01

Нестационарная самосогласованная модель ансамбля в собственном поле

© А.С. Чихачев

Всероссийский электротехнический институт
111250 Москва, Россия
e-mail: churchevsky@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 4 июля 2013 г.)

Изучено поведение нестационарной системы заряженных частиц, взаимодействующих с собственным полем. Используются интегралы движения для нестационарных систем. Получены численные решения систем уравнений, описывающих характеристики систем частиц. Рассмотрена также нестационарная квантовая самосогласованная система. Рассмотренная модель может быть полезной для изучения процесса ускорения заряженных частиц собственным полем.

Введение

При исследовании самосогласованных систем заряженных частиц в теории ускорителей, в физической электронике, в теории пучков и в физике плазмы интегралы движения в ряде случаев играют определяющую роль. Можно указать теорию электронных колец, теорию жестко фокусирующих систем, кинетическую теорию квазистационарных состояний пучков [1–3]. Значительная часть известных интегралов движения, не следующих из свойств симметрии системы, представлена в работе [4], посвященной точно решаемым нестационарным потенциалам в квантовой механике. Особенно плодотворным оказывается использование интегралов движения для описания систем частиц, взаимодействующих с собственными полями. В настоящей работе изучаются нестационарные ансамбли с помощью инварианта, описанного в ряде работ [5–7]. Для описания самосогласованных систем кроме этого инварианта оказывается необходимым использование сопряженных интегралов движения. Показана возможность сведения нестационарной квантовой системы, описываемой тем же инвариантом, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и получены частные численные решения этой системы.

1. Рассмотрим простейший одномерный стационарный случай, когда система может быть описана гамильтонианом H

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x). \tag{1}$$

Здесь $p = m\dot{x}$ — импульс, m — масса, $U(x)$ — потенциал. Уравнение Гамильтона–Якоби для этой системы имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + U(x) = 0. \tag{2}$$

Здесь S — функция Гамильтона (действие). Будем искать решение (2) в следующем виде:

$$S = \pm \int_0^x dx' \sqrt{2m(H - U(x'))} + \psi(t).$$

Тогда

$$\dot{\psi} = -H \qquad \text{и} \qquad S = \pm \int_0^x dx' \sqrt{H - U(x')} - Ht.$$

Определим интеграл, сопряженный с H:

$$J_H^{\pm} = \frac{\partial S}{\partial H} = \pm \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(H - U(x'))}} - t. \tag{3}$$

Таким образом, кроме энергии H имеется и сопряженный нестационарный интеграл движения, явно зависящий от времени t. Знаки $+$, $-$ соответствуют направлению движения вдоль оси x. Интегралы (3) непригодны для описания самосогласованных нестационарных систем, так как выведены для изначально стационарной задачи.

2. Рассмотрим случай нестационарного гамильтониана, заданного особым образом [5–7].

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{\xi^2(t)} U\left(\frac{x}{\xi(t)}\right). \tag{4}$$

Для системы, описываемой гамильтонианом (4), существует инвариант:

$$I = \frac{m}{2}(\dot{x}\xi - x\dot{\xi})^2 + \frac{m}{2}\lambda \frac{x^2}{\xi^2} + U\left(\frac{x}{\xi}\right), \tag{5}$$

где безразмерная функция $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\xi}(t) = \frac{\lambda}{\xi^3(t)},$$

λ — константа. Обозначим $x_* = \frac{x}{\xi(t)}$ и введем новое время $\tau = \int\limits_0^t \frac{dt'}{\xi^2(t')}$. Тогда

$$I = \frac{m}{2}\left(\frac{dx_*}{d\tau}\right)^2 + \frac{m\lambda}{2}x_*^2 + U(x_*).$$

Построим интеграл, сопряженный с I. Аналогично стационарному случаю получим

$$J_I^{\pm} = \frac{\partial S}{\partial I} = \pm\int\limits_{x_0}^{x_*} \frac{dx'_*}{\sqrt{\frac{2}{m}(I - U(x'_*)) - \lambda x'^2_*}} - \tau. \qquad (6)$$

