

## Стохастический резонанс в нелинейной системе с $1/f$ -спектром

© В.Н. Скоков, В.П. Коверда

Институт теплофизики УрО РАН,  
620016 Екатеринбург, Россия  
e-mail: vnskokov@itp.uran.ru

(Поступило в Редакцию 3 апреля 2013 г.)

Численными методами исследована система двух нелинейных стохастических уравнений, моделирующая  $1/f$ -флуктуации при взаимодействии неравновесных фазовых переходов, в присутствии внешнего гармонического воздействия. Показано, что в системе возникает стохастический резонанс, приводящий к усилению выходного периодического сигнала под действием шума. Случайному процессу с  $1/f$ -спектром мощности соответствует максимум информационной энтропии Гиббса–Шеннона. При стохастическом резонансе информационная энтропия минимальна.

### Введение

В кризисных и переходных режимах тепломассопереноса наблюдаются низкочастотные пульсации со спектром мощности  $S$ , обратно пропорциональным частоте  $f$ , т.е.  $S \sim 1/f$  [1,2]. Для математического моделирования таких пульсаций предложена система двух нелинейных стохастических дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие фазовых переходов в системах с развитыми флуктуациями [1]. Было показано, что в данной системе существует индуцированный шумом переход, который обуславливает критическое поведение, сопровождающееся масштабно-инвариантными флуктуациями с  $1/f$ -спектром мощности. Предложенная система уравнений применялась для описания экспериментов, в которых наблюдались низкочастотные пульсации с  $1/f$ -спектром при неравновесных фазовых переходах, в частности, в переходных режимах кипения [2,3], кавитации [4], горения [5], электрического разряда [6].

Установление общих закономерностей возникновения высокоэнергетических пульсаций с низкочастотной расходимостью спектров мощности необходимо для выработки способов их подавления. Важным является вопрос об устойчивости таких пульсаций. В статистической механике принцип максимума энтропии Гиббса–Шеннона соответствует гауссовскому распределению флуктуаций. Плотность вероятности распределения флуктуаций с  $1/f$ -спектром мощности отличается от нормального гауссовского и имеет степенные „хвосты“. Поэтому возникает вопрос об использовании в качестве критерия устойчивости, принципа максимума информационной энтропии Гиббса–Шеннона [7,8]. В работе [9] показано, что с учетом иерархии процессов управления и подчинения к сложной системе применим принцип максимума информационной энтропии. Флуктуациям с  $1/f$ -спектром мощности соответствует максимум такой энтропии, что свидетельствует об их устойчивости.

Принцип максимума энтропии был применен для анализа устойчивости сложных стохастических процессов, которые возникают при одновременном воздействии шумового и гармонического сигналов на систему [10].

При воздействии гармонической силой устойчивые результирующие процессы разделены на две ветви в зависимости от амплитуды гармонической силы.

Совместное действие шума и периодического сигнала на нелинейную систему может приводить к новым режимам поведения системы. Одним из таких режимов является стохастический резонанс, при котором отклик нелинейной системы на слабое гармоническое воздействие усиливается при добавлении шумового сигнала [11–14]. В отличие от флуктуаций с  $1/f$ -спектром стохастическому резонансу соответствует минимум информационной энтропии, что свидетельствует о большей степени упорядоченности системы [13].

Классической моделью стохастического резонанса являются случайные блуждания в двухъямном потенциале в присутствии внешней гармонической силы. Обычно считается, что в такой бистабильной системе стохастический резонанс наступает тогда, когда среднее время перехода через потенциальный барьер (время Крамерса) близко к полупериоду внешнего периодического воздействия. В качестве причины стохастического резонанса рассматривается также изменение эффективных параметров системы под воздействием шума [15]. Многочисленные исследования показали, что стохастический резонанс в различных модификациях представляет собой широко распространенное явление, типичное для многих нелинейных систем различной природы. В частности, явление, аналогичное стохастическому резонансу, было установлено в хаотических системах без внешнего случайного воздействия [16]. В этом случае роль шума играет собственная хаотическая динамика.

