

03

Деформационные и нелинейные поправки к критическим условиям реализации неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 19 июля 2013 г.)

В нелинейных аналитических асимптотических расчетах в квадратичном приближении по амплитуде осцилляций и в линейном приближении по величине безразмерной равновесной деформации формы капли в электростатическом и гравитационном полях появляется поправка к частоте осцилляций и соответственно к критическому значению параметра Рэлея, пропорциональная произведению амплитуды осцилляций и величины деформации. Эту поправку естественно назвать деформационной. В расчетах третьего порядка по безразмерной амплитуде осцилляций появляется нелинейная поправка к частоте и параметру Рэлея, связанная с нелинейным взаимодействием мод осцилляций, большая по абсолютной величине, чем деформационная. От деформационных поправок можно избавиться, проводя эксперименты в невесомости, но от поправок, связанных с нелинейностью уравнений гидродинамики, избавиться таким образом невозможно, они и определяют погрешность экспериментальных измерений критического значения параметра Рэлея.

Введение

Исследования нелинейных осцилляций уединенных заряженных капель [1–5], а также незаряженных капель во внешних электростатических полях [6,7] представляют значительный интерес и, в частности, открывают путь осмысленного изучения критических условий неустойчивости заряженных капель в электростатических [8–10] и комбинированных подвесах, которые используются для проверки теоретического критерия Рэлея [11–15]. Сам критерий был установлен давно, более 100 лет назад [16]. Он утверждает, что в вакууме сферическая капля несжимаемой жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ , радиусом R , несущая заряд Q , претерпевает неустойчивость по отношению к заряду, когда безразмерная комбинация $Q^2/4\pi\sigma R^3$, обозначенная ниже как W , становится больше 4. Критерий неустойчивости незаряженной капли в электростатическом поле E_0 имеет менее красивый вид и записывается как $w \equiv (E_0^2 R / \sigma) \geq \text{const}$. Значение константы в различных экспериментах меняется от 2.2 до 2.9 [17]. Теоретическими методами ее значение определяется не точно, а приближенно с разбросом в таком же диапазоне [17]. Все дело в том, что в электростатическом поле капля деформируется в фигуру типа сфероида, и приходится иметь дело с двумя малыми параметрами: отношением амплитуды осцилляций к радиусу и отношению стационарной, равновесной в E_0 деформации к радиусу исходной капли.

Как правило, при всех экспериментальных проверках измеряется заниженное значение параметра Рэлея, попадающее, однако, внутрь доверительного интервала за счет погрешности измерений, достигающей во всех

типах экспериментов нескольких процентов величины. В самых точных современных экспериментах [14,15] погрешность измерений достигает 5%. Вопрос в том, какие поправки вызывают это отклонение: деформационные (линейные по безразмерной амплитуде) или квадратичные по амплитуде, связанные с нелинейным взаимодействием мод осцилляций. Все типы установок, в которых капля удерживается с применением сил различной природы, приводят к деформации капли и, возможно, к соответствующему искажению критических условий реализации неустойчивости. Как представляется, в идеальном с указанной точки зрения случае эксперимент должен быть проведен в условиях космической невесомости, исключающих необходимость применения силы для удержания капли.

В силу широкого применения различного вида бесконтактных подвесов для жидких капель (электростатических, электродинамических, аэродинамических, акустических [11–15]), использующихся как для получения сверхчистых веществ, так и для исследования закономерностей электростатического распада, проблема анализа нелинейных осцилляций заряженных капель во внешних силовых полях существует.

В настоящей работе проводится сравнение роли деформационных и нелинейных поправок к частоте осцилляций в снижении критических условий реализации неустойчивости капли в условиях бесконтактного подвеса.

1. Физическая постановка задачи

Пусть в вакууме капля идеально электропроводной несжимаемой идеальной жидкости, имеющая заряд Q

(который для определенности примем положительным), в поле силы тяжести \mathbf{g} подвешена в однородном внешнем электростатическом поле напряженностью \mathbf{E}_0 , где $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{E}_0$. Примем, что жидкость капли имеет плотность ρ , коэффициент поверхностного натяжения на границе с вакуумом σ . В отсутствие электростатического и гравитационного полей капля имеет сферическую форму с радиусом R . В электростатическом поле, согласно [17], равновесная форма такой капли представляет собой вытянутый по полю сфероид (в квадратичном по эксцентриситету e приближении), причем $e^2 \equiv 36w/(4 - W)$, $W \equiv Q^2/4\pi$, $w \equiv E_0^2/16\pi$. Именно такое приближение обеспечивает необходимую строгость проводимых в настоящем исследовании асимптотических расчетов нелинейных (с безразмерной амплитудой ε) осцилляций капли с точностью $\sim \varepsilon e^2$ и $\sim \varepsilon^2$. При записи выражений для эксцентриситета и для параметров Рэлея W и Тейлора w использованы, как и во всем нижеследующем изложении, безразмерные переменные, в которых $\rho = \sigma = R = 1$. Параметр Рэлея принимается удовлетворяющим условию $W < 4$. Условие неподвижности центра масс капли в подвесе записывается в виде $g = 3QE_0/4\pi$.