Этот интеграл может быть использован для исследования самосогласованных нестационарных систем, описываемых гамильтонианом (4). Рассмотрим одномерную нестационарную систему частиц с зарядом $-e$, взаимодействующих с собственным полем, описываемым потенциалом $\Phi(x,t)$, удовлетворяющим уравнению Пуассона. Введем потенциальную функцию $U(x_*)\frac{1}{\xi^2(t)} = -e\Phi$. Потенциал зависит определенным образом от координаты и от времени. Уравнение Пуассона $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi e n(x,t)$, где $n(x,t) = \int d(m\dot{x}) f(I, J_I^+)$. В этом разделе далее будем считать, что имеются только частицы, движущиеся в положительном направлении оси x. Поскольку

$$d\dot{x} = \frac{1}{m\xi}\frac{dI}{\sqrt{\frac{2}{m}(I-U) - \lambda x_*^2}},$$

уравнение Пуассона может быть представлено в виде

$$\frac{d^2U}{dx_*^2} = -4\pi e^2\xi^3 \int \frac{dI f(I, J_I^+)}{\sqrt{\frac{2}{m}(I-U) - \lambda x_*^2}}. \qquad (7)$$

Полная согласованность задачи достигается в случае, когда интеграл в правой части пропорционален $[\xi(t)]^{-3}$. Возьмем функцию распределения в виде

$$f = \kappa\delta(I - I_0)\exp\left\{\frac{3}{2\tau}J_I^+\right\}, \qquad (8)$$

где τ_0 — константа размерности времени. Зависимость интеграла от времени определяется множителем $\exp\{-\frac{3\tau}{2\tau_0}\}$. Если положить $\xi^3\exp\{-\frac{3\tau}{2\tau_0}\} \equiv \mathrm{const} = \xi_0^3$, то можно получить $\xi = \sqrt{\frac{t}{\tau_0} + \xi_0^2}$. При этом приведенному выражению для $\xi(t)$ соответствует значение $\lambda = -\frac{1}{4\tau_0^2}$. Таким образом, плотность, определяемая функцией распределения (8), имеет вид

$$n = \frac{\kappa}{\xi^4\sqrt{\frac{2}{m}(I_0 - U) + \frac{x_*^2}{4\tau_0^2}}} \times \exp\left\{\frac{3}{2\tau_0}\int\limits_0^{x_*}\frac{dx'_*}{\sqrt{\frac{2}{m}(I_0 - U(x'_*)) + \frac{x'^2_*}{4\tau_0^2}}}\right\}. \qquad (9)$$

При этом плотность тока частиц имеет вид

$$j = \frac{\dot{\xi}x}{\xi}n + \frac{\kappa}{\xi^5}\exp\left\{\frac{3}{2\tau_0}\int\limits_0^{x_*}\frac{dx'_*}{\sqrt{\frac{2}{m}(I_0 - U(x'_*)) + \frac{x'^2_*}{4\tau_0^2}}}\right\}.$$

Введем обозначения $v_0^2 = \frac{2I_0}{m}$, $s = \frac{x_*}{2v_0\tau_0}$, $y = \frac{2U}{mv_0^2}$, $z(s) = \int\limits_0^s \frac{ds'}{\sqrt{1 - y(s') + s'^2}}$. Уравнение Пуассона принимает вид

$$y'' = -\frac{\theta_*}{\sqrt{1 - y(s) + ^2}}\exp\{3z(s)\} = -\frac{\theta_*}{3}\frac{d}{ds}\exp\{3z(s)\}. \qquad (10)$$

Здесь $\theta_* = \frac{32\pi e^2\kappa\tau_0^2\xi_0^3}{mv_0}$. Если обозначить $\frac{\kappa}{v_0} = n_*$, то $\theta_* = \omega_*^2\tau_0^2$, где $\omega_*^2 = \frac{32\pi n_* e^2}{m}\xi_0^3$. Из (10) следует $y' = -\frac{\theta_*}{3}\exp\{3z(s)\} + C_0$, и уравнение может быть приведено к виду

$$y'' = (y' - C_0)\frac{3}{\sqrt{1 - y(s) + s^2}}. \qquad (11)$$

При этом величина θ_* определяет граничное условие $y'_0 = -\frac{\theta_*}{3} + C_0$. Приведенные выше выражения для плотности и плотности тока частиц могут быть преобразованы к виду

$$n = \frac{n_1(C_0 - y')}{\xi^4\sqrt{1 - y + s^2}} = a(s)\,\frac{n_1}{\xi^4},$$

$$j = \frac{n_1 v_0}{\xi^5}(C_0 - y')\left(\frac{s}{\sqrt{1 - y + s^2}} + 1\right) = b(s)\,\frac{n_1 v_0}{\xi^5}, \qquad (12)$$

