Журнал технической физики, 2014, том 84, вып. 3

04

Формулы для оценки параметров положительного столба тлеющего разряда в электроотрицательных газах при конечных ионных температурах

© А.П. Головицкий

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: alexandergolovitski@yahoo.com

(Поступило в Редакцию 19 июня 2013 г.)

В простейшем предположении о постоянстве скоростей плазмохимических процессов на примере плазмы положительного столба электроотрицательного разряда низкого и среднего давлений для случая отлипания нейтральными частицами получены явные, достаточно простые и в то же время приемлемо точные аналитические соотношения, позволяющие быстро оценить геометрические параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц в названной плазме, а также ее энергетические параметры, не прибегая к численному моделированию. Новым является учет конечности ионных температур и наличия ионной диффузии. Показано, что поперечное расслоение электроотрицательной плазмы на области с разным ионным составом является следствием неизотермичности плазмы.

Введение

Перенос заряженных частиц в низкотемпературной плазме положительного столба (ПС) электроотрицательных (ЭО) газов обладает рядом существенных особенностей. В первую очередь это связано с тем обстоятельством, что поперечное к протеканию тока самосогласованное электрическое поле E_x, вызванное уходом электронов на стенку при $T_e > T_i$, втягивает отрицательные ионы вглубь плазмы. Поэтому плазма ПС расслаивается на области с разным ионным составом. Ее периферийная область практически не содержит отрицательных ионов и представляет собой электрон-ионную (e-i) плазму, для которой характерен близкий к амбиполярному режим диффузии плазмы и наличие поперечного электрического поля E_x, направленного наружу. Во внутренней же области (объеме плазмы) концентрации ионов — и отрицательных n_n, и положительных n_p — намного превышают концентрацию электронов n_e, т.е. плазму можно назвать ион-ионной (i-i). В объеме при сильной электроотрицательности имеет место близкая к свободной диффузия электронов при почти плоском пространственном распределении их концентрации; величина последней намного меньше, чем n_p и n_n, а поперечное поле E_x близко к нулю. В узкой области перехода от i-i- к e-i-плазме имеют место сильные изменения концентраций ионов [1–6].

Изложенные результаты в основном получены посредством сложного численного моделирования плазмы. Современные модели способны обеспечить даже количественную точность в сопоставлении с данными эксперимента. Но при их практическом применении часто возникает необходимость приспосабливать модель к изменениям условий эксперимента и выявлять доминирующие элементарные процессы в плазме, что непросто сделать без априорного знания параметров плазмы, которые еще только подлежат вычислению в составляемой модели.

Приведенные в [1,7–9] простые аналитические соотношения позволяют легко и, как показано в [7], с приемлемой точностью априори оценить параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц и энергетические параметры плазмы ПС ЭО тлеющего разряда низкого и среднего давлений, не прибегая к численному моделированию. Но все названные соотношения были получены лишь для случая, когда отношение ионной и электронной температур $\tau = T_i/T_e \to 0$, т.е. в пренебрежении ионной диффузией, что ограничивает область их применения. В то же время, как показано при численном моделировании реального разряда в кислороде [9], величина τ может достигать $\sim 0.15{-}0.2$; при этом и формы профилей концентраций заряженных частиц, и толщина периферийной области существенно отличаются от случая, когда $\tau \to 0$. Тем не менее аналитических соотношений, сопоставимых по простоте и точности с приведенными в [7–9], но в которых учитывалось бы, что $\tau > 0$, пока не получено.

Целью настоящей работы является развитие результатов [7], т.е. получение, по-возможности, простых аналитических соотношений, позволяющих и в случае заметного влияния ионной диффузии с приемлемой точностью оценить параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц в плазме ПС тлеющего разряда низкого и среднего давлений в ЭО газах, а также энергетические параметры названной плазмы без сложного численного моделирования.