Поскольку давление электрического поля на поверхность капли $p_E \propto E_0^2$ приводит к сфероидальному искажению ее равновесной изначально сферической формы, то, следовательно, давление должно иметь тот же порядок малости, что и вызванное им искажение. Но так как мы принимаем для определенности, что малые параметры e^2 и ε имеют один порядок малости, то сказанное означает, что $p_E \propto E_0^2 \propto e^2 \propto \varepsilon$, или $E_0 \propto \varepsilon^{1/2}$. Параметр же Тейлора w будет более чем на порядок меньше. Поскольку заряд не нарушает сферичность исходной равновесной формы капли, то примем $Q \propto \varepsilon^0$.

В квадратичном по эксцентриситету e приближении форма капли совпадает со сфероидальной поверхностью $r(\theta) = 1 + \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu)$, где $\mu \equiv \cos \theta$, r и θ — сферические координаты, P_2 — полином Лежандра второго порядка [18].

Отметим, что потенциал $\Phi^{(eq)}$ электростатического поля в окрестности равновесной заряженной капли, находящейся во внешнем однородном электростатическом поле, в линейном по квадрату эксцентриситета приближении представляет собой суперпозицию потенциала заряженного сфероида в отсутствие внешнего электростатического поля и потенциала незаряженно-го электропроводного сфероида в электростатическом поле:

$$\begin{aligned} \Phi^{(eq)}(r, \theta) = & \frac{Q}{r} \left[1 - e^2 \frac{1}{6r^2} (1 - 3\mu^2) \right] \\ & - E_0 r \mu \left[1 - \frac{1}{r^3} - e^2 \frac{2}{5r^3} \left(1 - \frac{3}{4r^2} (3 - 5\mu^2) \right) \right] \\ & + O(e^4). \end{aligned}$$

2. Математическая постановка задачи

Для того чтобы исследовать нелинейные осцилляции поверхности капли, примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная слабо сфероидальная форма капли с эксцентриситетом e претерпевает осесимметричное возмущение $\xi(\theta, t)$ фиксированной конечной амплитуды ε , много меньшей, однако, радиуса капли ($\varepsilon \ll 1$). Зададимся целью найти форму капли при $t > 0$ и спектр возникающих ее капиллярных осцилляций, полагая, что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение свободной поверхности капли запишем в виде

$$\begin{aligned} r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t) &= 1 + \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu) + \xi(\theta, t) \\ &\equiv 1 + e^2 h(\theta) + \xi(\theta, t). \end{aligned}$$

Движение жидкости в капле, вызванное начальной виртуальной деформацией равновесной слабо сфероидальной поверхности, будем полагать потенциальным с потенциалом поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$. Естественно принять, что потенциал $\psi(\mathbf{r}, t)$ и поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \text{grad}(\psi(\mathbf{r}, t))$ являются величинами того же порядка малости, что и возмущение $\xi(\theta, t)$, т.е. $|\psi|, |V| \propto \varepsilon$. Поскольку скорости гидродинамических движений жидкости в капле много меньше скорости распространения электромагнитных взаимодействий, будем описывать электрическое поле в окрестности капли потенциалом $\Phi(\mathbf{r}, t)$ так, что для напряженности поля будем иметь $\mathbf{E} = -\text{grad} \Phi$.

Математическая формулировка решаемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1) \\ r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -E_0 r \mu, \\ r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \Delta p - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi)^2 + p_{EQ} + p_g = p_\sigma, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t), \\ \int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3}, \quad \int_V \mathbf{e}_r r^3 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \\ V = \{0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \\ \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -4\pi Q, \\ S = \{r = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \\ t = 0: \quad \xi(\theta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{i \in \Omega} h_i P_i(\mu), \\ \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

В выражениях (1) введены обозначения Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне капли в состоянии

равновесия, $p_{EQ} = (\nabla\Phi)^2/8\pi$ — давление электрического поля на свободной поверхности капли,

$$p_g = g [(r(\theta) + \xi(\theta, t))|_{\theta=0} - (r(\theta) + \xi(\theta, t))\mu]$$