где $n_1 = \frac{3m}{32\pi e^2\tau_0^2\xi_0^3}$. Выражения (12) удовлетворяют уравнению непрерывности $\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$. Уравнение (11) имеет частное решение в виде квадратного трехчлена $y = \frac{a}{2}s^2 + bs + c$. Можно получить

$$b = C_0\left(1 - \frac{a}{2}\right), \quad c = 1 - \frac{C_0^2}{4}\left(1 - \frac{a}{2}\right).$$

Используя граничное условие, получим $C_0 = -\frac{\theta_*}{3}$. Из уравнения следует, что $a = -3$. Частицы занимают область $\infty > s > \frac{C_0}{2} = -\frac{\theta_*}{6}$, при этом их плотность постоянна по s и убывает по времени, а скорость растет с ростом s от нуля в начальной точке и также убывает во времени. Заметим, что $y(0) = y_0 = \frac{5C_0^2}{8} = \frac{5}{8}\frac{\theta_*^2}{9} < 1$.

На рисунках приведены результаты решения уравнения (11) при начальных условиях $y(0) = 0$ и $y'(0) = 0$. При численном решении взято значение $C_0 = 1$. Потенциал $y(s)$ изображен на рис. 1, плотность частиц $a(s)$ на рис. 2 и плотность тока $b(s)$ на рис. 3. Отметим здесь отличие частного аналитического решения от приведенного численного. В приведенном численном решении плотность не равна нулю на всей оси s и плавно растет, достигая постоянного значения при достаточно

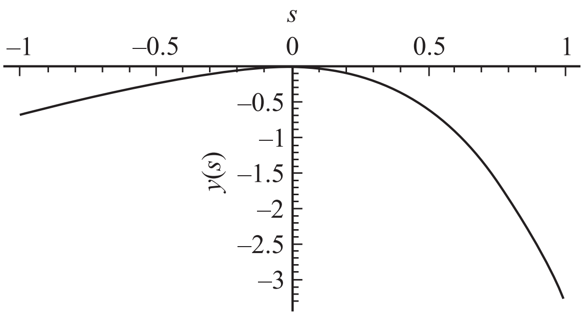

Рис. 1. Зависимость потенциала от координаты при движении частиц в одном направлении.

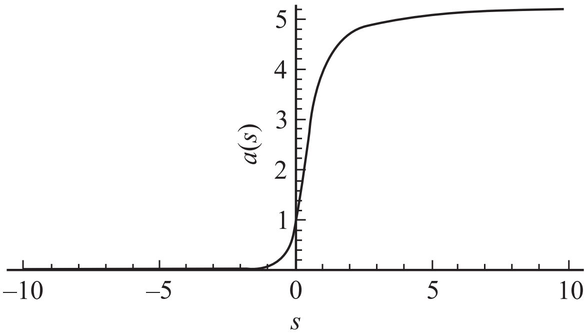

Рис. 2. Зависимость плотности частиц от координаты при движении частиц в одном направлении.

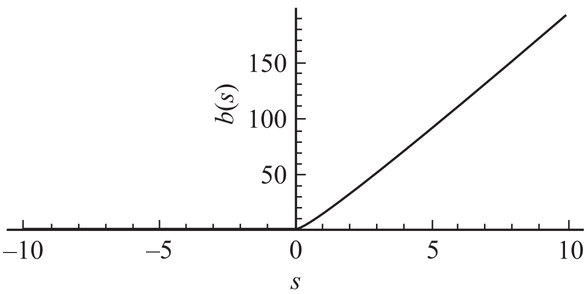

Рис. 3. Зависимость плотности тока частиц от координаты при движении частиц в одном направлении

больших s. При этом ток растет по закону, близкому к линейному. Полное количество частиц на конечном промежутке неограниченно возрастает при увеличении длины промежутка. Если в момент времени $t = 0$ зависимости плотности, плотности тока и потенциала соответствуют изображенным на рис. 1–3, то вид этих зависимостей не меняется со временем, но соответствующие величины убывают $\infty 1/\xi^4(t)$. Полное число частиц на отрезке от $-\infty$ до некоторого значения $x = X$ убывает из-за ухода частиц $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\infty}^{X} n(x,t)dx = -j(X,t)$.