Исходные предпосылки

Как и в [7], будем полагать отлипание электронов основным механизмом гибели отрицательных ионов — как для разрядов, содержащих кислород. Исходная стационарная система для поперечных потоков заряженных частиц Γ_j и их дивергенций имеет вид

$$\begin{cases} \nabla\Gamma_e = (\nu_i - \nu_a)n_e + \nu_d n_n, \\ \nabla\Gamma_p = \nu_i n_e, \\ \nabla\Gamma_n = \nu_a n_e - \nu_d n_n, \end{cases} \tag{1}$$

$$\Gamma_j = -D_j \nabla n_j + z_j n_j \mu_j E_x, \tag{2}$$

$$\Gamma_p - \Gamma_n - \Gamma_e = 0. \tag{3}$$

Граничные условия задачи:

$$n_e(x_W) = n_p(x_W) = n_n(x_W) = 0, \quad \Gamma_n(x_W) = 0.$$

Здесь x_W — координата стенки, D_j, μ_j, z_j — коэффициенты диффузии, подвижности и знаки заряда частиц j-го сорта, индексы e, p, n соответствуют электронам, положительным и отрицательным ионам, ν_i, ν_a, ν_d — частоты ионизации, прилипания и отлипания. Указанные коэффициенты и частоты в реальности определяются продольным электрическим полем столба E_z, являющимся собственным числом задачи. В излагаемой здесь простой 1D модели принято, что собственным числом является частота ионизации ν_i, а ν_a, ν_d, D_j, μ_j являются заданными константами. Рассмотрим случай неизотермичной плазмы $T_e > T_i$, а также допустим, что $\mu_e n_e \gg \mu_p n_p, \mu_n n_n$.

Введем безразмерную координату $X = x/x_W$, приведенные диффузионные частоты $D^*_{aj} = \mu_j T_e/(e x_W^2)$, а также приведенные безразмерные частоты ионизации $\nu = \nu_i/D^*_{ap}$, прилипания $\alpha = \nu_a/D^*_{an}$ и отлипания $\beta = \nu_d/D^*_{an}$. Нормируем концентрации заряженных частиц на n_{e0} — электронную концентрацию в центре плазмы — и введем обозначения: $n = n_e/n_{e0}$, $N = n_n/n_{e0}$, $P = n_p/n_{e0}$, $\tau_j = T_j/T_e$. Тогда из (1)–(3) с учетом квазинейтральности плазмы можно получить

$$-\Delta N \tau_n + \nabla\left(\frac{N}{n}\nabla n\right) = \alpha n - \beta N, \tag{4}$$

$$-\Delta P \tau_p - \nabla\left(\frac{P}{n}\nabla n\right) = \nu n, \tag{5}$$

где аргументом является безразмерная координата $0 \le X \le 1$.

Полученные при $\tau_{p,n} \to 0$ основные результаты [7] сводятся к следующему. Во внешней области (оболочке) при $1 - \delta < X \le 1$ электроны распределены как

$$n(X) \approx n_1 \sin\left[\frac{\pi}{2\delta}(1 - X)\right], \tag{6}$$

где δ — толщина оболочки:

$$\delta \cong \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\nu + \alpha}}, \text{ при } \alpha \gg 1 \ \delta \approx \pi/(2\sqrt{\alpha}), \tag{7}$$

а величина $n_1 = n(1 - \delta)$ определяется из условия сшивки $n(X)$ на границе оболочка–объем. В оболочке мало отрицательных ионов: $N \ll n$.

В центральной области (объеме) плазмы электронные профили

$$n(X) \approx \cos\left(\sqrt{\frac{\nu\beta}{\nu + \alpha}}X\right)$$

или

$$n(X) \approx \mathrm{J}_0\left(\sqrt{\frac{\nu\beta}{\nu + \alpha}}X\right) \tag{8}$$

для плоской (ПГ) и цилиндрической геометрий (ЦГ) соответственно. Ионные профили в объеме подобны профилям электронов

$$n(X) \approx N_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\nu\beta}{\nu + \alpha}}X\right) \text{ (ПГ)}$$

или

$$n(X) \approx N_0 \mathrm{J}_0\left(\sqrt{\frac{\nu\beta}{\nu + \alpha}}X\right) \text{ (ЦГ)}, \tag{9}$$

где отношение концентраций отрицательных ионов и электронов в центре разряда

$$N_0 = N(0) \approx \frac{\nu + \alpha}{\beta}. \tag{10}$$

Критерий работоспособности вышеприведенных формул

$$\tau < 0.2\beta/\alpha \tag{11}$$

получен в [7] из условия малости определяемой отлипанием приведенной диффузионной длины отрицательных ионов $\lambda = \frac{\sqrt{D_n/\nu_d}}{x_W} = \sqrt{\tau/\beta}$ по сравнению с δ.

