$$\begin{aligned} &2\omega(k)a(T_1, k)\partial_{T_1}(b(T_1, k)) + a(T_1, 2k)a(T_1, k)d_2(2k, k) \\ &\times \cos [b(T_1, 2k) - 2b(T_1, k) + T_1\sigma] = 0, \\ &2\omega(k)\partial_{T_1}[a(T_1, k)] - a(T_1, 2k)a(T_1, k) \\ &\times \sin [b(T_1, 2k) - 2b(T_1, k) + T_1\sigma] = 0, \\ &2\omega(2k)a(T_1, 2k)\partial_{T_1}[b(T_1, 2k)] + a(T_1, k)a(T_1, k)d_1(k, k) \\ &\times \cos [b(T_1, 2k) - 2b(T_1, k) + T_1\sigma] = 0, \\ &2\omega(2k)\partial_{T_1}[b(T_1, 2k)] + a(T_1, k)a(T_1, k)d_1(k, k) \\ &\times \sin [b(T_1, 2k) - 2b(T_1, k) + T_1\sigma] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$d_1(x, y) \equiv (x + y)[\omega(x)\omega(y) - wxy];$$

$$d_2(x, y) \equiv 2(x - y)[(\omega(x) - \omega(y))\omega(y) - w(x - y)y].$$

Численно решая систему уравнений (10) с начальными условиями вида

$$a(k) = h_k, \quad b(k) = \varphi_k, \quad a(2k) = h_{2k}, \quad b(2k) = \varphi_{2k},$$

где h_j — парциальный вклад j -й волны в суммарную амплитуду, φ_j — начальная фаза j -й волны, построим графики зависимости от времени t амплитуд α_1 волн с волновыми числами $k, 2k$. Заметим, что из требования согласованности уравнений в начальный момент времени следует, что если начальная амплитуда волн отлична от нуля, то ее фаза должна быть равна нулю, а при нулевой начальной амплитуде соответствующую начальную фазу следует положить равной $\pi/2$.

5. Анализ полученных результатов

На рис. 1 представлены зависимости безразмерных амплитуд взаимодействующих волн $\chi \equiv \alpha_1$ от безразмерного времени t , рассчитанные при $\varphi = 0.1, w = 0.3$. В начальный момент времени возбуждена волна с волновым числом k , поэтому $h_{2k} = 0, h_k = 0, \varphi_{2k} = \pi/2, \varphi_k = 0$. Состоянию точного резонанса соответствует $k = k_r = (1/\sqrt{2}) = 0.707106781187$. Рис. 1, *a* иллюстрирует обмен энергией между взаимодействующими волнами в состоянии, близком к точному резонансу: принимается, что $k = 0.707106781184$. Заметим, что при расчетах в точке точного резонанса время нахождения энергии в волне с $2k$ увеличивается примерно на двадцать процентов. Однако график теряет непрерывность, и нарушается закон сохранения энергии вследствие быстрого накопления ошибки численного счета. Параметр расстройки, рассчитываемый в линейном приближении по формуле

$$\sigma = \frac{\omega(2k) - 2\omega(k)}{\varepsilon},$$

равен $\sigma = -2.24871 \cdot 10^{-11}$.

Из рис. 1, *a* видно, что энергия находится в волне $2k$ в 4 раза дольше по сравнению со временем ее нахождения в волне с k .

В численных расчетах по системе уравнений (11) удалось обнаружить интересное, хотя и ожидаемое явление — зависимость положения резонанса и его физических характеристик (характерного времени нахождения энергии в конкретной волне, доли передаваемой энергии) от начальных условий. Более того, резонанс оказался не единственным. Количество резонансов и их положения зависят от величины поверхностного заряда.

Например, оставим то же значение волнового числа, что на рис. 1, *a*, но будем менять начальные условия. Величина параметра расстройки (как показывают расчеты) не зависит от начальных условий и при их изменении будет одинакова. Примем, что энергия в начальный момент распределена между волной $2k$ и волной k таким образом, что $h_k = 3/4, h_{2k} = 1/4$, в этом случае система уходит далеко от состояния точного резонанса (рис. 1, *b*). Чтобы вернуться в положение точного резонанса, следует взять волновое число, близким к $k = 0.6673355$ (рис. 2). Параметр расстройки при этом станет равным -0.340923 .