3. Случай симметричного движения

В отличие от разд. 2 будем считать, что есть частицы, движущиеся не только в положительном направлении оси x, но и в отрицательном направлении этой оси. Поскольку плотность определяется полусуммой $\frac{1}{2}\left[\exp\{\frac{J_l^+}{2\tau_0}\} + \exp\{\frac{J_l^-}{2\tau_0}\}\right]$, в уравнение Пуассона входит плотность $n = \frac{n_* z'}{\xi^4}\,\mathrm{ch}(3z)$. Плотность тока равна $j = \frac{n_* v_0}{\xi^5}(sz'\mathrm{ch}(3z) + \mathrm{sh}(3z))$. Получим систему уравнений

$$y'(s) = -\frac{\theta_*}{3}\,\mathrm{sh}\{3z(s)\} + C_0,$$

$$z'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - y(s) + s^2}},$$

которая может быть приведена к одному уравнению

$$y'' = -\frac{\theta_*}{\sqrt{1 - y(s) + s^2}}\sqrt{1 + \frac{9}{\theta_*^2}(C_0 - y'(s))^2}. \quad (13)$$

Здесь C_0 — произвольная константа.

На рис. 4 и 5 приведены результаты вычислений потенциала и плотности частиц при $\theta_* = 3$, $C_0 = y'_0 = 0$, $y(0) = 0.999$, Характерно, что плотность имеет резкий максимум вблизи $s = 0$ в случае, когда $y_0 \to 1$. Если $y(0) = y_0 = 0$, то плотность имеет вид ямы вблизи $s = 0$. Существует критическое значение $y_* = 1 - \theta_*^2/256$. Если $y_0 < y_*$, то плотность имеет вид ямы. При $1 > y_0 > y_*$ имеется максимум плотности при $s = 0$.

4. Рассмотрим, далее, сферически симметричную задачу. Уравнение Гамильтона–Якоби в этом случае имеет

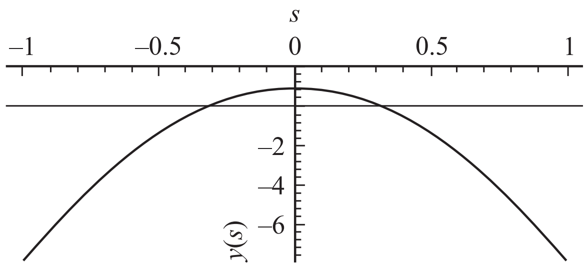

Рис. 4. Зависимость потенциала от координаты при симметричном распределении.

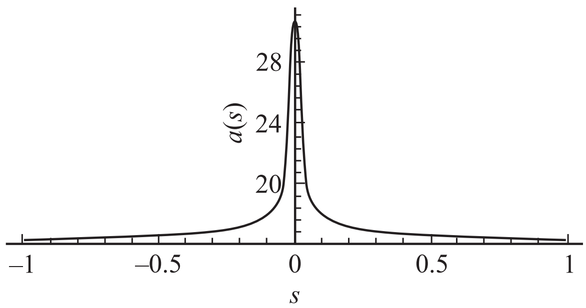

Рис. 5. Зависимость плотности частиц от координаты при симметричном распределении.

вид [8]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + U(r,t) = 0. \quad (14)$$

Здесь r, θ, φ — координаты в сферической системе, S — функция Гамильтона. Решение будем искать в виде

$$S = \pm\int\limits_0^r dr'\sqrt{2m\left(H - U(r',t) - \frac{L}{2r'^2}\right)} + \psi(t) + M_\varphi\varphi \pm \int\limits_{\arcsin|\frac{M_\varphi}{\sqrt{L}}|}^{\theta} \sqrt{L - \frac{M_\varphi^2}{\sin^2\theta'}}d\theta',$$

где M_φ — проекция момента на ось z, $L = \frac{M_\varphi^2}{\sin^2\theta} + m^2(r^2\theta)^2$ — квадрат полного момента. Сопряженный с энергией H интеграл $J_H^{\pm}$ имеет вид

$$J_H^{\pm} = \frac{\partial S}{\partial H} = \pm\int\limits_0^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(H - U(r')) - \frac{L}{2m^2r'^2}}} - t.$$

Величины $J_M = \frac{\partial S}{\partial M_\varphi}$ и $J_L = \frac{\partial S}{\partial L}$ также определяют сохраняющиеся величины, не представляющие интерес для данной задачи.

