

09  
**Исследование электрофизических характеристик форменных элементов крови методом внутрирезонаторной лазерной спектроскопии. I. Моделирование светорассеяния на ансамбле биологических клеток со сложной структурой**

© К.Г. Куликов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: kulikov\_kg@hotmail.ru

(Поступило в Редакцию 30 сентября 2013 г.)

Исследованы оптические характеристики ансамбля произвольно ориентированных частиц, помещенных в полость оптического резонатора. Исследования основаны на самосогласованном сопряжении по неоднородным оптическим резонаторам с результатами рассеяния на ансамбле произвольно ориентированных в пространстве сферических частиц различного размера и структуры. В итоге построена новая электродинамическая модель взаимодействия лазерного излучения с клетками крови с учетом их строения для возможного прогнозирования оптических свойств (случай *in vivo*).

## Введение

В последнее время лазерные технологии активно используются для решения широкого класса задач в различных областях науки и техники от физики и химии до биологии и медицины. Здесь лазерные источники используются для диагностики, терапии или хирургических операций.

Для решения этих задач в первую очередь выбирают наиболее информативные показатели, характеризующие жизнедеятельность организма. К таким показателям относятся, в частности, результаты анализа периферической крови, ибо периферическая кровь, омывающая все органы и ткани организма, несет достаточно полную информацию о его состоянии. Комплексное изучение характеристик светорассеяния и поглощения позволяет быстро, интактно обнаруживать физиологические и морфологические изменения в клетках, обусловленные температурными, химическими воздействиями и т. д.

Как известно, кровь состоит из следующих форменных элементов [1,2]: лейкоцитов, эритроцитов и тромбоцитов. Исследование оптических свойств этих биологических объектов позволяет решить ряд важных проблем для диагностики различных патологических процессов, протекающих в организме. Прежде чем разрабатывать математическую модель описания взаимодействия лазерного излучения со сложно структурированными клетками крови, необходимо рассмотреть их геометрическое строение.

Начнем с клеток, концентрация которых в крови наибольшая — эритроцитов. Эритроцит — клетка, имеющая особую форму двояковогнутого диска. В клетке нет ядра, а большую часть цитоплазмы эритроцита занимает специфический белок — гемоглобин. В норме 70–80% эритроцитов имеют сферическую двояковогнутую форму, а остальные 20–30% могут быть различной

формы. Например, простая сферическая, овальная, чашеобразная и т. д. Форма эритроцитов может нарушаться при различных заболеваниях, например эритроциты в форме серпа характерны для серповидно-клеточной анемии.

Лейкоциты — большой класс клеток крови, который включает в себя несколько разновидностей, а именно лейкоциты делятся на гранулоциты (имеют зернистость, гранулы) и агранулоциты (не имеют гранул). К гранулоцитам относятся: нейтрофилы, эозинофилы, базофилы.

Нейтрофил имеет округлую форму и необычную форму ядра. Ядро его представляет собой палочку. Нейтрофил с ядром в форме палочки (палочкоядерный) — это „молодая“ клетка, а с сегментарным ядром (сегментоядерный) — „зрелая“ клетка. В крови большинство нейтрофилов сегментоядерные (до 65%), плоскоядерные в норме составляют лишь до 5%.

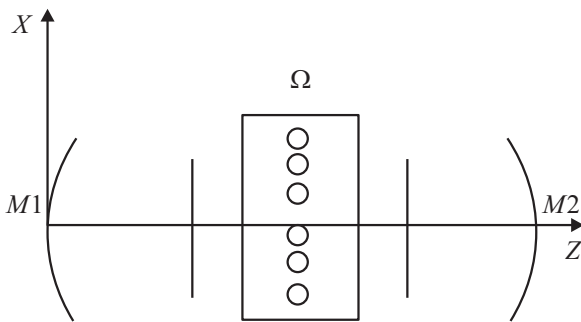
Эозинофил, как и нейтрофил, имеет округлую форму и палочковидную или сегментарную форму ядра. Гранулы, расположенные в цитоплазме данной клетки, достаточно крупные, одинакового размера и формы.

Базофил имеет округлую форму, палочкоядерное или сегментоядерное ядро. В цитоплазме содержатся различные по величине и форме гранулы.

Агранулоциты включают следующие виды клеток: моноциты, лимфоциты.

Моноцит является агранулоцитом, т. е. в данной клетке отсутствует зернистость. Это крупная клетка, близкой к треугольной формы, имеет большое ядро, которое бывает округлой или бобовидной формы и т. д.

Лимфоцит — округлая клетка различных размеров, имеющая крупное круглое ядро. Лимфоцит образуется из лимфобласта в костном мозгу, так же как и другие клетки крови, несколько раз делится в процессе созревания.



**Рис. 1.** Линейный резонатор с образцом биоткани, моделирующей форменные элементы крови.

Тромбоциты — маленькие клетки круглой или овальной формы, не имеющие ядра. В работе построена электродинамическая модель взаимодействия лазерного излучения с клетками крови для возможного прогнозирования их электрофизических свойств. Наиболее эффективным подходом, позволяющим исследовать процессы в сложных биосистемах, являются оптические внутрирезонаторные методы.

Пусть в некоторой окрестности оси  $Z$  в области  $\Omega$  линейного резонатора расположена кювета с образцом биоткани, моделирующей форменные элементы крови (рис. 1). Мы предполагаем, что частицы, моделирующие форменные компоненты крови, в частности эритроциты, имеют сферическую форму, что можно рассматривать как первое приближение; при этом остальные элементы крови мы будем описывать сферой с неконцентрическим включением. Размеры частиц больше длины волны падающего поля, т.е.  $ka^j > 1$ , где  $a^j$  — радиус частицы с номером  $j$ . Пусть при этом на группу частиц с радиусами  $a^j$  и с комплексным показателем преломления  $N^j = n^{(o)j} + i\chi^j$ , где  $j$  — номера частиц, падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна. Направление падающей волны произвольно. Совокупность частиц рассматривается в 3-мерной системе координат, начало которой расположено в центре частицы с некоторым номером  $j_0$ . Радиус-вектор любой другой  $j$ -частицы обозначим через  $\mathbf{r}_{j_0,j}$ . В данной постановке рассматривается только простая гармоническая зависимость от времени с угловой частотой  $\omega$ , причем множитель  $\exp(-i\omega t)$  всюду опускается.