— давление гравитационного поля, $p_\sigma = \text{div}_S \mathbf{n}$ — давление сил поверхностного натяжения (div_S — поверхностная дивергенция), \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности капли, $\Phi_S(t)$ — постоянное вдоль поверхности капли значение электрического потенциала, ε — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли, являющаяся малым параметром задачи, h_i — коэффициенты, определяющие парциальный вклад i -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение, Ω — множество значений номеров мод, определяющих начальную деформацию: $\sum_{i \in \Omega} h_i = 1$, ξ_0 и ξ_1 — константы, определяемые из условий неизменности объема капли и неподвижности ее центра масс в начальный момент времени, зависящие от вида начальной деформации и с точностью до слагаемых порядка малости $\sim \varepsilon e^2$ и $\sim \varepsilon^2$, равные:

$$\xi_0 \equiv \varepsilon^2 \xi_0 \approx - \sum_{i \in \Omega} \left[\varepsilon^2 \frac{h_i^2}{(2i+1)} + \varepsilon e^2 \frac{2}{15} h_i \delta_{i,2} \right] + O(\varepsilon^3),$$

$$\xi_1 \equiv \varepsilon^2 \xi_1 \approx - \sum_{i \in \Omega} \left[\varepsilon^2 \frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)} + \varepsilon e^2 \frac{9}{35} h_i \delta_{i,3} \right] + O(\varepsilon^3),$$

где $\delta_{i,n}$ — символ Кронекера.

Задача (1), (2) содержит два малых параметра: e^2 — квадрат эксцентриситета равновесной слабо сфероидальной формы капли в поле E_0 и ε — безразмерную амплитуду начальной деформации ξ равновесной формы. Анализ нелинейного взаимодействия возбужденных колебательных мод как между собой, так и со стационарным отклонением равновесной формы капли от сферы, как минимум, требует учета в разложениях слагаемых, имеющих порядок малости $\sim \xi^2$ и $\sim e^2 \xi$. В соответствии со сказанным выше $e^2 \propto \varepsilon$. Кроме того, будем полагать, что $E_0 \propto \varepsilon^{1/2}$ и $g \propto \varepsilon^{1/2}$.

3. Решение задачи

Будем решать сформулированную задачу в рамках теории возмущений методом многих масштабов. Искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представим в виде разложений по степеням малого параметра ε . Однако в отличие от ранее рассматривавшихся задач о нелинейных осцилляциях заряженных капель в отсутствие внешних силовых полей теперь разложение необходимо проводить не только по целым, но и по полужелым степеням параметра ε . Это позволит учесть влияние на осцилляции капли гравитационного давления (так как $g \propto \varepsilon^{1/2}$) и перекрестных слагаемых электрического

давления ($\sim QE_0 \sim \varepsilon^{1/2}$). В рамках расчетов указанного порядка малости будем в соответствии с основной идеей метода многих временных масштабов считать все искомые величины зависящими не просто от времени t , а от трех его масштабов, определенных через малый параметр ε : $T_m \equiv \varepsilon^m t$ ($m = 0, 1/2, 1$). В итоге получим

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_{1/2}, T_1) \\ &\quad + \varepsilon^{3/2} \xi^{(3/2)}(\theta, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^{5/2}), \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}, T_1) \\ &\quad + \varepsilon^{3/2} \psi^{(3/2)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2 \psi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0) + O(\varepsilon^{5/2}), \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \Phi^{(\text{eq})}(\mathbf{r}) + \varepsilon \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}, T_1) \\ &\quad + \varepsilon^{3/2} \Phi^{(3/2)}(\mathbf{r}, T_0, T_{1/2}) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0) + O(\varepsilon^{5/2}). \end{aligned} \quad (3)$$

Для входящих в динамическое граничное условие давлений электрического p_{EQ} и гравитационного p_g полей, а также сил поверхностного натяжения p_σ примем следующие разложения:

$$\begin{aligned} p_{EQ} &= p_{EQ}^{(\text{eq})} + \varepsilon p_{EQ}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_{EQ}^{(3/2)}(\xi) \\ &\quad + \varepsilon^2 p_{EQ}^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^{5/2}), \\ p_g &= p_g^{(\text{eq})} + \varepsilon p_g^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_g^{(3/2)}(\xi) \\ &\quad + \varepsilon^2 p_g^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^{5/2}), \\ p_\sigma &= p_\sigma^{(\text{eq})} + \varepsilon p_\sigma^{(1)}(\xi) + \varepsilon^{3/2} p_\sigma^{(3/2)}(\xi) \\ &\quad + \varepsilon^2 p_\sigma^{(2)}(\xi) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (4)$$

где компоненты $p_{EQ}^{(\text{eq})}$, $p_g^{(\text{eq})}$, $p_\sigma^{(\text{eq})}$ являются давлениями на равновесной слабо сфероидальной поверхности капли и определяют ее равновесную форму.

Используя разложения (3), (4), из системы (1), (2) можно получить набор краевых задач разных порядков малости для определения функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$ и $\Phi^{(m)}$ ($m = 1, 3/2, 2$).