В настоящей работе ограничимся случаем сильной электроотрицательности $\alpha \gg 1$ и $\alpha \gg \beta$, когда влияние ионной диффузии, как следует из (11), сказывается наиболее существенно, а внешняя оболочка e-i-плазмы настолько тонкая, что ее и в ЦГ можно положить плоской, т. е. $\delta \ll 1$. Для этого случая (точнее для $\beta \le 2\sqrt{\alpha}$) в [1,7,8] приведены следующие выражения для приведенной частоты ионизации:

$$\nu \approx \sqrt{\alpha} \text{ (ПГ) или } \nu \approx 2\sqrt{\alpha} \text{ (ЦГ)}. \tag{12}$$

Далее для простоты примем $\tau_p = \tau_n = \tau = T_i/T_e$.

Правомерность сделанных в работе предположений, а также точность полученных в итоге аналитических соотношений будут продемонстрированы ниже путем сравнения последних с результатами так называемого „вычислительного эксперимента“, т. е. численного решения уравнений (1)–(3). Эти уравнения были преобразованы в задачу на собственные значения, в качестве которых были избраны отношение концентраций отрицательных ионов и электронов в центре разряда N_0 и приведенная частота ионизации ν. Детально „вычислительный эксперимент“ описан в [7].

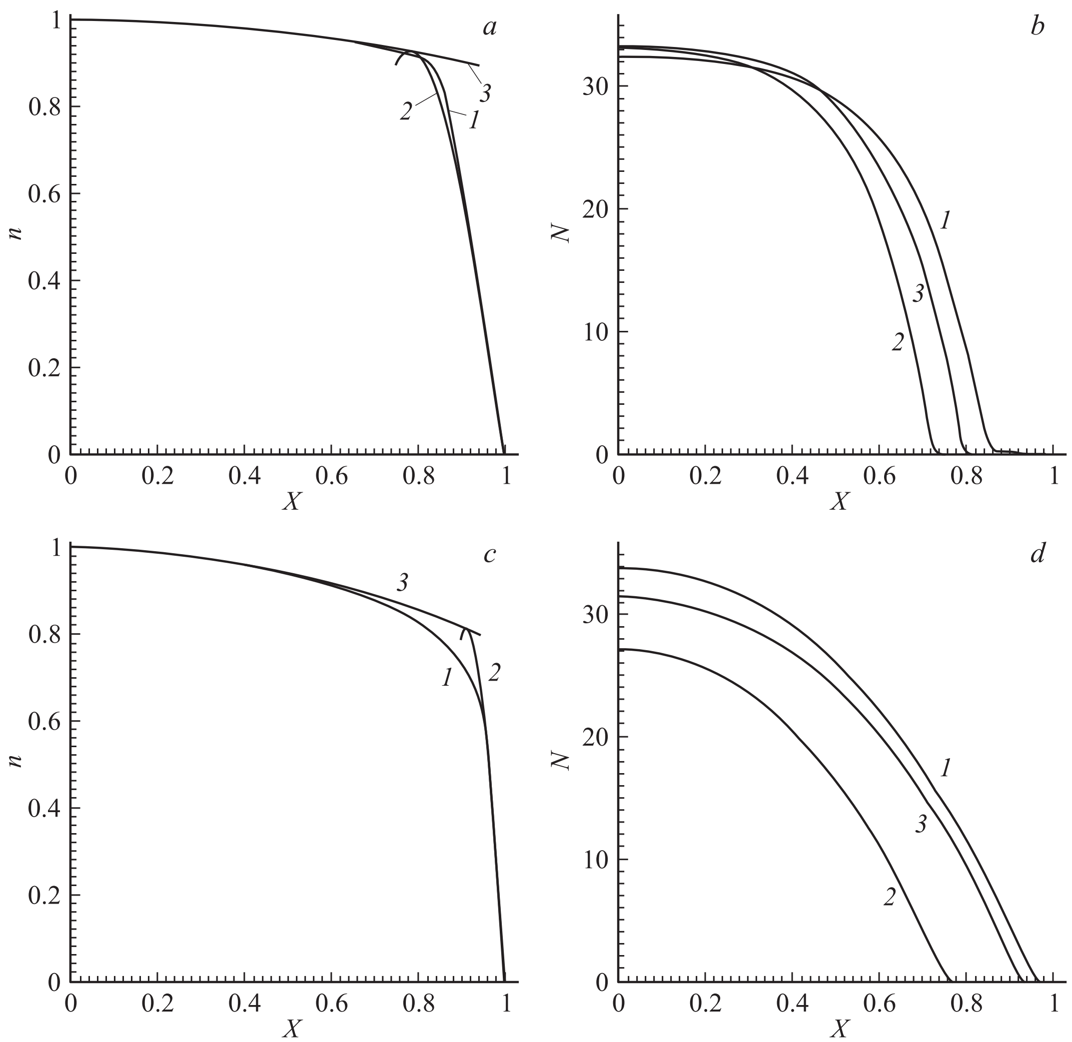

Рис. 1. Влияние конечной ионной температуры на профили концентраций заряженных частиц для плоской геометрии при $\alpha = 25$, $\beta = 1$: *a* — электроны, $\tau = 0.01$, *1* — численный расчет, *2* — формула (6) при δ_τ по (18), *3* — формула (8); *b* — отрицательные ионы, $\tau = 0.01$, *1* — численный расчет, *2* — $N(X)$ по (14) при δ по (7), *3* — $N(X)$ по (14) при δ_τ по (18); *c, d* — то же, что и *a, b*, но при $\tau = 0.1$; величины ν рассчитаны по (20).