Поле в окрестности частицы с номером  $j_0$ , искаженное присутствием других частиц, определяется из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = ik\mathbf{R}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -ik\mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0,$$

где  $k$  — волновое число. Требуется найти решение на собственные колебания оптического резонатора, в полости которого расположена совокупность рассеивающих частиц со сложной структурой.

Работа состоит из нескольких разделов. В первом разделе рассмотрена проблема рассеяния на частице при смещении ядра относительно центра. В виду того, что

расположение ядра в клетке не постоянное, в частности в молодых и эсбриональных клетках оно часто находится в центре, а по мере роста клетки и усиления в ней процессов обмена веществ положения ядра может измениться, при этом ядро всегда погружено в цитоплазму.

Во втором и третьем разделах решена задача многократного рассеяния на ансамбле сфер, при помощи которой моделируется биологическая среда (форменные элементы крови), которая помещена в полость оптического резонатора. При этом самосогласованно учитывается многократное рассеяние на совокупности частиц с неконцентрическим включением и соответственно предложено решение для собственных частот оптического резонатора с кюветой частиц, имеющих сложную структуру.

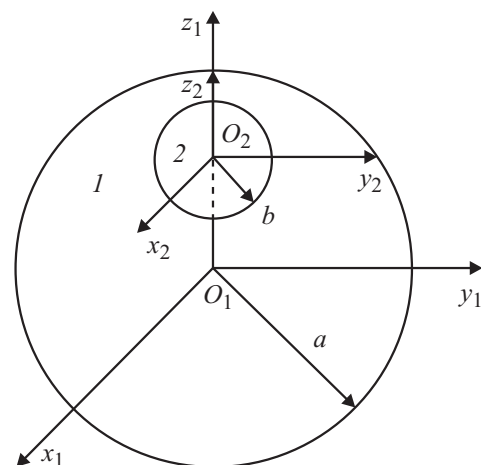
## 1. Рассеяние на частице со смещенным ядром

Особый практический интерес представляет решение задачи рассеяния на частице при смещении ядра относительно центра, так как центральное положение ядра рассмотрено в ряде работ [3–5].

Таким образом, в данном разделе рассмотрена проблема рассеяния на биологических частицах, в частности форменных элементов крови, имеющих сферическую форму со сложной структурой, ибо возможно наличие ядра и цитоплазмы. При этом наличием клеточной мембраны мы пренебрегаем, так как она очень тонкая и не оказывает значительного влияния на процесс рассеяния света.

Геометрия рассеяния представлена на рис. 2, где  $a$  — радиус ядра клетки,  $b$  — радиус цитоплазмы.

Запишем разложение падающей волны на поверхность  $j$ -частицы по векторным сферическим гармоникам. В ре-



**Рис. 2.** Рассеяние на сферической частице с неконцентрическим включением.

зультате получим

$$\mathbf{E}_i(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [p_{nm}^j \mathbf{N}_{nm}^1 + q_{nm}^j \mathbf{M}_{nm}^1], \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_i(j) = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [q_{nm}^j \mathbf{N}_{nm}^1 + p_{nm}^j \mathbf{M}_{nm}^1]. \quad (2)$$

Запишем выражение для рассеянного поля на  $j$ -частице. Рассеянное поле на больших расстояниях от частицы должно быть сферической расходящейся волной. Поэтому используем функции  $h_n^{(1)}$ , где

$$h_n^{(1)} \sim (-i)^n \exp[ikr]/[ikr], \quad kr \gg n^2.$$

Тогда имеем

$$\mathbf{E}_s(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [a_{nm}^j \mathbf{N}_{nm}^3 + b_{nm}^j \mathbf{M}_{nm}^3],$$

$$\mathbf{H}_s(j) = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [b_{nm}^j \mathbf{N}_{nm}^3 + a_{nm}^j \mathbf{M}_{nm}^3].$$

Поле в окрестности центра шара  $j$ -частицы имеет вид

$$\mathbf{E}_{I_1}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{nm} [d_{nm_1}^j \mathbf{N}_{nm}^1 + c_{nm_1}^j \mathbf{M}_{nm}^1], \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_{I_1}(j) = \frac{k_1^j}{\omega\mu_1^j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [c_{nm_1}^j \mathbf{N}_{nm}^1 + d_{nm_1}^j \mathbf{M}_{nm}^1]. \quad (4)$$

Поле в области  $b \leq r \leq a$   $j$ -частицы (в системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ ) запишется следующим образом:

$$\mathbf{E}_{I_2}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [d_{nm_{2_0}}^j \mathbf{N}_{nm}^3 + c_{nm_{2_0}}^j \mathbf{M}_{nm}^3 + f_{nm_{2_0}}^j \mathbf{M}_{nm}^4 + g_{nm_{2_0}}^j \mathbf{N}_{nm}^4], \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_{I_2}(j) = \frac{k_2^j}{\omega\mu_2^j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [d_{nm_{2_0}}^j \mathbf{M}_{nm}^3 + c_{nm_{2_0}}^j \mathbf{N}_{nm}^3 + f_{nm_{2_0}}^j \mathbf{N}_{nm}^4 + g_{nm_{2_0}}^j \mathbf{M}_{nm}^4]. \quad (6)$$

Поле сферического включения  $j$ -частицы (в системе координат  $O_2x_2y_2z_2$ ) будет иметь вид

$$\mathbf{E}_{I_2(inclusion)}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [d_{nm_2}^j \mathbf{N}_{nm}^3 + c_{nm_2}^j \mathbf{M}_{nm}^3 + f_{nm_2}^j \mathbf{M}_{nm}^4 + g_{nm_2}^j \mathbf{N}_{nm}^4], \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_{I_2(inclusion)}(j) = \frac{k_2^j}{\omega\mu_2^j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} [d_{nm_2}^j \mathbf{M}_{nm}^3 + c_{nm_2}^j \mathbf{N}_{nm}^3 + f_{nm_2}^j \mathbf{N}_{nm}^4 + g_{nm_2}^j \mathbf{M}_{nm}^4]. \quad (8)$$