Окончательное выражение для образующей осесимметричной формы нелинейно-осциллирующей капли, которое можно найти аналогично тому, как это делалось в [8,10], с учетом разложений по производным от полиномов Лежандра, приведенных в работе [19], имеет вид

$$\begin{aligned} r(\theta, t) &= 1 + \frac{e^2}{3} P_2(\mu) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (M_n^{(1)}(t) + \varepsilon^{1/2} M_n^{(3/2)}(t) \\ &\quad + \varepsilon M_n^{(2)}(t)) P_n(\mu) O(\varepsilon^{5/2}), \end{aligned}$$

$$n \geq 2: \quad M_n^{(1)}(t) = h_i \delta_{in} \cos[(\omega_n - \varepsilon b_n^{(1)})t],$$

$$\begin{aligned}
 b_n^{(1)} = & 36w \left[\frac{n^2}{(2n-1)(2n+3)} \left\{ \frac{(n+1)}{(4-W)} \left[n^2 + \frac{\omega_n^2}{(n-1)n} \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(2(n-1)n(2n+3)-1)}{(2n+1)} \right\} + \frac{W}{(\omega_{n-1}^2 - \omega_n^2)} \right. \\
 & \times \frac{(n-1)n^3}{(2n-1)(2n+1)} \left[(2n-3) - 1 \right]^2 + \frac{W}{(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2)} \\
 & \left. \times \frac{(n+1)^3 n}{(2n+1)(2n+3)} ((2n-1) - 1)^2 \right] \frac{1}{2\omega_n}, \\
 \omega_n^2 = & n(n-1)(n+2-W).
 \end{aligned}$$

Амплитудные коэффициенты $M_n^{(3/2)}(t)$ и $M_n^{(2)}(t)$ не выписаны в настоящем рассмотрении из-за их громоздкости и неактуальности для настоящей работы, посвященной в первую очередь поправкам к частоте осцилляций: деформационным и нелинейным. Отметим лишь, что $M_n^{(2)}(t)$ имеют резонансный вид: некоторые входящие в них множители при определенных соотношениях между частотами стремятся к бесконечности, что соответствует обмену энергией между модами, участвующими в резонансном взаимодействии. Но детальное исследование этого вопроса составляет предмет отдельного исследования.

4. Анализ решения

В полученных выражениях нелинейная поправка к частоте $-\varepsilon b_n^{(1)}$ появляется в расчетах второго порядка малости по безразмерной амплитуде ε и первого порядка по величине деформации e^2 . Она линейна по параметру w , амплитуде осцилляций ε , зависит от величины заряда капли Q , наличия электрического \mathbf{E}_0 и гравитационного \mathbf{g} полей. Формально в предположении, что $e^2 \propto \varepsilon$, поправка получается в расчетах третьего порядка малости, но ее смысл и функциональные зависимости отличаются от истинно нелинейной поправки, получающейся в расчетах третьего порядка малости по ε вследствие нелинейного взаимодействия мод осцилляций. То обстоятельство, что деформационная поправка пропорциональна параметру w , легко объяснимо: деформация равновесной формы капли, а следовательно, и связанная с ней поправка возникают благодаря наличию внешнего поля, и в его отсутствие обращаются в нуль. Наличие этой поправки должно приводить к снижению критических условий реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду в соответствии с соотношением

$$(\omega_2 - \varepsilon b_2^{(1)})^2 \approx \omega_2^2 - 2\varepsilon \omega_2 b_2^{(1)} = 0. \tag{5}$$

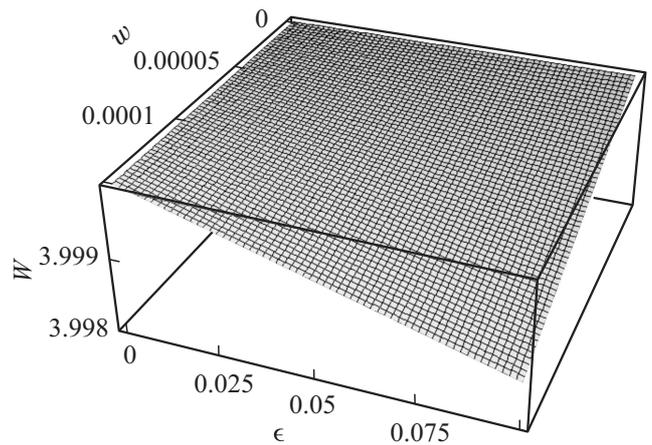


Рис. 1. Зависимость критического значения параметра Рэлея W от величины малого параметра ε и величины параметра Тейлора w для основной моды.