Строгое теоретическое рассмотрение стохастического резонанса в общем случае наталкивается на ряд сложностей принципиального характера. Важную роль в установлении закономерностей и особенностей проявления стохастического резонанса в различных системах играет численное моделирование соответствующих нелинейных уравнений.

В настоящей работе показано возникновение стохастического резонанса в нелинейной системе двух стохастических дифференциальных уравнений, модели-

рующей флуктуации с  $1/f$ -спектром, в присутствии внешнего гармонического воздействия.

## Математическая модель $1/f$ -флуктуаций при взаимодействии фазовых переходов

Стохастическая система, моделирующая взаимодействующие фазовые переходы, в простейшем случае может быть записана в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \Gamma_2(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — динамические переменные, их сумма  $\psi + \varphi$  и разность  $\psi - \varphi$  связаны с параметрами порядка докритического и закритического фазовых переходов теории Ландау.  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  —  $\delta$ -коррелированные шумы с нормальным распределением, которые могут иметь разные реализации, но одинаковые дисперсии  $\sigma^2$ . Коэффициент 2 перед вторым слагаемым в правой части второго уравнения (1) нарушает потенциальность системы и делает второе уравнение управляющим [9].

На рис. 1 показан фазовый портрет системы (1) в отсутствие шума. Потенциальный рельеф представляет собой две гиперболические долины, разделенные барьером с точкой перевала в начале координат. Асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$  дается релаксационными зависимостями  $\varphi(t) \rightarrow t^{-1/2}$  и  $\psi(t) \rightarrow t^{1/2}$ . При включении белого шума фазовая траектория осуществляет случайные блуждания в одной из долин потенциального рельефа. Характер потенциального рельефа приводит к тому, что при оптимальном уровне шума случайный

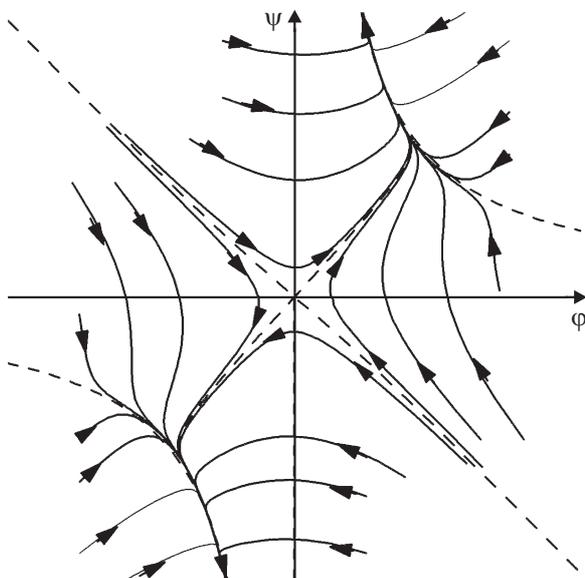


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1) в отсутствие шума.

процесс становится стационарным. Сужающиеся все более круто стенки долины по мере удаления от начала координат не позволяют фазовой траектории продвинуться далеко по дну долины от перевала, а при достаточной интенсивности шума происходит отражение от стенок, и траектория возвращается к началу координат или переходит в другую долину.

Плотность вероятности распределения  $P(\psi)$  имеет два максимума и „хвосты“, спадающие как у нормального гауссовского распределения. Плотность вероятности  $P(\varphi)$  имеет максимум в начале координат и степенные хвосты. В работе [17] продемонстрирована масштабная инвариантность распределения  $P(\varphi)$  при масштабном огрублении реализаций. При этом функция  $P(\varphi)$  становится бимодальной. Действие шума определенной интенсивности приводит к тому, что случайные процессы  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  становятся стационарными и система демонстрирует бистабильное поведение. Спектр мощности случайного процесса  $\varphi(t)$  в широком диапазоне интенсивности белого шума изменяется как  $S_\varphi \sim 1/f$ , а спектр процесса  $\psi(t)$  как  $S_\psi \sim 1/f^2$ . Были выделены пересекающиеся и следующие одна за другой низкочастотные высокоэнергетические флуктуации, которые ответственны за возрастающую часть спектра мощности. Выделенные низкочастотные флуктуации имеют некоторую аналогию с лавинами в моделях самоорганизованной критичности. Однако имеется существенное различие. В известных из литературы моделях самоорганизованной критичности масштабно-инвариантные флуктуации в сложных системах моделируются клеточными автоматами и непосредственно находятся лишь функции распределения, а остальные величины вычисляются косвенно [18,19]. Моделирование случайных процессов системой нелинейных стохастических уравнений позволяет непосредственно находить функции распределения, спектры мощности, энтропию.