где

$$E_{nm} = |E_0| i^n [2n+1] \frac{(n-m)!}{(n+m)!},$$

$$\mathbf{M}_{mn}^J = \left[ \frac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) i \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos\theta) \mathbf{e}_\phi \right] z_n^J(kr) e^{im\phi},$$

$$\mathbf{N}_{mn}^J = n(n+1) P_n^m(\cos\theta) \mathbf{e}_r \frac{z_n^J(kr)}{kr} e^{im\phi}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos\theta) \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} z_n^J(kr) e^{im\phi} \mathbf{e}_\theta$$

$$+ i \frac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} [r z_n^J(kr) e^{im\phi}] \mathbf{e}_\phi$$

и  $z_n^J$  — любая из четырех сферических функций

$$j_n(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} J_{n+\frac{1}{2}}(p), \quad y_n(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} Y_{n+\frac{1}{2}}(p), \quad (9)$$

$$h_n^{(1)} = j_n(p) + i y_n(p), \quad n_n^{(2)} = j_n(p) - i y_n(p). \quad (10)$$

Для определения коэффициентов рассеяния  $a_{nm}^j, b_{nm}^j$  на сферической частице при смещении ядра относительно центра необходимо использовать теоремы сложения, основанные на рекуррентном подходе для вычисления скалярных и векторных коэффициентов, которые возникают при трансляции сферических векторных гаармоник из системы координат в центре основной сферы, в систему координат, связанную с центром сферического включения [6,7],

$$\mathbf{M}_{nm,2}^{(q)} = \sum_{n'=0}^{\infty} A_{n',n}^{m,q} \mathbf{M}_{n',1}^{(q)} + B_{n',n}^{m,q} \mathbf{N}_{n',1}^{(q)}, \quad (11)$$

$$\mathbf{N}_{nm,2}^{(q)} = \sum_{n'=0}^{\infty} B_{n',n}^{m,q} \mathbf{M}_{n',1}^{(q)} + A_{n',n}^{m,q} \mathbf{N}_{n',1}^{(q)}, \quad (12)$$

где  $q$  обозначает порядок сферических функций Бесселя ( $q = 3, 4$ ). Это соотношение справедливо в области  $r > |d|$ , где  $d$  — расстояние между двумя центрами, при этом  $A_{n',n}^{m,q}, B_{n',n}^{m,q}$  определяется следующим образом [6–8]:

$$A_{n'}^{n,m,q} = C_{n'}^{(n,m,q)}$$

$$- \frac{k_1 d}{n'+1} \sqrt{\frac{(n'-m+1)(n'+m+1)}{(2n'+1)(2n'+3)}} C_{n'+1}^{(n,m,q)}$$

$$- \frac{k_1 d}{n'} \sqrt{\frac{(n'-m)(n'+m)}{(2n'+1)(2n'-1)}} C_{n'-1}^{(n,m,q)}, \quad (13)$$

$$B_{n'}^{n,m,q} = \frac{-ik_1 m d}{n'(n'+1)} C_{n'}^{(n,m,q)}, \quad C_{n'}^{(0,0,q)} = \sqrt{(2n'+1)} j_n'(k_1 d),$$

$$C_{n'}^{(-1,0,q)} = -\sqrt{(2n'+1)} j_n'(k_1 d), \quad (14)$$

$$C_{n'}^{(n+1,0,q)} = \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{2n+3}{2n'+1}} \left[ n' \sqrt{\frac{2n+1}{2n'-1}} C_{n'-1}^{(n,0,q)} + n \sqrt{\frac{2n'+1}{2n-1}} C_{n'}^{(n-1,0,q)} \right] - \frac{1}{n+1} \sqrt{\frac{2n+3}{2n'+1}} \times \left[ (n'+1) \sqrt{\frac{2n+1}{2n'+3}} C_{n'+1}^{(n,0,q)} \right], \quad (15)$$

$$C_{n'}^{(n,m,q)} = \frac{\sqrt{(n'-m+1)(n'+m)(2n'+1)}}{\sqrt{(n-m+1)(n+m)(2n'+1)}} C_{n'}^{(n,m-1,q)} - k_1 d \sqrt{\frac{(n'-m+2)(n'-m+1)}{(2n'+3)(n-m+1)(n+m)(2n'+1)}} C_{n'+1}^{(n,m-1,q)} - k_1 d \sqrt{\frac{(n'+m)(n'+m-1)}{(2n'-1)(n-m+1)(n+m)(2n'+1)}} C_{n'-1}^{(n,m-1,q)},$$

$$C_{n'}^{(n,m,q)} = C_{n'}^{(n,-m,q)}. \quad (16)$$

Из уравнений (12)–(16) следует, что

$$A_{n'}^{(n,m,3)} = A_{n'}^{(n,m,4)} = A_{n'}^{(n,-m,3)} = A_{n'}^{(n,m)},$$

$$B_{n'}^{(n,m,3)} = B_{n'}^{(n,m,4)} = B_{n'}^{(n,-m,3)} = B_{n'}^{(n,m)}, \quad (17)$$

$$C_{n'}^{(n,m,3)} = C_{n'}^{(n,m,4)} = C_{n'}^{(n,-m,3)} = C_{n'}^{(n,m)}. \quad (18)$$

Если  $d = 0$ , то в этом случае  $A_{n'}^{(n,m)} = \delta_{n'n}$ ,  $B_{n'}^{(n,m)} = 0$ .