Деформационная поправка $2\varepsilon \omega_2 b_2^{(1)}$ к квадрату частоты для основной моды ($n = 2$) имеет вид

$$2\varepsilon b_2^{(1)} \omega_2 \equiv 16w\varepsilon \frac{27}{21} \left[\left(\frac{1}{W^2} (8-W) + \frac{9}{5} \right) + \frac{W}{[11-2W]} \frac{27}{5} \right]. \tag{6}$$

Подставив (6) в (5) и разрешая полученное уравнение относительно W , можно найти зависимость критического значения параметра Рэлея W от параметра w и малого параметра ε в виде разложения

$$W = 4 - \frac{666}{7} w\varepsilon + \frac{1537461}{245} w^2 \varepsilon^2 - O(w^3 \varepsilon^3). \tag{7}$$

Расчет зависимости $W \equiv W(w, \varepsilon)$ приведен на рис. 1. Максимально возможное значение параметра w найдем из следующих соображений. Значение параметра Рэлея W должно быть около критического. Примем его равным 3.9. Капля должна быть неподвижна в суперпозиции гравитационного и электростатического полей, т.е.

$$g^2 = (3QE_0/4\pi)^2 \equiv 36Ww.$$

Отсюда получим $w = g^2/36W$. Ускорение поля тяжести в принятых безразмерных переменных будет безразмериваться на $\sigma R^{-2} \rho^{-1}$. Принимая, что радиус капли не превышает $1000 \mu\text{m}$, получим для воды, что $\sigma R^{-2} \rho^{-1} \approx 7.2 \cdot 10^3 \text{ cm/s}^2$. Значит, в безразмерных переменных $g \approx (978/7.2 \cdot 10^3) \approx 0.136$, а для параметра w получим $w = \frac{0.0185}{36W} \approx 10^{-4}$ даже при $W \approx 1$. Квадрат эксцентриситета при этом будет $e^2 \approx 0.05$ (при принятых значениях прочих величин). Таким же, согласно вышесказанному, должен быть малый параметр ε .

Из рис. 1 видно, что с увеличением w и ε критическое значение параметра W снижается. В принятых в расчетах диапазонах изменения w и ε параметр W уменьшается примерно на 0.05% величины. С уменьшением радиуса капли (а эксперименты в [14,15] совершались с каплями радиусом $58 \mu\text{m}$) эта погрешность уменьшается.

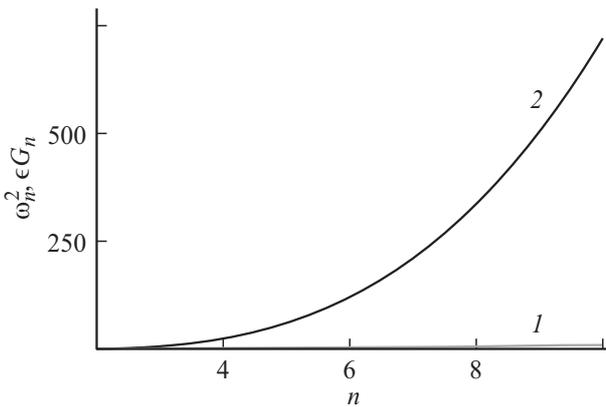


Рис. 2. Зависимости величины безразмерных квадрата частоты и деформационной поправки к ней от номера моды, рассчитанные при $W = 3.9$, $w = 0.00015$, $\varepsilon = 0.05$, $G \equiv 2\omega_n b_2^{(1)}$.

Это представляется совсем малым. На рис. 2 приведены зависимости от номера моды (который условно принимаем непрерывно изменяющимся) величины деформационной поправки $\varepsilon G_n \equiv 2\omega_n \varepsilon b_n^{(1)}$ (кривая 1) при $\varepsilon = 0.05$ и квадрата частоты ω_n^2 (кривая 2). Видно, что поправка мала (за счет малости w) для любых номеров мод.

Следует отметить, что указанная поправка может быть вообще уменьшена до нуля при экспериментах в невесомости, как это осуществлено в [20]. Однако существует поправка, связанная с нелинейным взаимодействием мод осцилляций (вследствие нелинейности уравнения Эйлера и граничных условий к нему), появляющаяся в расчетах третьего порядка малости. Ее величина не зависит от наличия либо отсутствия внешних полей, и может составлять несколько процентов от значения частоты [21]. Формально результат расчетов третьего порядка малости можно записать в виде