Важным является вопрос об устойчивости пульсаций с  $1/f$ -спектром мощности. В работе [9] показано, что в качестве критерия устойчивости может быть использован принцип максимума информационной энтропии Гиббса–Шеннона. Анализ управления и подчинения в системе показал, что второе уравнение в системе (1) является управляющим. Поэтому функция распределения второго уравнения с гауссовскими хвостами может быть использована для нахождения максимума энтропии Гиббса–Шеннона. Найденный локальный максимум информационной энтропии соответствует настройке на критичность стохастических уравнений (1) и спектральной плотности  $S_\varphi \sim 1/f$ , что свидетельствует об устойчивости флуктуаций с  $1/f$ -спектром мощности.

## Гармоническое воздействие на случайный процесс $1/f$ -спектром

Принцип максимума энтропии был использован для анализа устойчивости сложных случайных процессов, которые возникают при дополнительном воздействии на

систему гармонической силой [10]. Система уравнений в этом случае записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi\psi^2 + \psi + \Gamma_1(t) + A \sin \omega t, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \Gamma_2(t) + A \sin \omega t, \end{aligned} \quad (2)$$

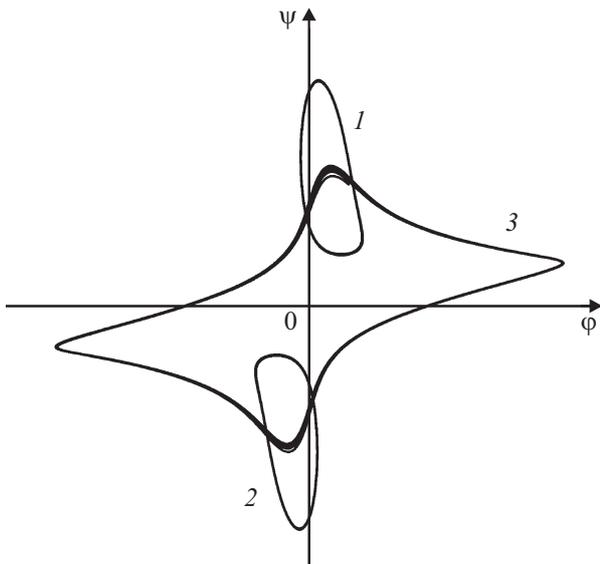
где  $A$  — амплитуда,  $\omega$  — частота внешнего гармонического воздействия. Система (2) решалась численным интегрированием. Из найденных численных решений системы (2) находились спектры мощности случайных процессов  $S_\varphi$ ,  $S_\psi$  и плотности вероятности распределений стохастических переменных  $P(\varphi)$ ,  $P(\psi)$ . Плотность вероятности  $P(\psi)$  позволяет найти информационную энтропию