Подставим выражения (11), (12) в (7), (8), тогда получим

$$\mathbf{E}_{I_2(\text{inclusion})}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} \left[ d_{nm_2}^j \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} A_{n'n}^{m,3} \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)} + B_{n'n}^{m,3} \mathbf{N}_{n'm,1}^{(3)} \right] \right] + E_{nm} \left[ c_{nm_2}^j \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} B_{n'n}^{m,3} \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)} + A_{n'n}^{m,3} \mathbf{N}_{n'm,1}^{(3)} \right] \right] + E_{nm} \left[ f_{nm_2}^j \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} A_{n'n}^{m,4} \mathbf{M}_{n'm,1}^{(4)} + B_{n'n}^{m,4} \mathbf{N}_{n'm,1}^{(4)} \right] \right] + E_{nm} \left[ g_{nm_2}^j \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} B_{n'n}^{m,4} \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)} + A_{n'n}^{m,4} \mathbf{N}_{n'm,1}^{(4)} \right] \right], \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_{I_2(\text{inclusion})}(j) = \frac{k_2^j}{\omega \mu_2^j} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_{nm} \left[ c_{nm_2}^j \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} A_{n'n}^{m,3} \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)} + B_{n'n}^{m,3} \mathbf{N}_{n'm,1}^{(3)} \right] \right] + E_{nm} \left[ d_{nm_2}^j \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} B_{n'n}^{m,3} \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)} + A_{n'n}^{m,3} \mathbf{N}_{n'm,1}^{(3)} \right] \right] + E_{nm} \left[ g_{nm_2}^j \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} A_{n'n}^{m,4} \mathbf{M}_{n'm,1}^{(4)} + B_{n'n}^{m,4} \mathbf{N}_{n'm,1}^{(4)} \right] \right] + E_{nm} \left[ f_{nm_2}^j \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} B_{n'n}^{m,4} \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)} + A_{n'n}^{m,4} \mathbf{N}_{n'm,1}^{(4)} \right] \right]. \quad (20)$$

Запишем выражения (19), (20) в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{I_2(\text{inclusion})}(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} E_{nm} [d_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + c_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,3}] \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} E_{nm} [c_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + d_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,3}] \mathbf{N}_{n'm,1}^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} E_{nm} [f_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + g_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,4}] \mathbf{M}_{n'm,1}^{(4)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} E_{nm} [g_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + f_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,4}] \mathbf{N}_{n'm,1}^{(4)}, \quad (21)$$

$$\mathbf{H}_{I_2(\text{inclusion})}(j) = \frac{k_2^j}{\omega \mu_2^j} \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} E_{nm} [d_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + c_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,3}] \mathbf{N}_{n'm,1}^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} E_{nm} [c_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + d_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,3}] \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} E_{nm} [f_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + g_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,4}] \mathbf{N}_{n'm,1}^{(4)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} E_{nm} [g_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + f_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,4}] \mathbf{M}_{n'm,1}^{(4)}. \quad (22)$$

Из сравнения выражений вида (21) и (5), а также (22) и (8) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm_2}^j \mathbf{M}_{nm}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} [d_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + c_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,3}] \mathbf{M}_{n'm}^{(3)}, \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_{nm_{2o}}^j \mathbf{N}_{nm}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} [c_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + d_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,3}] \mathbf{N}_{n'm,1}^{(3)}, \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm_{2o}}^j \mathbf{M}_{nm}^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} [f_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + g_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,4}] \mathbf{M}_{n'm,1}^{(4)}, \quad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_{nm_{2o}}^j \mathbf{N}_{nm}^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} [g_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + f_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,4}] \mathbf{N}_{n'm,1}^{(4)}, \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm_{2o}}^j \mathbf{N}_{nm}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} [d_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + c_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,3}] \mathbf{N}_{n'm,1}^{(3)}, \quad (27)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_{nm_{2o}}^j \mathbf{M}_{nm}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} [c_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + d_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,3}] \mathbf{M}_{n'm,1}^{(3)}, \quad (28)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm_{2o}}^j \mathbf{N}_{nm}^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} [f_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + g_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,4}] \mathbf{N}_{n'm,1}^{(4)}, \quad (29)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_{nm_{2o}}^j \mathbf{M}_{nm}^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{n'=0}^{\infty} [g_{nm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + f_{nm_2}^j B_{n'n}^{m,4}] \mathbf{M}_{n'm,1}^{(4)}. \quad (30)$$

Умножим скалярно выражение (23) слева и справа на  $\mathbf{M}_{ki}^3$  и проинтегрируем (при этом используя соотношения ортогональности для сферических гармоник), получим

$$c_{ki_{2o}}^j = \sum_{n=0}^{\infty} [d_{ni_2}^j A_{nk}^{i,3} + c_{ni_2}^j B_{nk}^{i,3}]. \quad (31)$$

Выражение (31) мы можем переписать в следующем виде:

$$c_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [d_{n'm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + c_{n'm_2}^j B_{n'n}^{m,3}]. \quad (32)$$

Аналогичные уравнения запишем для остальных выражений вида (24)–(26)

$$c_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [d_{n'm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + c_{n'm_2}^j B_{n'n}^{m,3}],$$

$$d_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [c_{n'm_2}^j A_{n'n}^{m,3} + d_{n'm_2}^j B_{n'n}^{m,3}], \quad (33)$$

$$f_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [f_{n'm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + g_{n'm_2}^j B_{n'n}^{m,4}],$$

$$g_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [g_{n'm_2}^j A_{n'n}^{m,4} + f_{n'm_2}^j B_{n'n}^{m,4}]. \quad (34)$$

С учетом (17), (18) уравнения (33), (34) запишутся в виде

$$d_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [d_{n'm_2}^j A_{n'n}^m + c_{n'm_2}^j B_{n'n}^m],$$

$$c_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [c_{n'm_2}^j A_{n'n}^m + d_{n'm_2}^j B_{n'n}^m], \quad (35)$$

$$f_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [f_{n'm_2}^j A_{n'n}^m + g_{n'm_2}^j B_{n'n}^m],$$

$$g_{nm_{2o}}^j = \sum_{n'=0}^{\infty} [g_{n'm_2}^j A_{n'n}^m + f_{n'm_2}^j B_{n'n}^m]. \quad (36)$$

Соотношения вида (35), (36) связывают коэффициенты для сферы, которая находится в центре системы координат, для сферы, смещенной на некоторое расстояние относительно центра.