Профили концентраций заряженных частиц

При $\alpha \gg 1$ в объеме будет $N \approx P \gg n$ [1,7–9], учтя это и сложив (4) и (5), получим

$$-2\tau \Delta N \approx (\alpha + \nu)n - \beta N. \tag{13}$$

Допустим, что ионная диффузия мало влияет на профиль концентрации электронов в объеме и примем, что для $n(X)$ будет по-прежнему выполняться (8). Численное моделирование подтверждает данное допущение — рис. 1, *a, b*. Тогда (13) имеет следующее аналитическое решение:

$$N(X) \approx \frac{\nu + \alpha}{\beta[1 + 2\tau\nu/(\nu + \alpha)]} \times \left\{ \cos(\xi X) - \frac{\cos[\xi(1 - \delta_\tau)]}{\mathrm{ch}[(1 - \delta_\tau)/(\lambda\sqrt{2})]} \,\mathrm{ch}[X/(\lambda\sqrt{2})] \right\}, \tag{14}$$

$$N(X) \approx \frac{\nu + \alpha}{\beta[1 + 2\tau\nu/(\nu + \alpha)]} \times \left\{ \mathrm{J}_0(\xi X) - \frac{\mathrm{J}_0[\xi(1 - \delta_\tau)]}{\mathrm{I}_0[(1 - \delta_\tau)/(\lambda\sqrt{2})]} \,\mathrm{I}_0[X/(\lambda\sqrt{2})] \right\}, \tag{15}$$

для ПГ и ЦГ соответственно. Здесь J_0 и I_0 — обычная и модифицированная функции Бесселя нулевого порядка, $\xi = \sqrt{\nu\beta/(\nu + \alpha)}$, а величина δ_τ — такое расстояние от стенки, где $N(1 - \delta_\tau)$ можно положить равной нулю (см. рис. 1, *b, d*, кривые *1*).