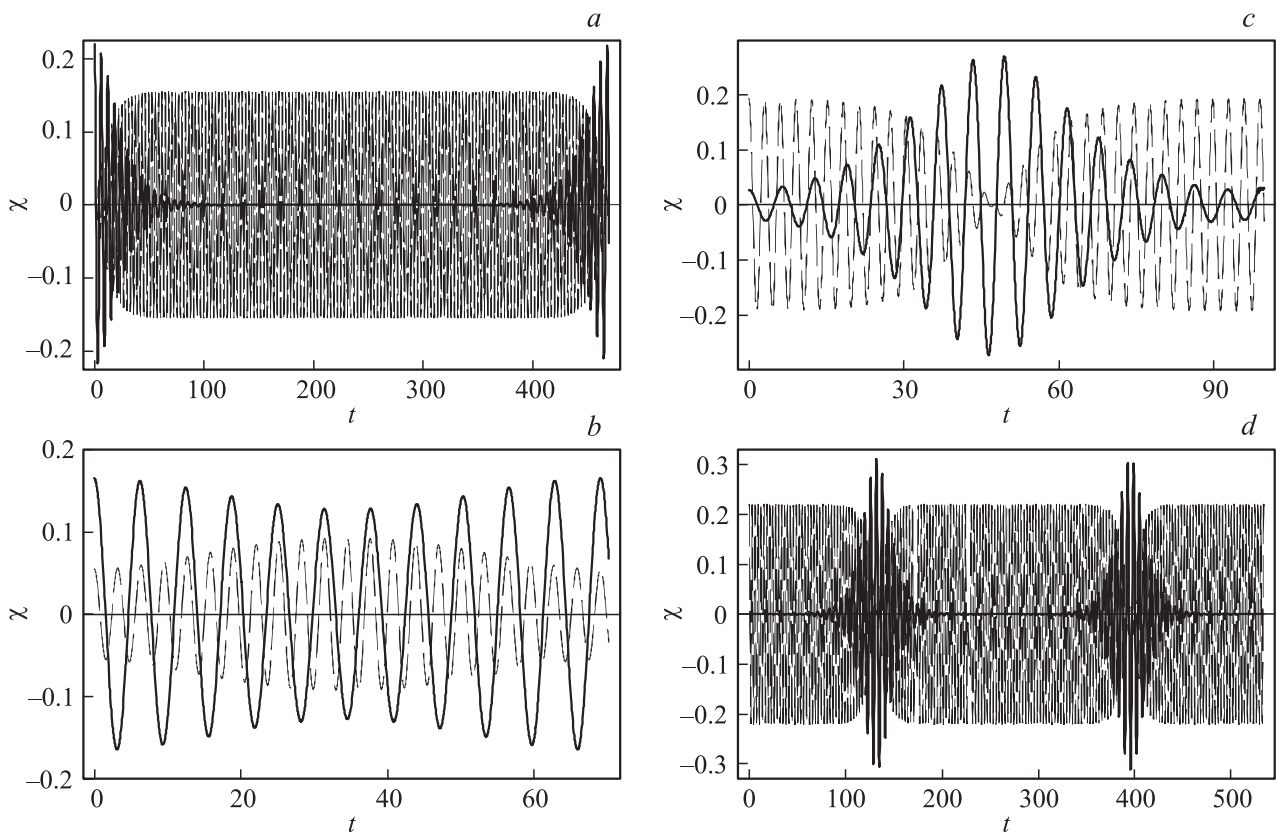


Рис. 1. Временная зависимость безразмерных амплитуд волн с волновыми числами k и $2k$, находящихся в состоянии, близком к состоянию вырожденного нелинейного внутреннего резонанса, при $k = 0.707106781184$, $w = 0$: a — $h_k = 1$, $h_{2k} = 0$; b — $h_k = 3/4$, $h_{2k} = 1/4$; c — $h_k = 1/8$, $h_{2k} = 7/8$; d — $h_k = 10^{-4}$, $h_{2k} = 1 \cdot 10^{-4}$. На всех рисунках толстой сплошной линией нанесены данные для k -волны, штриховой — для $2k$ -волны.