Запишем граничные условия:

$$[\mathbf{E}_{I_1}(j) - \mathbf{E}_{I_2}(j)]|_{r_2=b} \times \mathbf{e}_r = 0,$$

$$[\mathbf{H}_{I_1}(j) - \mathbf{H}_{I_2}(j)]|_{r_2=b} \times \mathbf{e}_r = 0, \quad (37)$$

$$[\mathbf{E}_i(j) + \mathbf{E}_s(j) - \mathbf{E}_{I_1}(j)]|_{r_1=a} \times \mathbf{e}_r = 0,$$

$$[\mathbf{H}_i(j) + \mathbf{H}_s(j) - \mathbf{H}_{I_1}(j)]|_{r_1=a} \times \mathbf{e}_r = 0. \quad (38)$$

или

$$E_{I_{1\theta}}(j)|_{r_2=b} = E_{I_{2\theta}}(j)|_{r_2=b}, \quad E_{I_{1\phi}}(j)|_{r_2=b} = E_{I_{2\phi}}(j)|_{r_2=b}, \quad (39)$$

$$H_{I_{1\theta}}(j)|_{r_2=b} = H_{I_{2\theta}}(j)|_{r_2=b}, \quad H_{I_{1\phi}}(j)|_{r_2=b} = H_{I_{2\phi}}(j)|_{r_2=b}, \quad (40)$$

$$E_{i\theta}(j)|_{r_1=a} + E_{s\theta}(j)|_{r_1=a} = E_{I_{1\theta}}(j)|_{r_1=a},$$

$$E_{i\phi}(j)|_{r_1=a} + E_{s\phi}(j)|_{r_1=a} = E_{I_{1\phi}}(j)|_{r_1=a}, \quad (41)$$

$$H_{i\theta}(j)|_{r_1=a} + H_{s\theta}(j)|_{r_1=a} = H_{I_{1\theta}}(j)|_{r_1=a},$$

$$H_{i\phi}(j)|_{r_1=a} + H_{s\phi}(j)|_{r_1=a} = H_{I_{1\phi}}(j)|_{r_1=a}. \quad (42)$$

Подставим выражения для полей, которые разложены по вектор-сферическим гармоникам с учетом (35), (36) в граничные условия (39)–(42) и используя соотношения ортогональности для сферических гармоник, получим

систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов. При этом коэффициенты рассеяния, найденные из этой системы, будут иметь следующий вид:

$$a_{mn}^j = a_{n_{1p}}^j p_{mn}^j + a_{n_{1q}}^j q_{mn}^j, \quad b_{mn}^j = b_{n_{1p}}^j p_{mn}^j + b_{n_{1q}}^j q_{mn}^j,$$

где  $a_{n_{1p}}^j, a_{n_{1q}}^j, b_{n_{1p}}^j$  и  $b_{n_{1q}}^j$  даны в приложении, коэффициенты падающего поля  $p_{mn}^j, q_{mn}^j$  определены в [9].

Если мы рассматриваем случай тела вращения, то тогда вектор-сферические гармоники запишутся следующим образом [10]:

$$\mathbf{M}_{nm,2}^{(q)} = \sum_{n'=0}^{\infty} D_{m'}^{(nm)} \mathbf{M}_{nm,1}^{(q)}, \quad \mathbf{N}_{nm,2}^{(q)} = \sum_{n'=0}^{\infty} D_{m'}^{(nm)} \mathbf{N}_{nm,1}^{(q)},$$

$$D_{m'}^{(n,m)} = e^{i(m'\alpha + m\gamma)} \left[ \frac{(n+m')!(n-m')!}{(n+m)!(n-m)!} \right]^{1/2} \\ \times \sum_{\sigma} \binom{n+m}{n-m'-\sigma} \binom{n-m}{\sigma} (-1)^{n+m-\sigma} \\ \times \left[ \cos \left[ \frac{\beta}{2} \right] \right]^{2\sigma+m'+m} \left[ \sin \left[ \frac{\beta}{2} \right] \right]^{2n-2\sigma-m-m},$$

где  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — углы Эйлера.

## 2. Рассеяние на группе сферических тел

Электромагнитное поле, падающее на поверхность  $j$ -частицы, состоит из двух частей — исходного падающего поля и поля, рассеянного группой других частиц, расположенных в окружающей среде с показателем  $N$ . Тогда можно записать следующее выражение [9]:

$$\mathbf{E}_i(j) = \mathbf{E}_0(j) + \sum_{l \neq j} \mathbf{E}_s(l, j), \quad (43)$$

$$\mathbf{H}_i(j) = \mathbf{H}_0(j) + \sum_{l \neq j} \mathbf{H}_s(l, j), \quad (44)$$

где  $\mathbf{E}_s(l, j), \mathbf{H}_s(l, j)$  — сумма рассеянных полей на  $j$ -частице,  $\mathbf{E}_i(j), \mathbf{E}_0(j)$  и  $\mathbf{E}_s(l, j)$  определены в [9].

Система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов  $a_{mn}^j, b_{mn}^j$  с учетом многократного рассеяния для  $j$ -частиц с неконцентрическим включением находится аналогично методу, рассмотренному в [9,11], и имеет следующий вид:

$$a_{mn}^j = \\ = a_{n_{1p}}^j \left[ p_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j)] \right] \\ + a_{n_{1q}}^j \left[ q_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j)] \right], \quad (45)$$

$$b_{mn}^j = \\ = b_{n_{1q}}^j \left[ q_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j)] \right] \\ + b_{n_{1p}}^j \left[ p_{mn}^{j,j} - \sum_{l \neq j} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j)] \right], \\ n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n.$$

Систему (45) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} = T_1^j \left[ \begin{pmatrix} p^{j,j} \\ q^{j,j} \end{pmatrix} + \sum_{l \neq j} \begin{pmatrix} A(l, j) & B(l, j) \\ B(l, j) & A(l, j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} \right] \\ + (T_2^j)^j \left[ \begin{pmatrix} p^{j,j} \\ q^{j,j} \end{pmatrix} + \sum_{l \neq j} \begin{pmatrix} A(l, j) & B(l, j) \\ B(l, j) & A(l, j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} \right] \quad (46)$$

или

$$\begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} = (T)_{12}^j \left[ \begin{pmatrix} p^{j,j} \\ q^{j,j} \end{pmatrix} + \sum_{l \neq j} \begin{pmatrix} A(l, j) & B(l, j) \\ B(l, j) & A(l, j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^j \\ b^j \end{pmatrix} \right], \quad (47)$$

$$T_{12}^j = T_1^j + T_2^j, \quad T_1^j = \begin{pmatrix} a_{n_{1p}}^j & 0 \\ 0 & b_{n_{1q}}^j \end{pmatrix}, \quad T_2^j = \begin{pmatrix} 0 & a_{n_{1q}}^j \\ b_{n_{1p}}^j & 0 \end{pmatrix},$$

где  $B(l, j), A(l, j)$  — коэффициенты трансляции, которые определены в [6],  $p^{j,j}$  и  $q^{j,j}$  даны в [9].