Для величины $N_0 = N(0)$ при $\alpha \gg \nu\tau$ можно принять

$$N_0 \approx \left(\frac{\nu + \alpha}{\beta} - 2\nu\lambda^2 \right) f(\lambda), \tag{16}$$

где множитель $f(\lambda)$ при $\lambda \le 0.4$ примерно равен

$$f(\lambda) \approx 1 - 2\exp[-1/(\lambda\sqrt{2})] \text{ для ПГ}$$

и

$$f(\lambda) \approx 1 - \sqrt{\sqrt{2}\pi/\lambda}\,\exp[-1/(\lambda\sqrt{2})] \text{ для ЦГ}.$$

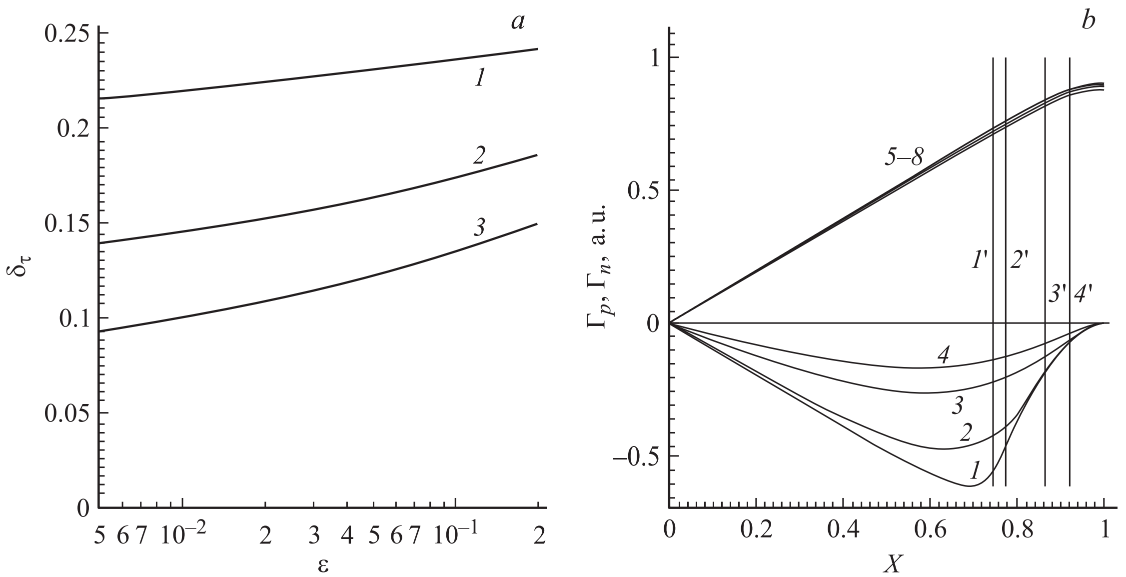

Рис. 2. Влияние конечной ионной температуры на толщину „оболочки“ и на ионные потоки для плоской геометрии при $\alpha = 25$, $\beta = 1$ („вычислительный эксперимент“: численное решение уравнений (1)–(3)): *a* — зависимости $\delta_\tau(\varepsilon) = 0.01$; *2* — $\tau = 0.05$; *3* — $\tau = 0.1$; *b* — потоки ионов, *1* — Γ_n при $\tau = 0.001$; *2* — Γ_n при $\tau = 0.01$; *3* — Γ_n при $\tau = 0.05$; *4* — Γ_n при $\tau = 0.1$; *5–8* — то же, что и *1–4* для Γ_p; вертикальными линиями $1'-4'$ показано рассчитанное по (18) положение границы раздела i-i- и e-i-плазм при тех же τ, что и для 1–4 соответственно.

При $\tau \to 0$ (14) и (15) переходят в (9), а (16) — в (10). Для ПГ при $\lambda < 0.25$, а для ЦГ при $\lambda < 0.18$ можно положить $f(\lambda) \approx 1$, и тогда (16) упрощается

$$N_0 \approx \frac{\nu + \alpha}{\beta} - 2\nu\lambda^2. \qquad (17)$$

Результаты сложных численных моделей [5,6,9] демонстрируют, что наличие ионной диффузии приводит к частичному проникновению отрицательных ионов со стороны объема в оболочку, к сокращению размера обедненной отрицательными ионами пристеночной области e-i-плазмы; т. е. при $\tau > 0$ величина δ_τ должна быть меньше, чем δ, рассчитанная при $\tau \to 0$ по (7). Если все же в качестве δ_τ подставить δ из (7), то (14) и (15) не дают приемлемого согласия с данными „численного эксперимента“ даже при сравнительно небольших τ (например, для $\alpha = 25$, $\beta = 1$ уже при $\tau \geq 0.01$ (рис. 1, *b, d*, кривые *2*)).