Если взять другие начальные условия: $h_k = 1/8$, а $h_{2k} = 7/8$ при прочих условиях тех же, что и на рис. 1, a , то мы снова отдаляемся от положения резонанса (рис. 1, c).

Поместим всю энергию в волну $2k$, оставив в волне k лишь малую ее часть: $h_k = 10^{-4}$, и получим, что резонанс будет иметь место, но его физические характеристики

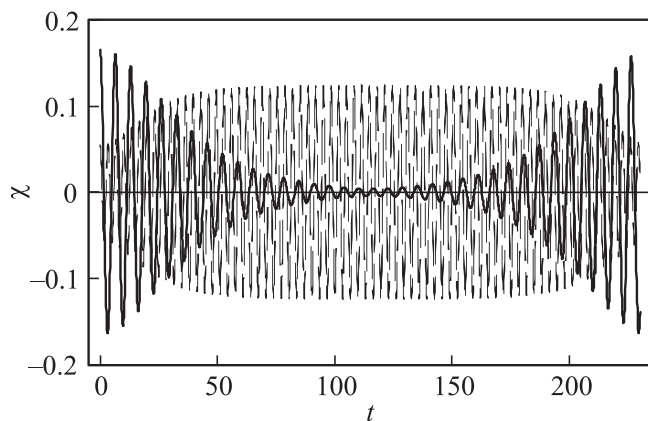


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, b , но $k = 0.6673355$.

изменяются, как это видно из рис. 1, d . Большую часть времени энергия находится в волне с $2k$, как и в случае, представленном на рис. 1, a .

Из рисунков видно, что энергия перекачивается между волнами в обоих направлениях: от коротких волн к длинным и обратно.

Результаты расчетов для измененных значений безразмерного полевого параметра w и при тех же значениях прочих физических величин, что и на рис. 1, a , приведены на рис. 3, a и на рис. 3, b . Графики построены при $w = 0.3$ и 0.5 соответственно. Видно, что с ростом параметра w качественный вид графика не меняется, только увеличивается характерное время нахождения энергии в конкретной волне.

Еще одно любопытное явление обнаруживается при расчетах: в ближайшей окрестности резонансного волнового числа (в обе стороны от положения резонанса) энергия перекачивается из короткой в длинную волну, а при достаточно большом удалении по волновому числу, наоборот, из длинной в короткую. Это обстоятельство иллюстрируется рис. 4. В начальный момент амплитуды обеих волн задаются равными.

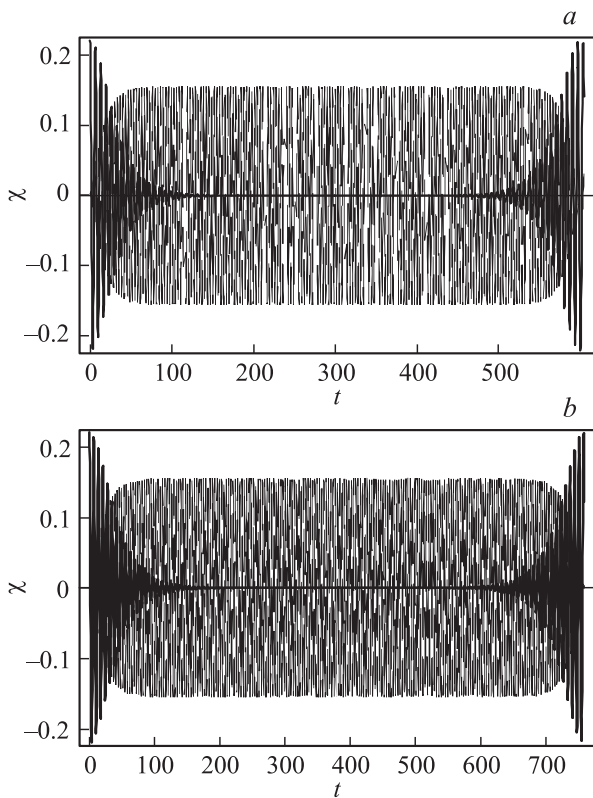


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, а, но при измененном полевом параметре, ω : а — 0.3, б — 0.5.