Систему (47) необходимо решать методом редукции, оставляя в алгебраической системе конечное число уравнений и конечное число неизвестных [11], с использованием устойчивого алгоритма бисопряженных градиентов [12–14]. после того как из системы (47) найдены коэффициенты  $a_{mn}^j, b_{mn}^j$ , мы можем записать в основной системе координат выражения для рассеянного поля

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} [a_{mn} \mathbf{N}_{mn}^3 + b_{mn} \mathbf{M}_{mn}^3], \quad (48)$$

$$\mathbf{E}_s = \frac{k}{\omega \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i E_{mn} [b_{mn} \mathbf{N}_{mn}^3 + a_{mn} \mathbf{M}_{mn}^3], \quad (49)$$

где

$$a_{mn} = \sum_{l=1}^L \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0) + b_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0)],$$

$$b_{mn} = \sum_{l=1}^L \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v [a_{\mu\nu}^l B_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0) + b_{\mu\nu}^l A_{mn}^{\mu\nu}(l, j_0)].$$

Система для нахождения  $a_{mn}^j, b_{mn}^j$  может быть упрощена, если рассматривать ту часть рассеянного частицами поля (вперед и назад), которая сосредоточена в малой угловой окрестности оси  $Z$ .

Запишем выражения для рассеянного поля в дальней зоне

$$E_{s\theta} \sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times [a_{mn}\tau_{mn} + b_{mn}\pi_{mn}] e^{im\phi}, \quad (50)$$

$$E_{s\phi} \sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times [a_{mn}\pi_{mn} + b_{mn}\tau_{mn}] e^{im\phi}, \quad (51)$$

где

$$\tau_{mn} = \frac{\partial}{\partial\theta} P_n^m(\cos\theta), \quad \pi_{mn} = \frac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta).$$

Символ ( $\sim$ ) означает, что выражения (50) и (51), вытекающие из (48) при  $kr \gg 1$ , понимаются в асимптотическом смысле. В виду того, что рассматривается рассеяние на больших расстояниях от  $j$ -частицы, электрические векторы рассеянного поля будут параллельны электрическому вектору падающего поля, таким образом в дальней зоне будет отлична от нуля только  $\theta$ -компонента. Отметим, что здесь мы рассматриваем ту часть рассеянного поля, которая не вышла из резонатора.

Выражения (50) и (51) упростятся:

$$E_{s\theta} \sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [a_{mn}\tau_n + b_{mn}\pi_n],$$

$$E_{s\phi} \sim E_0 \frac{e^{ikr}}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [a_{mn}\pi_n + b_{mn}\tau_n], \quad (52)$$

где

$$\tau_n = \frac{\partial}{\partial\theta} P_n(\cos\theta), \quad \pi_n = \frac{1}{\sin\theta} P_n(\cos\theta).$$

Аналогично получаются выражения для магнитного поля  $H$ .

В дальнейшем нам понадобятся элементы матрицы рассеяния, связывающей параметры Стокса [3] падающего и рассеянного полей:

$$L_s = SL_i,$$

где  $L_i$  — вектор Стокса падающего поля,  $L_s$  — вектор Стокса рассеянного поля,  $S$  — матрица рассеяния  $4 \times 4$ , элементы которой выражаются через элементы матрицы  $2 \times 2$ , связывающей взаимно перпендикулярные компоненты электрического вектора прошедшей электромагнитной волны  $E_{\parallel s}$ ,  $E_{\perp s}$  и падающей волны  $E_{\parallel i}$ ,  $E_{\perp i}$ :

$$\begin{pmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{s\theta} \\ -E_{s\phi} \end{pmatrix} = \frac{e^{-ikr-ikz}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Для описания рассеяния поля вперед (назад) в малоугловой окрестности направления распространения полн

достаточно ограничиться диагональным представлением матрицы Мюллера  $S$ :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$S_{11} = \frac{1}{2} [|S_2|^2 + |S_1|^2] = S_{22},$$

$$S_{33} = \frac{1}{2} [S_1 S_2^* + S_2 S_1^*] = S_{44}.$$

Здесь звездочка (\*) обозначает комплексное сопряжение, а выражения для амплитуд рассеяния  $S_1$  и  $S_2$  для прошедшей волны ( $\theta = 0$ ) и для отраженной волны ( $\theta = \pi$ ) имеют вид [9]

$$S_2(0) = S_1(0) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) [a_{mn} + b_{mn}],$$

$$S_2(\pi) = -S_1(\pi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) (-1)^n [a_{mn} - b_{mn}]. \quad (54)$$

Выражения (54) будут использованы в дальнейшем для расчета частот собственных колебаний оптического резонатора, в полости которого расположена совокупность сферических частиц.

### 3. Собственные частоты оптического резонатора с кюветой сферических частиц

Так как собственные колебания в кольцевых и линейных резонаторах при внесении неоднородностей в полость резонатора перестраиваются по-разному, то рассмотрим для определенности более простой случай линейного резонатора. Схема резонатора изображена на рис. 1. При этом будем предполагать, что резонатор обладает плоскостью симметрии, в которой лежит его оптический контур. Это предположение необходимо для того, чтобы оправдать последующее разделение переменных в уравнениях поля и малость деполяризации поля после прохождения волной слоя сферических частиц. Замкнутую систему уравнений для поля  $E$  в некотором ортогональном оптическому контуру сечения двух зеркального резонатора можно записать в виде

$$E^{\pm} = (I + R_1 R_2) E^{\pm}, \quad (55)$$

где  $I$  и  $R_1, R_2$  — некоторые матричные операторы, описывающие собственные колебания резонатора без среды и со средой соответственно. В развернутом виде интегральное уравнение для одного из координатных сомножителей скалярной компоненты  $U$  поля собственных колебаний на одном из зеркал рассматриваемого

резонатора после разделения переменных в (55) имеет вид

$$U(\xi) = \sqrt{\frac{\mp i}{2\pi B}} \exp[\pm ikL] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\ln[R_1(x_1)R_2(x_1)] \times \exp[(\pm i(Ax_1^2 + D\xi^2 - 2\xi x_1)/(2B))]U(x_1)dx_1, \quad (56)$$