$$\begin{aligned} & [\omega_2 - (\varepsilon b_2^{(1)} + \varepsilon^{3/2} b_2^{(3/2)} + \varepsilon^2 b_2^{(2)} + \varepsilon^2 c_2)]^2 \\ & \approx \omega_2^2 - 2\omega_2 (\varepsilon b_2^{(1)} + \varepsilon^{3/2} b_2^{(3/2)} + \varepsilon^2 b_2^{(2)} + \varepsilon^2 c_2) = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где $\varepsilon^2 c_2$ — амплитудное значение поправки к частоте, связанное с нелинейным взаимодействием, имеет весьма громоздкий вид и потому не приводится, выражение $\varepsilon b_2^{(1)} + \varepsilon^{3/2} b_2^{(3/2)} + \varepsilon^2 b_2^{(2)}$ представляет асимптотическое разложение деформационной поправки, где каждый член много меньше предыдущего. Принимая во внимание малость $\varepsilon b_2^{(1)}$, в дальнейших расчетах будем опускать весьма малые $\varepsilon^{3/2} b_2^{(3/2)} + \varepsilon^2 b_2^{(2)}$. Нелинейная поправка квадрату частоты $2\varepsilon^2 \omega_2 c_2$ в (8) имеет большую величину по сравнению с деформационной $2\varepsilon \omega_2 b_2^{(1)}$ [21]. Главный вклад в величину поправки вносит околоритический заряд. Поскольку слагаемые, происходящие из-за наличия гравитационного и электростатического полей, пропорциональны малому w , то, пренебрегая ими, получим задачу об определении нелинейных поправок для заряженной капли в отсутствие полей.

5. Постановка задачи о нелинейных осцилляциях заряженной капли

Пусть имеется сферическая капля радиуса R , имеющая заряд Q , идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ . Коэффициент поверхностного натяжения обозначим σ . Движение жидкости в капле примем потенциальным с потенциалами скоростей ψ . Потенциал электрического поля в окрестности капли обозначим Φ . Форму капли будем считать осесимметричной как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение границы раздела сред в тех же безразмерных переменных в любой момент времени t запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t).$$

Математическая формулировка задачи о расчете нелинейных капиллярных колебаний заряженной капли имеет вид

$$\Delta\psi = 0, \quad \Delta\Phi = 0, \quad (9)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi \rightarrow 0,$$

$$r = 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \partial_t \xi = \partial_r \psi - \frac{1}{r^2} \partial_\vartheta \psi \partial_\vartheta \xi,$$

$$\Delta p - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + p_{EQ} + p_g = p_\sigma, \quad \Phi = \Phi_S(t),$$

$$\int_V r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{3}, \quad \int_V \mathbf{e}_r r^3 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0,$$

$$V = \{0 \leq r \leq r(\vartheta) + \xi(\vartheta, t), 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = -4\pi Q,$$

$$S = \{r = r(\vartheta) + \xi(\vartheta, t), 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$t = 0: \quad \xi = \xi_0 P_0(\cos \vartheta) + \varepsilon \sum_{i \in \Omega} h_i P_i(\cos \vartheta), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0.$$

Обозначения в уравнениях (9) аналогичны обозначениям, введенным в задаче (2), p_Q — давление электрического поля, вызванного наличием заряда на капле.

6. Решение задачи о нелинейных осцилляциях заряженной капли

Решение сформулированной задачи методом многих временных масштабов приводит в расчетах третьего порядка малости к аналитическому выражению для образующей осесимметричной формы нелинейно-осциллирующей заряженной капли электропроводной несжимаемой жидкости [22]

$$\begin{aligned} r(\vartheta, t) = & 1 + \varepsilon \sum_{n \in \Omega} M_n^{(1)}(t) P_n(\mu) \\ & + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} (M_n^{(2)}(t) + \varepsilon M_n^{(3)}(t)) P_n(\mu), \end{aligned}$$

$$M_n^{(1)}(t) = h_i \delta_{in} \cos[(\omega_n - \varepsilon^2 c_n)t],$$

$$c_n = \frac{1}{2\omega_n} \left\{ \frac{h_n^2 (\Xi_n^0 + 2\omega_n^2 (\Xi_n^1 - 2\Xi_n^2))}{4(2n+1)} + \sum_{k \in \Omega} \frac{h_k^2 \Xi_n^0}{2(2k+1)} - \sum_{k \in \Omega} \frac{h_k^2}{4} \left[H_{nkn}^{1(-)(+)} + H_{knk}^{2(+)(+)} + H_{knk}^{2(-)(-)} + (1 - \delta_{kn}) \left(H_{kkn}^{1(-)(+)} + H_{kkm}^{2(+)(+)} + H_{nkn}^{2(-)(-)} \right) \right] \right\},$$

$$H_{kmln}^{2(\pm)(\pm)} = \sum_{g=1}^{\infty} \left(\beta_{kmgln}^{2(\pm)} \lambda_{lmg}^{(\pm)} + \chi_{kmgln}^{1(\pm)} \right) + \sum_{g=0}^{\infty} \chi_{kmgln}^{0(\pm)},$$

$$H_{kmln}^{1(\pm)(\mp)} = \sum_{g=1}^{\infty} \left(\beta_{kmgln}^{1(\pm)} \lambda_{lmg}^{(\pm)} + \chi_{kmgln}^{1(\mp)} \right) + \sum_{g=0}^{\infty} \chi_{kmgln}^{0(\mp)},$$

$$\lambda_{kmn}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \frac{[\gamma_{kmn} + \gamma_{mkn}] \pm \omega_k \omega_m (\eta_{kmn} + \eta_{mkn})}{[\omega_n^2 - (\omega_k \pm \omega_m)^2]}.$$