$$H = - \sum_n P_n \log P_n, \quad (3)$$

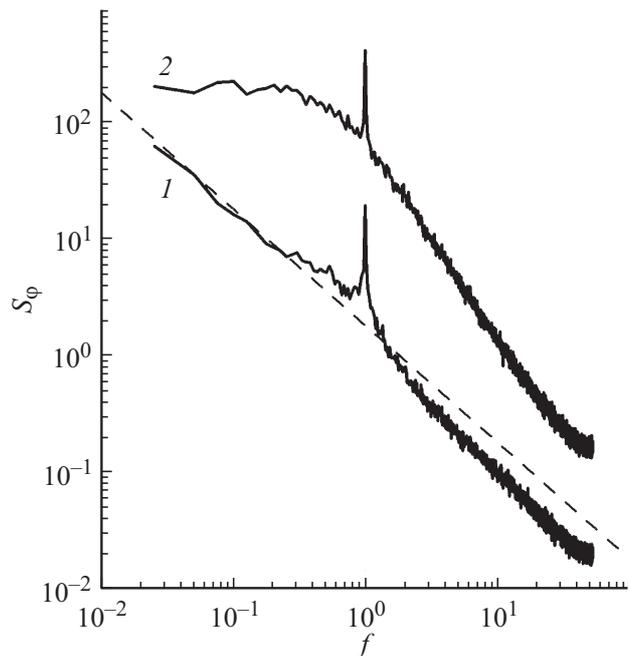
где  $P_n$  — плотность вероятности распределения стохастической переменной,  $n$  относится к последовательности разбиения аргумента функции распределения по величине [9,10].

Устойчивые результирующие процессы, соответствующие максимуму энтропии, разделены на две области, одна из которых отвечает случайному  $1/f$ -процессу с гармоническим возмущением вблизи частоты  $\omega$ , а другая — зашумленному гармоническому процессу [10].

В настоящей работе система (2) была использована для выявления возможности появления стохастического резонанса. На рис. 2 показаны фазовые портреты системы (2) в отсутствие шума ( $\sigma = 0$ ). При отсутствии шумового сигнала и при малом значении амплитуды  $A$  фазовый портрет системы был несимметричен по отношению к началу координат и стремился к циклу с



**Рис. 2.** Фазовые портреты системы (2) в отсутствие шума. Циклы 1 и 2 соответствуют различным начальным условиям и амплитуде внешнего гармонического сигнала  $A = 2.5$ , цикл 3 —  $A = 3.2$ . Частота внешнего гармонического сигнала  $\omega = 0.5$ .



**Рис. 3.** Спектры мощности  $S_\varphi$  случайного процесса  $\varphi(t)$  при двух значениях амплитуды шума  $\sigma$ : 1 — 0.9, 2 — 2.9. Штриховая линия — зависимость, обратно пропорциональная частоте.

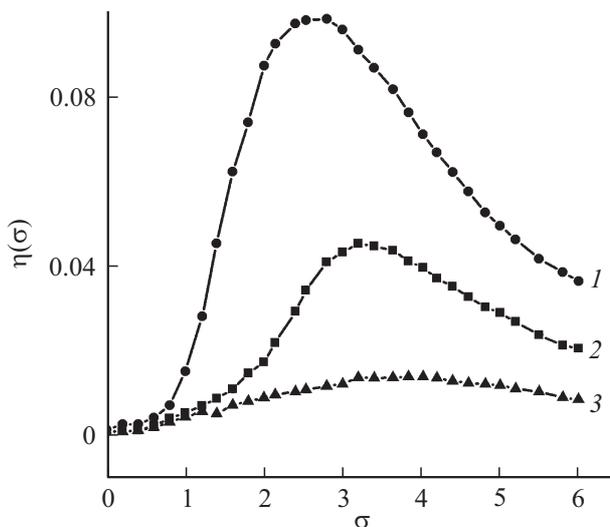
частотой  $\omega$ , расположенному внутри одной из долин в зависимости от начальных условий (циклы 1 и 2 на рис. 2). Стационарность процесса, как и в случае системы (1), достигалась сужением стенок долины по мере удаления от начала координат. С увеличением амплитуды гармонической силы  $A$  фазовая траектория начинала охватывать обе долины и, начиная с некоторого значения  $A^*$ , фазовый портрет становился симметричным относительно начала координат (цикл 3 на рис. 2). Добавление шума при малых значениях  $A$  приводило вначале к зашумлению фазовой траектории, которая оставалась в одной долине, а затем с увеличением интенсивности шума наблюдались переключения между долинами.