знак  $(-)$  соответствует полю на левом зеркале резонатора, знак  $(+)$  — на правом, а  $R_1$  и  $R_2$  — здесь скалярные функции, которые имеют вид

$$R_1 = S(0) \exp\left[-\frac{i}{z_{11}} + \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{z_{11}^2}\right],$$

$$R_2 = S(\pi) \exp\left[\frac{i}{z_{22}} - \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{z_{22}^2}\right], \quad (57)$$

$x_1 = \sqrt{k}x$ ,  $z_{11} = z_1k$ ,  $z_{22} = z_2k$ ,  $S(0)$ ,  $S(\pi)$  — амплитуды рассеяния (54) для прошедшей и отраженной волн соответственно,  $A, B, C, D$  — элементы волновой матрицы резонатора без частиц (возмущение резонатора слоем частиц учитывают коэффициенты  $R_1R_2$ ),  $z_{11}$ ,  $z_{22}$  — расстояния от слоя сферических частиц вдоль оптической оси резонатора, начиная с которых справедливы асимптотические формулы (52) для рассеянного частицами поля. Выражения (57) получаются путем разложения расстояния ( $r$ ) от начала координат до точки наблюдения в (53) в ряд Тейлора при условии, что

$$\frac{x^2}{z^2} \ll 1$$

(малолугловое приближение). Распределение поля на зеркалах оптического резонатора со средой, состоящей из совокупности частиц в области  $\Omega$  (рис. 1), получается из решения интегрального уравнения (56) и имеет вид

$$U_n(x_1)^\pm = \frac{1}{2^n n! \pi} H_n\left(\frac{x_1}{\varpi}\right) \exp\left[\mp i(n+1)/2 \tilde{g} + (\epsilon - \delta) + \ln(\rho_1) \pm ikL + \ln[S(0)S(\pi)] \pm \frac{ix_1^2}{q}\right].$$

Собственные частоты резонатора при этом выражаются формулой

$$\omega_n = c \frac{2\pi q + (n+1/2)\tilde{g} - i(\epsilon - \delta) + \ln(\rho_1) + \ln[S(0)S(\pi)]}{LN}, \quad (58)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме,  $q$  — номер продольной моды,  $n$  — номер поперечной моды,  $q \gg n$ ,  $L$  — длина резонатора,  $N$  — показатель преломления окружающей среды

$$\varpi = \sqrt{\frac{\sin \tilde{g}}{B}}, \quad \tilde{g} = \arccos\left[\frac{\tilde{A} + D}{2}\right], \quad \epsilon = \frac{i}{z_{22}}, \quad \delta = -\frac{i}{z_{11}},$$

$$\tilde{A} = \left[A + \frac{i}{2z_{zz}^2} - \frac{i}{2z_{11}^2}\right],$$

$$\frac{1}{q} = \left[\frac{\tilde{A} + D}{2} + i\sqrt{1 - \frac{(\tilde{A} + D)^2}{4}} - \tilde{A}\right](2B)^{-1},$$

$\rho_1 = \rho k$  — безразмерная толщина слоя частиц,  $H_n$  — полиномы Эрмита. Формула (58) достаточно сложным образом в неявной форме связывает частоты собственных колебаний оптического резонатора. Нагруженного слоем частиц, с электрофизическими параметрами этих частиц, такими как действительные и мнимые части их показателей преломления, размеры и т.д.

## Выводы

Модель была реализована в виде комплекса программ, что позволяет в автоматическом режиме варьировать на одной установке совокупности результатов измерения реальной и мнимой частей показателя преломления, размеров частиц. Этот подход позволяет обнаружить наличие корреляции между электрофизическими параметрами форменных элементов крови и их биологическими свойствами. При этом знания об оптических свойствах клеток крови должны стать основой и существенно дополнить информативность углубленного общего анализа крови за счет более тонкой характеристики клеток.

Таким образом, предлагаемая модель оценки показателя преломления и размеров форменных компонентов крови в сочетании с внутррезонаторным экспериментом может оказаться более информативной и точной, чем существующие методы, использующие безрезонаторные модели.

## Приложение

Выражение для коэффициентов  $a_{n_{1p}}^j$ ,  $a_{n_{1q}}^j$ ,  $b_{n_{1p}}^j$ ,  $b_{n_{1q}}^j$ ,

$$b_{n_{1p}}^j = \frac{b_{n_{11p}}^j}{b_{n_{21}}^j}, \quad b_{n_{1q}}^j = \frac{b_{n_{11q}}^j}{b_{n_{21}}^j},$$

где

$$b_{n_{11p}}^j = (A_{n'n}^m)^{(2)} \psi_n((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \times F_{21} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} (\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) F_{21} - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j)$$



$$\begin{aligned}
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{21} \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \\
 & + [(A_{n'n}^m)^2 - (B_{n'n}^m)^2] \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \\
 & + [(A_{n'n}^m)^2 - (B_{n'n}^m)^2] \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j)) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \\
 & \times (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j)) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j)) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \\
 & \times (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j)) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j)) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \\
 & \times (\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j)) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j)) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & \times (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{n11q}^j = & - (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{21} \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{12} \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j)) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{21} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j)) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{12} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j)) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{12} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((ka)^j)) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{12} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((ka)^j)) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{21} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((ka)^j)) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{21} \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j)) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)(B_{n'n}^m) F_{12} \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j)) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j), \\
 b_{n21}^j = & - \xi_n^{(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & - \xi_n^{(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) F_{12} \\
 & - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{12} \\
 & + \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & + \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{12} \\
 & + \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j))^2 F_{12} F_{21} \\
 & + \xi_n^{(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & + \xi_n^{(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) F_{12} \\
 & - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{12} \\
 & - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j))^2 F_{21} F_{12} \\
 & + \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & + \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{12} \\
 & - \xi_n^{(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21} F_{12} \\
 & - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21} F_{12} \\
 & + \xi_n^{(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21} F_{12} \\
 & + \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21} F_{12} \\
 & + [(A_{n'n}^m)^2 - (B_{n'n}^m)^2] (\xi_n^{\prime(1)}((ka)^j))^2 (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j))^2 \\
 & + [(A_{n'n}^m)^2 - (B_{n'n}^m)^2] (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 (\xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j))^2 \\
 & + (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & + (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) F_{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 (A_{n'n}^m)^2 (\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j))^2 F_{12} F_{21} \\
 & - \xi_n^{(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + \xi_n^{(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(2)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & - (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) F_{12} \\
 & - (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 (A_{n'n}^m)^2 (\xi_n^{\prime(1)}((ka)^j))^2 F_{12} F_{21} \\
 & + \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j),
 \end{aligned}$$