Так же, как и в разд. 3, перейдем от H к инварианту I, сохраняющемуся при определенной зависимости потенциальной функции от r и t. В этом случае гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L}{2mr^2} + \frac{1}{\xi^2(t)}U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right).$$

Здесь $p_r = m\dot{r}$. Используя выражение гамильтониана, можно получить выражение для инварианта

$$I = \frac{m}{2}(\dot{r}\xi - r\dot{\xi})^2 + U\left(\frac{r}{\xi(t)}\right) + \frac{\lambda m}{2}\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{L}{2m}\frac{\xi^2}{r^2}, \quad (15)$$

Где $\ddot{\xi} = \frac{\lambda}{\xi^3}$, λ — константа. Аналогично интегралу $J_H^{\pm}$ можно построить интеграл $J_I^{\pm}$, сопряженный с H. В дальнейшем в настоящем разделе будем считать, что имеются только частицы, описываемые интегралом J_I^{+} (опуская верхний индекс $+$). Плотность частиц выражается интегралом в фазовом пространстве

$$n = \int d\mathbf{q} f(I, J_I, L). \quad (16)$$

Элемент фазового пространства представим в виде

$$d\mathbf{q} = dq_r dq_\theta dq_\varphi, \qquad dq_\varphi = \frac{dM_\varphi}{r\sin\theta},$$

$$dq_r = md\dot{r} = \frac{dI}{\xi\sqrt{\frac{2}{m}(I - U) - \lambda\frac{r^2}{\xi^2} - \frac{L\xi^2}{m^2r^2}}},$$

$$dq_\theta = \frac{dL}{2r\sqrt{L - \frac{M_\varphi^2}{sin^2\theta}}}.$$

Усреднение по M_φ приводит к выражению:

$$n = \frac{\pi}{2r^2}\int\frac{dIdLf(I, L, J_I)}{\xi\sqrt{\frac{2}{m}\left(I - U\left(\frac{r}{\xi}\right)\right) - \frac{\lambda r^2}{\xi^2} - \frac{L\xi^2}{m^2r^2}}}.$$

При этом плотность тока j_r имеет вид (может быть выражено через I из (15))

$$j_r = \frac{\pi}{2r^2\xi}\frac{\dot{\xi}r}{\xi}\int\frac{fdIdL}{\sqrt{\frac{2}{m}(I - U) - \lambda\frac{r^2}{\xi^2} - \frac{L}{m^2}\frac{\xi^2}{r^2}}} + \frac{\pi}{2r^2\xi^2}\int fdIdL.$$

Сделаем, далее, замену переменных $r = \rho\xi$, $\tau = \int\limits_0^t \frac{dt'}{\xi^2(t')}$. При этом уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{1}{\xi^4(t)}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\rho^2\frac{dU}{d\rho} = -\frac{4\pi e^2}{\xi^3(t)\rho^2}\int\frac{dIdLf(I, L, J_I)}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(I - U(\rho)\right) - \lambda\rho^2 - \frac{L}{m62\rho^2}}}. \quad (17)$$

Аналогично разд. 3 функция распределения должна содержать множитель, экспоненциально зависящий от J_I. Положим

$$f = \kappa_*\delta(I - I_0)\delta(L - L_0)\exp\left\{\frac{1}{2\tau_0}J_I\right\}.$$

Заметим, что в переменных ρ, τ сопряженный с I инвариант J_I имеет вид

$$J_I = -\tau + \int\limits_0^\rho\frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(I - U(\rho')\right) - \lambda\rho'^2 - \frac{L}{m^2\rho'^2}}}.$$

Если выполнено условие $\xi\exp(-\frac{\tau}{2\tau_0}) \equiv \xi_0$, то в уравнение Пуассона в качестве независимой переменной входит только ρ. Таким образом, $\xi(t) = \sqrt{\frac{t}{\tau_0 + \xi_0^2}}$, $\lambda = -\frac{1}{4\tau_0^2}$. Обозначим далее $v_0^2 = 2I_0/m$, $s = \rho/2\tau_0 v_0$, $y = 2U/mv_0^2$, $l = L/4m^2\tau_0^2 v_0^4$,

$$u(s) = \int\limits_0^s\frac{ds'}{\sqrt{1 - y(s') + s'^2 - l/s'^2}}.$$

Тогда из уравнения Пуассона следует

$$\frac{d}{ds}s^2\frac{d}{ds}y(s) = -\theta u' e^{u(s)},$$

$$u'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - y(s) + s^2 - l/s^2}}. \quad (18)$$