Оценим величину δ_τ. Диффузионный поток отрицательных ионов направлен к стенке против силы, создаваемой поперечным полем E_x, сосредоточенным в пристеночной оболочке e-i-плазмы. В первом приближении

$$E_x(X) \approx \frac{T_e}{ex_W}\sqrt{\nu + \alpha}\,\mathrm{ctg}[\sqrt{\nu + \alpha}(1 - X)].$$

В координате Z, отсчитываемой от границы оболочки $X_0 = 1 - \delta$ к стенке, потенциальная энергия иона

$$W_n(Z) \approx T_e\sqrt{\nu + \alpha}\int_0^Z \mathrm{tg}(\xi\sqrt{\nu + \alpha})d\xi$$

$$= -T_e \ln[\cos(Z\sqrt{\nu + \alpha})].$$

Концентрация отрицательных ионов в поле E_x распределена по Больцману

$$\frac{N(Z)}{N|_{Z=0}} = \exp\left[-\frac{W_n(Z)}{T_n}\right] = [\cos(Z\sqrt{\nu + \alpha})]^{1/\tau}.$$

Положим границей диффузионного продвижения отрицательных ионов к стенке такую координату $Z = \delta_D$, при которой $\frac{N(\delta_D)}{N|_{Z=0}}$ сделается малой величиной $\varepsilon \ll 1$. Анализ показал, что конечный результат, т. е. величина δ_τ, весьма слабо зависит от ε в пределах от 0.005 до 0.2 (рис. 2, *a*). Это дает возможность принять $\varepsilon = 0.005$, т. е. $\frac{N(\delta_D)}{N|_{Z=0}} = \frac{1}{200}$, а $\delta_D \approx \frac{\arccos(0.005^\tau)}{\sqrt{\nu+\alpha}}$. Итоговая толщина обедненной отрицательными ионами внешней оболочки δ_τ при $\tau > 0$

$$\delta_\tau \approx \delta - \delta_D = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\nu + \alpha}}\left[1 - \frac{2}{\pi \arccos(0.005^\tau)}\right]. \qquad (18)$$

При $\tau \to 0$ толщина оболочки δ_τ стремится к величине δ, даваемой формулой (7), а при $\tau \to 1$ $\delta_\tau \to 0$. Это подтверждает гипотезу [1] о том, что физической причиной расслоения многокомпонентной плазмы и наличия в ней периферийной области, не содержащей отрицательных ионов, является неизотермичность плазмы. При $T_e \gg T_i$ сильное электрическое поле E_x, вызванное диффузионным уходом электронов из периферийной области на стенку, уносит отрицательные ионы с периферии в объем и создает потенциальный барьер, преодолеть который отрицательные ионы при диффузионном движении к стенке не могут.

При $\tau > 0$ рассчитываемую из (18) величину δ_τ следует подставлять в (14), (15) и в (6) (в последнем

Геометрия	α	β	τ	$\sqrt{\alpha}$	ν_{num}	ν по (20)	$N_{0,\text{num}}$	N_0 по (17)	N_0 по (16)
ПГ	25	1	0.001	**5.0**	**6.1**	**6.0**	**31.0**	**30.0**	**30.0**
ПГ	25	1	0.01	5.0	**7.6**	**8.3**	**32.1**	**33.1**	**33.0**
ПГ	25	1	0.05	5.0	**13.7**	**13.3**	**33.6**	**36.9**	**33.8**
ПГ	25	1	0.1	5.0	**20.7**	**17.3**	**33.5**	**38.8**	**30.6**
ПГ	90	3	0.001	**9.5**	**10.1**	**11.5**	**33.3**	**33.8**	**33.8**
ПГ	90	3	0.01	**9.5**	**12.6**	**15.6**	**34.0**	**35.1**	**35.0**
ПГ	90	3	0.05	9.5	**21.0**	**23.9**	**35.9**	**37.2**	**36.9**
ПГ	90	3	0.1	9.5	**29.5**	**30.4**	**36.6**	**38.1**	**36.5**
Геометрия	α	β	τ	$2\sqrt{\alpha}$	ν_{num}	ν по (21)	$N_{0,\text{num}}$	N_0 по (17)	N_0 по (16)
ЦГ	25	1	0.001	**10.0**	**13.2**	**12.4**	**37.8**	**37.4**	**37.4**
ЦГ	25	1	0.01	10.0	**16.9**	**18.7**	**40.6**	**43.3**	**43.0**
ЦГ	25	1	0.05	10.0	**32.4**	**35.4**	**43.5**	**56.9**	**46.1**
ЦГ	25	1	0.1	10.0	**50.7**	**52.2**	**43.1**	**66.8**	**40.1**