Неопределенные коэффициенты, входящие в c_n , вынесены в Приложение. Частоты ω_m имеют такой же вид, как и в предыдущей задаче. Аналитические выражения для коэффициентов $M_n^{(2)}$ и $M_n^{(3)}$, имеющие громоздкий вид, здесь не приводятся, поскольку они не представляют интереса для настоящего рассмотрения, отметим лишь их резонансный характер.

Видно, что нелинейная поправка к частоте c_n , появляющаяся в этих расчетах, пропорциональна квадрату безразмерной амплитуды осцилляций, как это и должно быть в асимптотических расчетах [1,2,5]. Кроме того, видно, что c_n в отличие от $b_n^{(1)}$ имеет резонансный характер: коэффициенты $\lambda_{kmn}^{(\pm)}$ содержат знаменатели, которые могут быть близки к нулю при определенных соотношениях частот. Численные расчеты, проведенные в [22], показывают, что амплитудное значение величины множителя нелинейной поправки к частоте c_n при $W \approx 4$ измеряется десятками единиц (например, для $n = 4$ она составляет около трех десятков безразмерных единиц). После умножения на $2\omega_n$ и ε^2 при не слишком малых значениях малого параметра ε (обычно в асимптотических оценках принимается $\varepsilon \approx 0.05-0.1$) получаем величину, существенно бóльшую (по порядку величины), чем деформационная поправка $2\omega_n \varepsilon b_n^{(1)}$ (амплитудное значение деформационной поправки $b_n^{(1)}$, согласно расчетам, при $n = 4$ не превышает единицы). Поэтому именно нелинейная поправка к частоте $2\omega_n \varepsilon^2 c_n$ определит снижение критического значения параметра W . Причем, согласно оценкам [22], снижение критического значения параметра Рэлея будет происходить не на сотые доли процента, как для деформационной поправки, а на единицы процентов, что сравнимо с погрешностью экспериментальных измерений [11-15].

Заключение

Использование для проверки критерия Рэлея (критерия устойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду) электростатического подвеса приводит к погрешностям, обусловленным стационарными деформациями капель в силовых полях. Кроме того, независимо от вида экспериментальной установки имеют место нелинейное взаимодействие мод осцилляций и появление соответствующей поправки к частоте. Появляющиеся из-за деформации капель поправки к критическим условиям реализации неустойчивости пропорциональны первой степени безразмерной амплитуды, но малы по абсолютной величине вследствие малости полевого параметра w . Нелинейные взаимодействия осцилляций капель в подвесе приводят к появлению нелинейных поправок, пропорциональных в этом случае квадрату безразмерной амплитуды осцилляций, к частоте и к существенно большему изменению критического значения параметра Рэлея. Поэтому даже при исключении силового воздействия со стороны полей на форму капли (проводя эксперименты в невесомости) повысить точность определения критерия Рэлея не удастся.

Работа выполнена при поддержке тематического плана ЯрГУ им. П.Г. Демидова.

Приложение

$$\Xi_n^0 = \omega_n^2 + n(n-1)(4+2n-5W),$$

$$\beta_{kmgln}^{1(\pm)} = \Pi_{kgn}^0 - \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l \pm \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l \pm \omega_m)^2,$$

$$\Xi_n^1 = (n-1),$$

$$\beta_{kmgln}^{2(\pm)} = \Pi_{kgn}^0 + \Pi_{kgn}^1 \omega_k (\omega_l \pm \omega_m) - \Pi_{kgn}^2 (\omega_l \pm \omega_m)^2,$$

$$\Xi_n^2 = n(n-1)/(n+1),$$

$$\chi_{kmgln}^{1(\pm)} = \Lambda_{kmgln}^1 \pm \Gamma_{kmgln}^1 \omega_m \omega_k,$$

$$\chi_{kmgln}^{0(\pm)} = \Lambda_{kmgln}^0 \pm \Gamma_{kmgln}^0 \omega_m \omega_k,$$