Константа θ определяется параметрами задачи — κ_*, m, v_0, τ_0 и зарядом e

$$\theta = \frac{8\pi e^2 \kappa_*}{m v_0^3}\,\xi_0.$$

Если использовать равенство $y' = -\frac{\theta}{s^2}\exp(u(s)) + \frac{C_0}{s^2}$, система (18) может быть записана в виде одного уравнения

$$\frac{d}{ds} s^2 \frac{dy(s)}{ds} = -\frac{C_0 - s^2 y'(s)}{\sqrt{1 - y(s) + s^2 - 1/s}}. \qquad (19)$$

Плотность частиц может быть записана в виде

$$n = n_1 \frac{C_0 - y'}{\sqrt{1 - y(s) + s^2 - 1/s^2 \xi^4}} = a(s) n_1/\xi^4,$$

а плотность тока

$$j_r = n_1 v_0 \left(\frac{s}{\sqrt{1 - y(s) + s^2 - 1/s^2}} + 1 \right) \frac{(C_0 - y')}{\xi^5}$$

$$= b(s)\,\frac{n_1 v_0}{\xi^5},$$

где

$$n_1 = \frac{m}{32\pi e^2 \tau_0^2 \xi_0}.$$

Далее (рис. 6, 7) приведены решения для потенциала $y(s)$ и плотности частиц $a(s)$ при $y(0) = y'(0) = 0$. Из-за того, что $L \neq 0$, плотность вблизи начала координат равна нулю. При больших значениях координаты плотность убывает, однако полное число частиц в области, ограниченной некоторым значением координаты, неограниченно растет с ростом этого значения так же, как и в одномерном случае. Возможно, что изученные здесь состояния будут представлять интерес для ускорения частиц собственными полями. Дополнительным фактором, усиливающим эффект ускорения, может быть нестационарность. Отрицательное значение константы λ означает, что расширение координат является дополнительным фактором, усиливающим расталкивание частиц. Из этого, в свою очередь, следует, что эффективное значение ускоряющего поля может существенно увеличиться.

5. Использование вышеприведенного гамильтониана позволяет также дать точное решение самосогласованной нестационарной квантово-механической задачи.

В одномерном случае уравнение Шредингера может быть представлено в виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\xi^2(t)} V\left(\frac{x}{\xi(t)}\right)\Psi, \qquad (20)$$

где потенциальная функция V выражается через потенциал электрического поля

$$q\Phi = -\frac{1}{\xi^2(t)} V\left(\frac{x}{\xi(t)}\right).$$

Здесь q — заряд „слоя“ с размерностью e/l, в этом случае Ψ — функция может считаться безразмерной. Как и в классической задаче, введем новые переменные

$$x_* = \frac{x}{\xi(t)}, \qquad \tau = \int \frac{dt'}{\xi^2(t')}, \qquad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi^2}.$$

Сделаем, далее, замену

$$\Psi = \frac{1}{\xi^2}\Psi_1(x_*, \tau)\exp\left\{\frac{im}{\hbar}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\frac{x_*^2}{2}\right\}.$$

Тогда получим уравнение

$$i\hbar\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_*^2} + \left(V(x_*) + \frac{\lambda m x_*^2}{2} + \frac{3i\hbar}{2}\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)\Psi_1. \qquad (21)$$

Будем, далее, считать, как в классической задаче

$$\lambda = -\frac{1}{4\tau_0^2}, \qquad \xi = \sqrt{\frac{t}{\tau_0} + \xi_0^2} = \xi_0 \exp\left(\frac{\tau}{2\tau_0}\right).$$

Тогда $\frac{\dot{\xi}}{\xi} \equiv \mathrm{const} = \frac{1}{2\tau_0}$. При этом становится возможным разделение переменных в уравнении (21). Положим $\Psi_1 = T(\tau)X(x_*)$. Можно получить

$$i\hbar\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{X''}{X} + V(x_*) - \frac{m}{8\tau_0^2}x_*^2 + \frac{3i\hbar}{4\tau_0}. \qquad (22)$$