$$a_{n_{1p}}^j = \frac{a_{n_{11p}}^j}{a_{n_{21}}^j}, \quad a_{n_{1q}}^j = \frac{a_{n_{11q}}^j}{a_{n_{21}}^j},$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{n_{11q}}^j = & \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(2)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + [(A_{n'n}^m)^2 - (B_{n'n}^m)^2] \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j))^2 (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 \\
 & - [(B_{n'n}^m)^2 - (A_{n'n}^m)^2] \psi_n'((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j))^2 \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} F_{21} ((\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{21} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} F_{21} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{21} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (B_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} F_{21} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{21} (\xi_n^{(1)}((ka)^j)) (\xi_n^{\prime(2)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) F_{12} \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) F_{21} \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) F_{12} \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) F_{21} F_{12} \\
 & + (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j)) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j))) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 \psi_n((ka)^j) F_{12} F_{21} (\xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) (\xi_n^{(1)}((k_1a)^j))), \\
 a_{n_{11p}}^j = & \\
 & - (A_{n'n}^m) (B_{n'n}^m) F_{21} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(2)}((k_1a)^j))^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \\
 & + (B_{n'n}^m)^2 F_{12} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((ka)^j)) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m)^2 F_{21} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j)) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & - (A_{n'n}^m) (B_{n'n}^m) F_{12} \psi_n((ka)^j) (\xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j)) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m) (B_{n'n}^m) F_{21} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((ka)^j)) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \\
 & + (A_{n'n}^m) (B_{n'n}^m) F_{12} \psi_n'((ka)^j) (\xi_n^{(1)}((ka)^j)) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j), \\
 a_{n_{21}}^j = & (-\xi_n^{(1)}((ka)^j))^2 (A_{n'n}^m)^2 (\xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j))^2 \\
 & + F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + F_{21} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) + ((A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) [(\xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + \xi_n^{(1)}(k_1a)^j) F_{21}] + \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{(1)}((ka)^j) \\
 & + F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j) \\
 & + F_{21} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) - (A_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(2)}((ka)^j) \\
 & + F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) [\xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) F_{21}] - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \\
 & + F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + F_{21} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) + (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j)^2 \\
 & + F_{12} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(2)}((ka)^j)^2 \\
 & + F_{21} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j) + (B_{n'n}^m)^2 \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) \\
 & + F_{12} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j)^2 \xi_n^{(2)}((k_1a)^j) \\
 & + F_{21} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) - \xi_n^{\prime(1)}((ka)^j) (B_{n'n}^m)^2 \\
 & - F_{12} \xi_n^{(1)}((k_1a)^j) \xi_n^{(1)}((ka)^j) \xi_n^{\prime(2)}((k_1a)^j)^2 \\
 & + F_{21} \xi_n^{\prime(1)}((k_1a)^j),
 \end{aligned}$$

где

$$F_{12} = \frac{m_1^j \xi_n^{(2)} ((k_1 b)^j) \psi_n((k_2 b)^j) - m_2^j \xi_n^{(2)} ((k_1 b)^j) \psi_n'((k_2 b)^j)}{m_2^j \xi_n^{(1)} ((k_1 b)^j) \psi_n'((k_2 b)^j) - m_1^j \xi_n^{(1)} ((k_1 b)^j) \psi_n((k_2 b)^j)},$$

$$F_{21} = \frac{m_2^j \xi_n^{(2)} ((k_1 b)^j) \psi_n((k_2 b)^j) - m_1^j \xi_n^{(2)} ((k_1 b)^j) \psi_n'((k_2 b)^j)}{m_1^j \xi_n^{(1)} ((k_1 b)^j) \psi_n'((k_2 b)^j) - m_2^j \xi_n^{(1)} ((k_1 b)^j) \psi_n((k_2 b)^j)},$$

$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho)$ ,  $\xi_n^{(1)}(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho)$ ,  $\xi_n^{(2)}(\rho) = \rho h_n^{(2)}(\rho)$  — функции Риккати–Бесселя, „штрих“ означает операцию дифференцирования,  $k = kn_o$ ,  $k_1 = m_1^j$ ,  $k_2 = km_2^j$ ,  $m_1^j, m_2^j$  — комплексный показатель преломления цитоплазмы и ядра соответственно,  $n_o$  — показатель преломления окружающей среды,  $a^j$  — радиус ядра клетки,  $b^j$  — радиус цитоплазмы  $j$ -частицы,  $k$  — волновое число.

## Список литературы

- [1] Смирнов А.Н. Болезни крови. Серия справочник практического врача. М., 2008.
- [2] Marlies M. Basics Hämatologie. Elsevier GmbH, München, 2011.
- [3] Борен К., Хафман Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / Пер. с англ. З.И. Фейзулина, А.Г. Виноградова, Л.А. Персяна. М., 1986.
- [4] Soot P.M.A., Figdor C.G. // Appl. Optics. 1986. Vol. 25. N 19. P. 3559–3565.
- [5] Aden A., Kerker V // J. Appl. Phys. 1951. Vol. 22. P. 1242.
- [6] Cruzan O.R. // Quart. Appl. Math. 1962. Vol. 20. P. 33–40.
- [7] Stein S. // Quart. Appl. Math. 1961. Vol. 19. P. 15–24.
- [8] Robbert P.A. // Physica. A. 1986. Vol. 137. N 1. P. 209–341.
- [9] Куликов К.Г., Радин А.М. // Опт. и спектр. 2002. Т. 92. № 2. С. 228–236.
- [10] Videen G., Ngo D., Chylek P., Pinnick R.G. // J. Opt. Soc. Am. 1995. Vol. 12. N 5. P. 922–928.
- [11] Куликов К.Г. // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 12. С. 24–28.
- [12] Баландин М.Ю., Шурина Э.П. // Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск, 2000.
- [13] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003.
- [14] Vorst van der H. Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge, 2003.