$$\Lambda_{kmgln}^0 = \omega_k^2 K_{gln} (\alpha_{kmg} (k-2)/k + (k-1)(n-k+2) K_{kmg}/2 + n(W K_{gln} ((k^3 - 2(m+1)(m+2) - k^2(n-9) - k(2m(m+3) + 3n - 22))) K_{kmg} - 2(k+2)\alpha_{kmg})/2 - ((3k(k+1) - 2) K_{kmg} - l(l+1)\alpha_{kmg}/2) K_{gln} + \alpha_{kmg} \left(l^2 K_{lgn} - \sum_{v=1}^{[l/2]} (2l-4v+1) K_{l-2v,g,n} \right),$$

$$\Lambda_{kmgln}^1 = nWkK_{kmg}((g+1)(l-2-g+n)K_{lgn} + \alpha_{lgn}) + ((\alpha_{lgn}/g + (n+1-g)K_{lgn}) \times (\alpha_{kmg}/m + (1-m)K_{kmg}))\omega_m^2,$$

$$\Gamma_{kmgln}^0 = ((k-2)(K_{gln}((k-1)K_{kmg}/2 - \alpha_{kmg}/k) + K_{mgn}((k-1)K_{klg}/2 - \alpha_{klg}/k)) - n(k-1)K_{gln}(\alpha_{kmg}/(mk) + K_{kmg})) + (k+3)K_{mgn}(\alpha_{klg}/(k+1) - (k+2)K_{klg}/2) + ((g+2)K_{gln} - \alpha_{gln}/(g+1)) \times ((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1)) + (k+3)K_{gln}(\alpha_{kmg}/(k+1) - (k+2)K_{kmg}/2) - (n+1)((\alpha_{mgn}/((m+1)(g+1)) + K_{mgn}) \times ((k+2)K_{klg} - \alpha_{klg}/(k+1)) + K_{gln}((k+2)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/(k+1)) - (\alpha_{kmg}/((k+1)(m+1)) + K_{kmg})(k+2)K_{gln})),$$

$$\Gamma_{kmgln}^1 = ((\alpha_{lgn}/g + (n+1-g)K_{lgn})((m-1)K_{kmg} - \alpha_{kmg}/m) + ((k+n)\alpha_{kgn}/(gk) + (n+1-g)K_{kgn})((m-1)K_{mlg} - \alpha_{mlg}/m)),$$

$$\Pi_{kmn}^0 = (nK_{kmn}(2((k-1)(k+2) + m(m+1)) + W(k-1)(n-5-k)) + (\alpha_{kmn}/k + (n+1-k)K_{kmn})\omega_k^2 + \alpha_{kmn}/(k+1) + nW((m+1) \times (k+n-m-2)K_{kmn} + \alpha_{kmn})),$$

$$\Pi_{kmn}^1 = ((k+m-n-2)K_{kmn} - (n+k+m)\alpha_{kmn}/(mk)),$$

$$\Pi_{kmn}^2 = ((m-n-1)K_{kmn} - \alpha_{kmn}/m),$$

$$\gamma_{mln} = (n+1)\chi_n K_{mln}(\omega_m^2(n-m+1) + 2n(l(l+1)-1) + (l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3)nW/2) + \alpha_{mln}(\omega_m^2/m + nW/2),$$

$$\eta_{mln} = K_{mln}(n/2 - m + 1) + \alpha_{mln}((1 + n/(2l))/m),$$

$$K_{mln} = (C_{m0l0}^{n0})^2,$$

$$\alpha_{mln} = -C_{m0l0}^{n0}C_{m(-1)l1}^{n0}\sqrt{m(m+1)l(l+1)}.$$

C_{mpls}^{nk} — коэффициенты Клебша–Гордана.

Список литературы

- [1] Tsamopoulos J.A., Brown R.A. // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 147. P. 373–395.
- [2] Feng Z. // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 333. P. 1–21.
- [3] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–185.
- [4] Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.
- [5] Григорьев А.И., Ширяева С.О. Аналитические расчеты оспилляций заряженной капли. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2011. 311 с.
- [6] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 36–44.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.
- [8] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 17–30.
- [9] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32–40.
- [10] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 93–95.
- [11] Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. // J. Atmosph. Sci. 1970. Vol. 27. N 11. P. 1173–1181.
- [12] Schweizer J.D., Hanson D.N. // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
- [13] Roulleau M., Desbois M. // J. Atmosph. Sci. 1972. Vol. 29. N 4. P. 565–569.
- [14] Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. N 8. P. 1–4.
- [15] Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. // Nature. 2003. Vol. 421. N 6919. P. 128.
- [16] Rayleigh (Strutt J.W.) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [17] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [18] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
- [19] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 20–26.
- [20] Inculett I.I., Floryan J.M., Haywood R.J. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1992. Vol. 28. N 5. P. 1203–1209.
- [21] Григорьев А.И., Жаров А.Н., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 44–53.
- [22] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 19–26.