По найденным спектрам  $S_\varphi$  и  $S_\psi$  определялась мощность выходного сигнала на частоте гармонического воздействия  $\omega$  в зависимости от амплитуды шума  $\sigma$ . Расчеты проводились при различных значениях амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$  гармонической силы. При частотах внешней периодической силы  $\omega < 5$  с увеличением интенсивности шума наблюдалось вначале увеличение величины пика спектральной плотности выходного сигнала  $\varphi(t)$  на частоте  $\omega$ , а затем уменьшение пика. Такое поведение характерно для стохастического резонанса. На рис. 3 приведены спектры мощности  $S_\varphi$  случайного процесса  $\varphi(t)$  при двух значениях интенсивности шума. На спектре 1 наблюдается низкочастотная расхожимость по закону  $1/f$ . Спектр 2 соответствует максимуму величины пика спектральной плотности выходного сигнала  $\varphi(t)$  на частоте  $\omega$ .

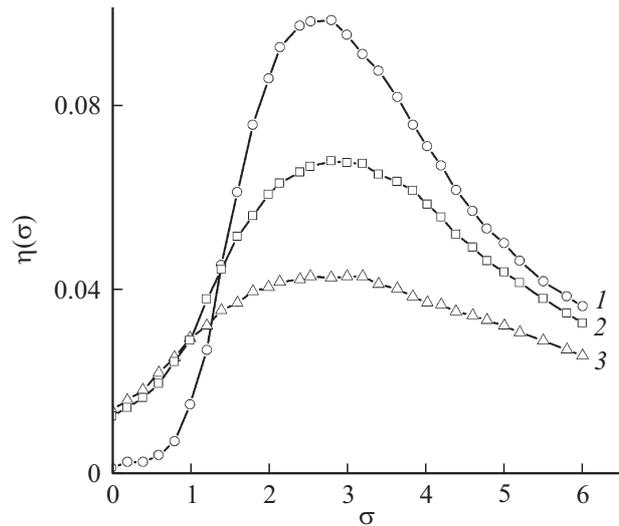
В отличие от поведения переменной  $\varphi(t)$  в поведении мощности выходного сигнала, определенной по спектру  $S_\psi$  переменной  $\psi(t)$ , резонансных явлений в указанном диапазоне частот  $\omega$  не наблюдалось. С увеличением интенсивности шума величина пика выходного сигнала на частоте  $\omega$ , определенная по спектру переменной  $\psi(t)$ , монотонно уменьшалась.

Увеличение мощности выходного сигнала определяется коэффициентом усиления  $\eta$ , который равен отношению мощности выходного сигнала на частоте  $\omega$  к квадрату амплитуды входного периодического сигнала  $A^2$ . На рис. 4 приведены зависимости коэффициента усиления  $\eta$ , определенного по спектру  $S_\varphi$  переменной  $\varphi(t)$ , от амплитуды шума  $\sigma$  при трех значениях частоты  $\omega$ . Немонотонная зависимость  $\eta(\sigma)$  связана со стохастическим резонансом в системе. С уменьшением частоты внешнего гармонического сигнала мощность выходного сигнала увеличивается. Зависимости, приведенные на рис. 4, являются типичными для стохастического резонанса [11–16]. На рис. 5 показаны зависимости  $\eta(\sigma)$ , найденные по спектрам  $S_\varphi$ , при различных амплитудах внешнего гармонического сигнала  $A$  и одной частоте  $\omega = 0.5$ . Зависимость 1 на рис. 5 соответствует малой амплитуде  $A$ , при которой в отсутствие шума нет переключений между долинами. Зависимости 2 и 3 на рис. 5 соответствуют амплитудам  $A$ , при которых происходят переключения в отсутствие шума и фазовый портрет бесшумовой системы симметричен относительно начала координат. Из рис. 5 видно, что в этом случае усиление сигнала происходит в меньшей степени, чем при малых значениях  $A$ .

Было исследовано влияние сдвига фаз гармонического сигнала, воздействующего на уравнения в системе (2). Для этого гармоническая сила, воздействующая на второе уравнение системы (2), записывалась в виде



**Рис. 4.** Зависимости коэффициента усиления выходного гармонического сигнала  $\eta(\sigma)$  для переменной  $\varphi(t)$  от амплитуды шума  $\sigma$  при трех значениях частоты  $\omega$ : 1 — 0.5, 2 — 1.0, 3 — 1.5. Амплитуда входного гармонического сигнала  $A = 1$ .