Для того чтобы плотность заряда зависела от τ только множителем $1/\xi^4$, следует положить $i\hbar\frac{\dot{T}}{T} = E$, где E — действительная величина. В этом случае функция $X(x_*)$ является комплексной.

$$E - \frac{3i\hbar}{4\tau_0} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{X''}{X} + V(x_*) - \frac{m}{8\tau_0^2}x_*^2. \qquad (23)$$

Будем искать решение в виде $X = R(x_*)\exp(i\theta(x_*))$, где R и θ — действительные функции. Получим систему

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(R'' - R\theta'^2) + \left(V(x_*) - E - \frac{m}{8\tau_0}x_*^2\right)R = 0,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(2R'\theta' + R\theta'') + \frac{3\hbar R}{4\tau_0} = 0. \qquad (24)$$

Эта система должна быть дополнена уравнением для потенциальной функции $V(x_*)$, определяемой собственным зарядом $q^2|\Psi_1|^2$

$$\frac{d^2}{dx_*^2}V(x_*) = -q^2 R^2. \qquad (25)$$

Соотношение (25) следует из уравнения Пуассона $\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -4\pi\rho$, $\rho = q|\Psi|^2$. Введем безразмерную переменную $s = x_*/\sqrt{\frac{2\hbar\tau_0}{m}}$. Тогда уравнения примут вид

$$\frac{\hbar}{4\tau_0}(R'' - R\theta'^2) - \left(V - E - s^2\frac{\hbar}{4\tau_0}\right)R = 0,$$

$$2R'\theta' + R\theta'' - 3R = 0, \quad V'' = -\frac{2q^2\hbar\tau_0}{m}R^2. \qquad (26)$$

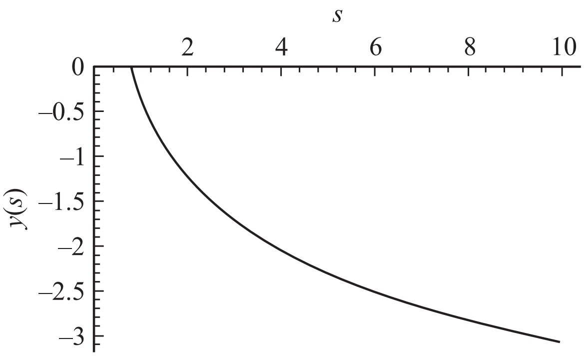

Рис. 6. Зависимость потенциала от координаты при сферически симметричном распределении.

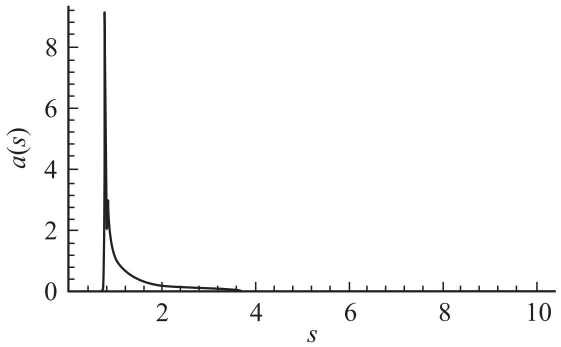

Рис. 7. Зависимость плотности частиц от координаты при сферически симметричном распределении.

Штрих означает производную по s. Отметим, что выполняется уравнение непрерывности $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x}$, где

$$P(x,t) = \frac{1}{\xi^2} R^2 \left(\frac{x}{\xi(t)} \right),$$

а

$$S(x,t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{2iR^2\theta'}{\xi^5} + \frac{2im}{2\hbar\tau_0} \frac{x}{\xi^6} R^2 \right).$$

P — плотность вероятности, S — плотность потока вероятности. Перепишем систему (26) в безразмерном виде

$$R(s) = x(t), \qquad \theta' = y(t), \qquad \frac{4\tau_0}{\hbar} V(s) = z(t).$$

Положим

$$\frac{4\tau_0 E}{\hbar} = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad \dot{z}(0) = 0, \qquad \frac{2q^2\tau^2}{m} = 1.$$

Тогда система (26) может быть сведена к двум уравнениям второго порядка

$$\ddot{x} = x \left(z + \frac{9\dot{z}^2}{x^4} - 1 - t^2 \right), \qquad \ddot{z} = -x^2.$$

На рис. 8–10 — результаты численных вычислений для плотности вероятности, отношение плотности потока вероятности к плотности вероятности (т.е. скорости) и самосогласованного потенциала.