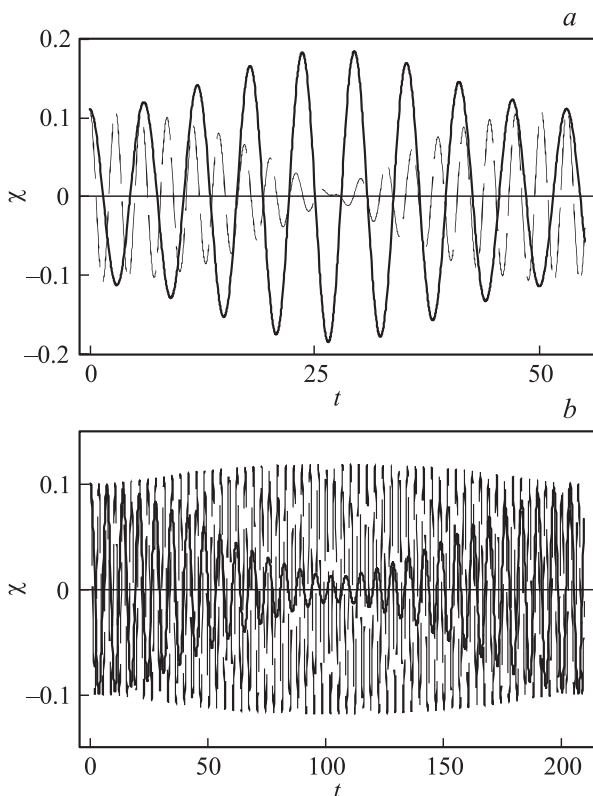


Рис. 4. Временная зависимость безразмерных амплитуд волн при $w = 0$, $h_k = 1/2$, $h_{2k} = 1/2$, находящихся в состояниях: а — близком к состоянию вырожденного нелинейного внутреннего резонанса, $k = 0.752$, б — вдали от него, $k = 0.635$.

Расчеты также показывают, что если в начальный момент времени вся энергия сосредоточена в волне с волновым числом $2k$, а в волне с k ее нет совсем, то перекачки энергии в волну с волновым числом k не происходит. Обратный перенос энергии, однако, имеет место: т.е. если в начальный момент времени энергия сосредоточена в волне с волновым числом k , а в волне с $2k$ ее нет, то перекачка энергии в волну с $2k$ происходит свободно.

Заключение

Теоретический асимптотический анализ второго порядка малости показывает, что если частоты волн рассчитываются в линейной теории и принимаются независимыми от их амплитуды, то вырожденное резонансное взаимодействие волн на плоской заряженной поверхности жидкости реализуется единственным способом для конкретной длины волны и не зависит от наличия поверхностного заряда. Однако учет конечности амплитуды волн приводит к тому, что положение резонансов становится зависящим как от величины начальной амплитуды, так и полевого параметра. Количество резонансов при этом становится бесконечным. Проблема в том, что при аналитических расчетах второго порядка малости нелинейная поправка к частоте волн не рассчитывается, так как имеет третий порядок малости. Значит, система реагирует на реальную частоту волн, хотя та в расчетном приближении не определяется.

Работа выполнена при поддержке тематического гранта ЯрГУ им. П.Н. Демидова.