**Рис. 5.** Зависимости коэффициента усиления выходного гармонического сигнала  $\eta(\sigma)$  для переменной  $\varphi(t)$  от амплитуды шума  $\sigma$  при трех значениях амплитуды входного гармонического сигнала  $A$ : 1 — 1, 2 — 3, 3 — 5. Частота входного гармонического сигнала  $\omega = 0.5$ .

$A \sin(\omega t + \phi_0)$ , где  $\phi_0$  — сдвиг фаз. При малых значениях  $A$ , когда начальная не возмущенная шумом фазовая траектория целиком расположена в одной из долин, сдвиг фаз  $\phi_0$  влиял на фазовый портрет системы, но оказывал слабое влияние на стохастический резонанс. При значениях амплитуды  $A$ , при которых происходят переключения между долинами в отсутствие шума, появлялась зависимость стохастического резонанса от сдвига фаз. В частности, при  $\phi_0 = \pi/2$  стохастический резонанс по переменной  $\varphi$  исчезал, но появлялись резонансные явления по переменной  $\psi$ . При  $\phi_0 = -\pi/2$  резонанс, как и в отсутствие сдвига фаз, наблюдался лишь по переменной  $\varphi(t)$ .

Одной из основных характеристик стохастического резонанса является отношение сигнал/шум. Величина отношения сигнал/шум, обозначаемая как SNR, определяется отношением спектральных плотностей выходных сигнала и шума на частоте сигнала. На рис. 6 приведены зависимости отношения SNR от амплитуды шума  $\sigma$  для трех значений частоты  $\omega$ . Немонотонность зависимостей на рис. 6 также свидетельствует о стохастическом резонансе в системе. Максимумы зависимостей отношения сигнал/шум от амплитуды шума наблюдаются при меньших значениях  $\sigma$ , чем на зависимостях коэффициента усиления  $\eta(\sigma)$ . При увеличении частоты  $\omega$  максимум на зависимостях SNR( $\sigma$ ) исчезает, и отношение сигнал/шум становится монотонно убывающей функцией.

В области значений интенсивности шума, при которой наблюдался стохастический резонанс, энтропия принимала минимальное значение. На рис. 7 приведена зависимость информационной энтропии  $H$  от амплитуды шума  $\sigma$  при частоте внешней гармонической силы  $\omega = 0.5$  и амплитуде  $A = 1$ . Максимум на зависимости  $H(\sigma)$  соответствует  $1/f$ -поведению низкочастот-

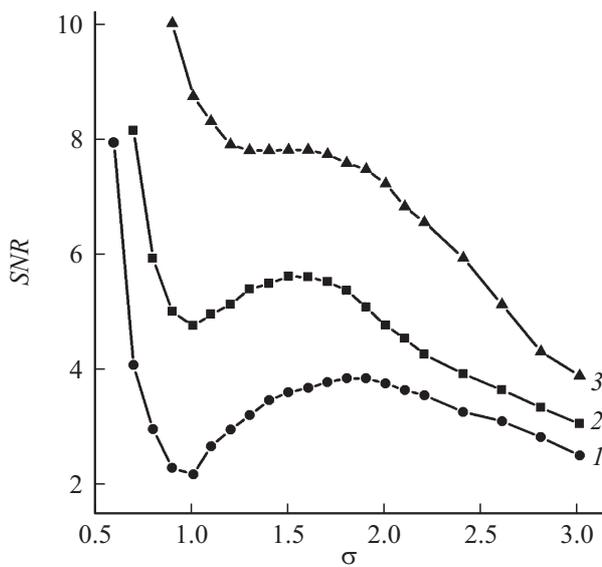


Рис. 6. Зависимости отношения сигнал/шум от амплитуды шума  $\sigma$  для трех значений частоты  $\omega$ : 1 — 0.5, 2 — 1.0, 3 — 1.5. Амплитуда входного гармонического сигнала  $A = 1$ .