случае вместо δ). Результаты приведены на рис. 1 наряду с результатами численных расчетов (аналогичных тем, что были проведены в [7]), с которыми они находятся в удовлетворительном соответствии.

Приведенная частота ионизации ν

Рассмотрим потоки ионов в области границы раздела i-i- и e-i-плазм. В дальнейших расчетах воспользуемся неразрывностью потоков, т.е. тем, что потоки каждого сорта ионов вблизи границы правее и левее от нее практически одинаковы (рис. 2, b).

Нарабатываемый в оболочке и текущий в объем полный поток отрицательных ионов, согласно (1) и (6), есть

$$\Gamma_n \approx -D^*_{an} n_{e0} x_W n(X_0) \frac{\alpha}{\sqrt{\nu+\alpha}},$$

где $X_0 = 1-\delta$. Оценка текущего из объема полного потока положительных ионов, согласно (1), есть

$$\frac{\Gamma_p}{D^*_{ap} n_{e0} x_W} \approx \nu \int_0^{1-\delta} n(X)dX \ (\text{ПГ})$$

или

$$\frac{\Gamma_p}{D^*_{ap} n_{e0} x_W} \approx \frac{\nu}{1-\delta} \int_0^{1-\delta} Xn(X)dX \ (\text{ЦГ}).$$

Каждый из этих потоков состоит из дрейфового и диффузионного компонентов (см. (2)).

И полный Γ_p, и диффузионный Γ^p_D потоки положительных ионов к границе формируются в объеме и направлены к стенке. Строго говоря, диффузия ионов из объема, где $N \approx P \gg n$, должна проходить по ионно-амбиполярному механизму [1]. Однако коэффициент такой диффузии практически равен коэффициенту униполярной ионной диффузии (отличия, например, для ионов O^-, O_2^+ не превышают 28%). Поток Γ^p_D слева от границы мал, ибо мал градиент концентрации ионов в объеме; последний для $\alpha \gg 1$ и $\alpha \gg \beta$ можно оценить из (9) как

$$\frac{dn_p}{dx} \approx -\frac{n_{e0}N_0}{2x_W}\frac{\nu\beta}{\nu+\alpha}, \ \text{а} \ \Gamma^p_D \approx \frac{T_i\mu_p}{e}\frac{n_{e0}N_0}{2x_W}\frac{\nu\beta}{\nu+\alpha}.$$

Полный поток отрицательных ионов Γ_n к границе i-i- и e-i-плазм формируется в оболочке (правее границы) и направлен вовнутрь плазмы. Но его диффузионная составляющая Γ^n_D направлена к стенке и весьма значительна, ибо определяется большим градиентом концентраций ионов на границе, где при $\tau \to 0$ $\frac{dN(X)}{dX} \to \infty$ [7]. При $\tau > 0$ приведенный размер области диффузионного размытия границы примерно равен диффузионной длине λ, тогда

$$\left.\frac{dn_n}{dx}\right|_{\tau>0} \approx -\frac{n_{e0}N_0}{x_W\lambda}, \ \text{а} \ \Gamma^n_D \approx \frac{T_i\mu_n}{e}\frac{n_{e0}N_0}{x_W\lambda}.$$