Приложение

Функции неоднородности F_j .

$$F_0(t, k) \equiv 2i\omega(k)\partial_{T_1}\xi(T_1, k) \exp[-iT_0\omega(k)] - f_1(k) + f_2(k),$$

где

$$f_1(k) \equiv k \int_0^k \xi(T_1, k) (\xi(T_1, k - k_1) (\omega(k - k_1)\omega(k_1) - wk_1(k - k_1)) \exp[-iT_0(\omega(k_1) + \omega(k - k_1))] - \bar{\xi}(T_1, k - k_1) (\omega(k - k_1)\omega(k_1) + wk_1(k - k_1)) \times \exp[-iT_0(\omega(k_1) + \omega(k - k_1))]) dk_1,$$

$$f_2(k) \equiv 2k \int_0^k \xi(T_1, k_1) \left(\xi(T_1, k_1 - k) (\omega(k_1 - k) (\omega(k_1) + \omega(k_1 - k)) + wk(k_1 - k)) \exp[-iT_0(\omega(k_1) + \omega(k_1 - k))] - \bar{\xi}(T_1, k_1 - k) (\omega(k_1 - k) (\omega(k_1) - \omega(k_1 - k)) - wk(k_1 - k)) \right) \times \exp[-iT_0(\omega(k_1) - \omega(k_1 - k))] dk_1,$$

$$F_1(x, t) \equiv \int_0^\infty \partial_{T_1} \xi(T_1, k_1) \exp[i(k_1 x - T_0 \omega(k_1))] dk_1 + \int_0^\infty \int_0^\infty i\omega(k_2) \xi(T_1, k_1) \left(\xi(T_1, k_2) \exp[-iT_0(\omega(k_1) + \omega(k_2))] - \bar{\xi}(T_1, k_2) \exp[-iT_0(\omega(k_1) - \omega(k_2))] \right) \times ((k_1 + k_2) \exp[ix(k_1 + k_2)] + (k_1 - k_2) \times \exp[ix(k_1 - k_2)]) dk_1 dk_2 + c.c.,$$

$$F_2(x, t) \equiv \int_0^\infty \int_0^\infty k_2 E_0 \xi(T_1, k_1) \left(\xi(T_1, k_2) \exp[-iT_0(\omega(k_1) + \omega(k_2))] + \bar{\xi}(T_1, k_2) \exp[-iT_0(\omega(k_1) - \omega(k_2))] \right) \times (\exp[ix(k_1 + k_2)] + \exp[ix(k_1 - k_2)]) dk_1 dk_2 + c.c.$$

- [15] *Hamack J.L., Henderson D.M.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1993. Vol. 25. P. 55–97.
 [16] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
 [17] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Суханов С.А.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 3. С. 48–53.
 [18] *Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 68–79.
 [19] *Григорьев А.И., Корниенко Д.О., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 18–28.
 [20] *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 439 с.

Список литературы

- [1] *Wilton J.R.* // Phil. Mag. S. 6. 1914. V. 27. N 158. P. 395–394.
 [2] *Wilton J.R.* // Phil. Mag. S. 6. 1915. Vol. 29. N 173. P. 689–700.
 [3] *Cramer G.D.* // J. Fluid Mech. 1957. Vol. 2. P. 532–540.
 [4] *Lick W.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1970. Vol. 2. P. 113–136.
 [5] *Dias F., Kharif C.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1999. Vol. 31. P. 301–346.
 [6] *Michael D.H.* // Quart. Appl. Math. 1977. Vol. 35. P. 139–143.
 [7] *Bhimsen K.Sh.* // Quart. Appl. Math. 1979. Vol. 35. P. 423–427.
 [8] *Rama Kant, Jindia R.K., Malik S.K.* // Quart. Appl. Math. 1981. Vol. 39. P. 23–24.
 [9] *Gonzalez A., Castellanos A.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. N 4. P. 3573–3578.
 [10] *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 32–39.
 [11] *Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 288 с.
 [12] *Bretherton F.P.* // J. Fluid Mech. 1964. Vol. 20. N 3. P. 457–479.
 [13] *Simons W.F.* // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1969. Vol. 309. P. 551–575.
 [14] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. N 2. P. 385–395.