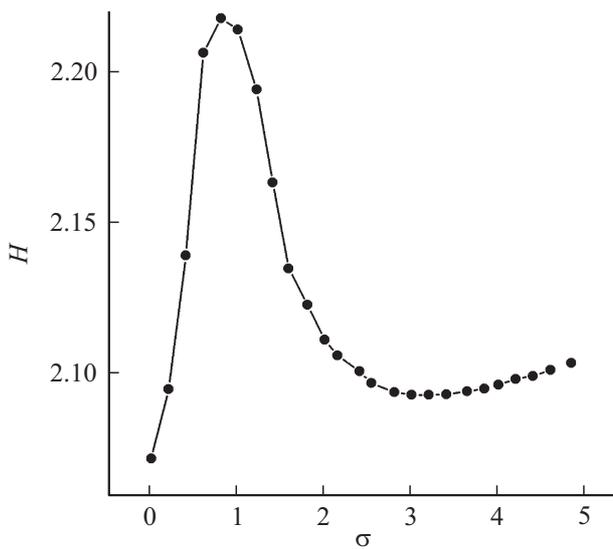


Рис. 7. Зависимость информационной энтропии  $H$  от амплитуды шума при частоте внешней гармонической силы  $\omega = 0.5$  и амплитуды  $A = 1$ .

ной составляющей спектра мощности [10], минимум на зависимости  $H(\sigma)$  соответствует стохастическому резонансу.

Следует отметить, что слабый стохастический резонанс наблюдался и при более высоких значениях частоты и амплитуды внешнего гармонического сигнала, которым соответствовала энергетическая щель на зависимости  $H(A, \sigma)$  [10]. В этой области возникает состояние бистабильности, связанное с изменением симметричного цикла фазового портрета на несимметричный. В области бистабильности наблюдался стохастический резонанс, чувствительный к величине сдвига фаз  $\phi_0$ .

Таким образом, в системе нелинейных стохастических уравнений, моделирующих низкочастотные пульсации при взаимодействующих фазовых переходах, возникает стохастический резонанс, приводящий к усилению выходного периодического сигнала под действием шума. Это ставит задачу экспериментального наблюдения стохастического резонанса в переходных режимах с фазовыми превращениями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-08-00019-а) и Программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 12-Т-2-1002).

### Список литературы

- [1] Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. Вып. 5. С. 1748–1757.
- [2] Skokov V.N., Koverda V.H., Reshetnikov A.V., Skripov V.P., Mazheiko N.A., Vinogradov A.V. // Int. J. Heat Mass Tran. 2003. Vol. 46. P. 1879–1883.
- [3] Скоков В.Н., Коверда В.П., Решетников А.В. // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 590–593.
- [4] Коверда В.П., Решетников А.В., Скоков В.Н., Виноградов А.В. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 22. С. 31–36.
- [5] Решетников А.В., Скоков В.Н., Коверда В.П., Виноградов А.В. // ДАН. 2000. Т. 374. Вып. 4. С. 481–483.
- [6] Скоков В.Н., Коверда В.П., Решетников А.В. // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. Вып. 3. С. 613–620.
- [7] Montroll E.W., Shlesinger M.F. // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 32. N 2. P. 209–230.
- [8] Башкиров А.Г. // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 149. № 2. С. 299–317.
- [9] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 1–6.
- [10] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 4. С. 1–5.
- [11] Benzi R., Sutera S., Vulpiani A. // J. Phys. A. 1981. Vol. 14. P. L453–L457.
- [12] Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F. // Rev. Mod. Phys. 1998. Vol. 70. P. 223–287.
- [13] Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. // УФН. 1999. Т. 169. № 1. С. 7–39.
- [14] Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. // Phys. Rep. 2004. Vol. 392. P. 321–424.
- [15] Ланда П.С., Ушаков В.Г. // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 86. Вып. 5. С. 356–359.
- [16] Анищенко В.С., Ануфриева М.В., Владивасова Т.Е. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. Вып. 20. С. 12–17.
- [17] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2004. Т. 79. Вып. 9. С. 4–8.
- [18] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. N 1. P. 364–374.
- [19] Bak P. How Nature Works. The Science of Self-Organized Criticality. Berlin: Springer, 1996. 212 p.