Дрейфовые потоки ионов Γ^p_{dr} и Γ^n_{dr} текут навстречу друг другу в одном и том же поле, а так как на границе $N \approx P$, то должно выполняться $|\Gamma^n_{\text{dr}}|/\mu_n \approx \Gamma^p_{\text{dr}}/\mu_p$ или $(|\Gamma_n| + \Gamma^n_D)/\mu_n \approx (\Gamma_p - \Gamma^p_D)/\mu_p$. При $\alpha \gg 1$ и $\alpha \gg \beta$ можно пренебречь Γ^p_D по сравнению с Γ^n_D. Тот факт, что диффузия ионов сильно влияет на полный поток отрицательных ионов и практически не сказывается на потоке положительных, подтверждается в „вычислительном эксперименте“ — рис. 2, b. В итоге для ПГ получим

$$n(X_0)\frac{\alpha}{\sqrt{\nu+\alpha}} + N_0\sqrt{\beta\tau} \approx \nu \int_0^{1-\delta} n(X)dX. \qquad (19)$$

Преобразовав (19) с учетом (17) при $\alpha \gg 1$ и $\alpha \gg \beta$, можно получить для ПГ

$$\nu \approx \frac{\sqrt{\alpha}+\alpha\lambda}{1-\lambda(1-2\tau)}. \qquad (20)$$

Аналогичные выкладки для ЦГ дают

$$\nu \approx 2\frac{\sqrt{\alpha}+\alpha\lambda}{1-2\lambda(1-2\tau)}. \qquad (21)$$

При $\tau > 0$ (20) и (21) переходят в (12).

В принципе, как и из соотношений Шоттки для ЭП плазмы, из (20) или из (21) можно оценить ν и электронную температуру плазмы ПС ЭО разряда при $\tau > 0$. Из сравнения с данными численного моделирования следует, что при $\tau \le 2.5\beta/\alpha$ (20) и (21) дают погрешность не более 25% (таблица).

Заключение

Точность полученных выражений проверена посредством их сравнения с результатами „вычислительного эксперимента", т. е. с результатами численного решения уравнений (1)–(3). В таблице приведено сравнение для ПГ величин ν, рассчитанных по (20) и (21), а также N_0 — по (17) и (16) — с соответствующими величинами, найденными при численном решении системы (1)–(3) (обозначены как ν_{num} и $N_{0,\text{num}}$ соответственно). Жирным шрифтом в таблице выделены величины, которые должны соответствовать.

Сравнение форм профилей концентраций приведено на рис. 1. Выражения, описывающие формы профилей $N(X)$ при $\tau > 0$ — (14) и (15) — оказались более сложными, чем соответствующие выражения (9), приведенные в [7] для $\tau \to 0$. Однако аналитические выражения, полученные в настоящей работе при $\tau > 0$ для величин ν — (20), (21), $N_0 = N(0)$ — (17) и δ — (18), все же оказались явными и в достаточной мере простыми. В пределе $\tau \to 0$ они, как и (14) и (15), переходят в полученные ранее соотношения (12), (10), (7) и (9) соответственно. Для $\tau \le 2.5\beta/\alpha$ погрешность оценок ν и форм профилей не превышает 20–30% в любой геометрии. При использовании (17) погрешность оценки $N_0 = N(0)$ для ПГ при $\tau \le 2.5\beta/\alpha$ не превышает 15%, но для ЦГ при $\tau > \beta/\alpha$ она может достичь 30–50%. Однако если при этом $\tau/\beta < 0.16$ (т. е. $\lambda < 0.4$), то для оценки величины N_0 можно использовать формулу (16), хотя и более сложную, чем (17), но дающую погрешность N_0 не более 10%.

Список литературы

[1] *Цендин Л.Д.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 21–28.
[2] *Volynets V.N., Lukyanova A.V., Rakhimov A.T.* et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 26. P. 647–656.
[3] *Ferreira C.M., Gousset G., Touzeau M.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1988. Vol. 21. P. 1403–1413.
[4] *Daniels P.G., Franklin R.N.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1989. Vol. 22. P. 780–785.
[5] *Franklin R.N., Snell J.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. Vol. 27. P. 2102–2106.
[6] *Головицкий А.П.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 3. С. 45–54.
[7] *Головицкий А.П., Цендин Л.Д.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 3. С. 44–49.
[8] *Богданов Е.А., Колобов В.И., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 13–20.
[9] *Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д.* и др. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 70–77.