Характерно, что плотность вероятности и отношение плотности потока вероятности к плотности вероятности имеют колебательный характер относительно некоторого постоянного значения, причем частота колебаний растет. При этом потенциал монотонно убывает с ростом t. При усреднении по колебаниям вид полученных кривых качественно совпадает с классическими.

Таким образом, в настоящей работе изучена нестационарная система, описываемая модельным гамильтонианом. Показана возможность сведения описания сложной

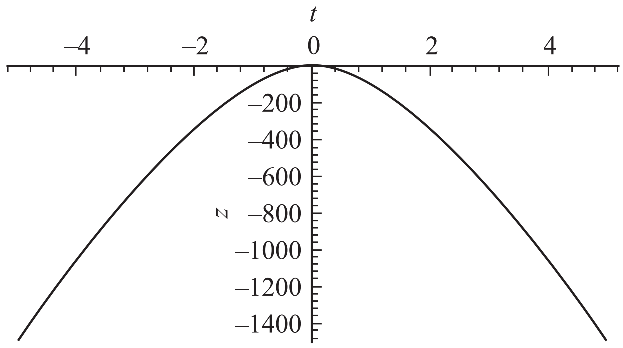

Рис. 8. Зависимость потенциала от координаты в квантовой одномерной задаче.

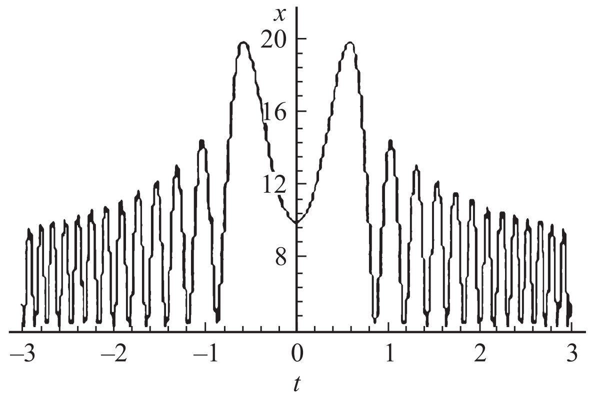

Рис. 9. Зависимость плотности от координаты в квантовой задаче.

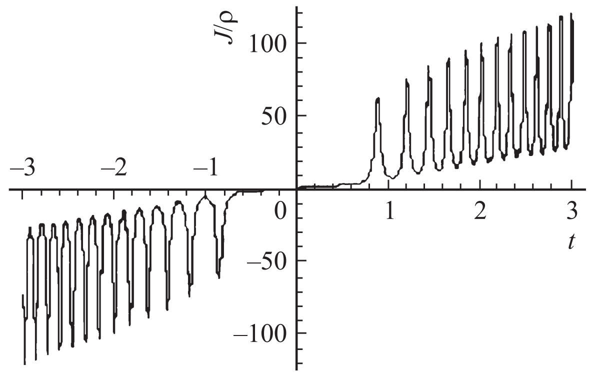

Рис. 10. Зависимость отношения плотности тока к плотности от координаты в квантовой задаче.

самосогласованной системы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] *Саранцев В.П., Перельштейн Э.А.* Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. М.:Атомиздат, 1979.
[2] *Капчинский И.М.* Теория линейных резонансных ускорителей. Динамика частиц. М.: Энергоиздат, 1982.
[3] *Чихачев А.С.* Кинетическая теория квазистационарных состояний пучков заряженных частиц. М.: Физматлит, 2001.
[4] *Efthimiou C.J., Spector D.* // Phis. Rev. 1994. Vol. 49. N 4. P. 2301.
[5] *Dodonov V.V., Man'ko V.I., Nikonov D.T.* // Phis. Lett. A. 1992. Vol. 162. P. 359.
[6] *Чихачев А.С.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. С. 917–921, // ЖТФ. 2006. Т. 76. С. 138.
[7] *Mestschersky J.* // Astron. Nachr. 1893. Vol. 132. P. 129; Astron. Nachr. 1902. Vol. 159. P. 229.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Наука, 1973.