

## Простые аналитические формулы для оценки параметров положительного столба тлеющего разряда в электроотрицательных газах

© А.П. Головицкий, Л.Д. Цендин

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: alexandergolovitski@yahoo.com

(Поступило в Редакцию 19 июня 2013 г.)

Для плазмы положительного столба электроотрицательного разряда низкого и среднего давлений в случае отлипания нейтральными частицами проведен анализ простых аналитических соотношений, позволяющих легко и быстро оценить параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц в названной плазме, а также ее энергетические параметры. Новым является установление условий применимости названных соотношений, а также оценка их точности.

### Введение

Основные свойства неизотермической (при  $T_e > T_i$ ) плазмы положительного столба (ПС) тлеющего разряда низкого и среднего давления в электроотрицательных (ЭО) газах были выяснены в работах [1–10]. Названная плазма расслоена в поперечном направлении на две области с существенно разным составом и свойствами. Периферийная область представляет собой электрон-ионную ( $e-i$ ) плазму и практически не содержит отрицательных ионов. Для этой области характерен близкий к амбиполярному режим диффузии плазмы и наличие поперечного электрического поля, направленного наружу. В центральной же области концентрации положительных  $n_p$  и отрицательных ионов  $n_n$  намного превышают концентрацию электронов  $n_e$ , т.е. плазму можно назвать ион-ионной ( $i-i$ ). В ней при сильной электроотрицательности имеет место близкая к свободной диффузия электронов при почти плоском пространственном распределении их концентрации; величина последней намного меньше, чем  $n_p$  и  $n_n$ , а поперечное поле мало, близко к нулю. В узкой области перехода от  $i-i$ - к  $e-i$ -плазме имеют место сильные скачкообразные изменения концентраций ионов. Для ЭО плазмы в целом ввиду неоднородности ее состава становится неприменимой такая часто используемая для электроположительных (ЭП) плазм характеристика как коэффициент амбиполярной диффузии. Это обстоятельство существенно усложняет анализ, так что даже классификация возможных вариантов стационарного состояния является непростым делом.

Вышеизложенные результаты в основном получены посредством сложного численного моделирования плазмы, что затрудняет их практическое применение. При изменении условий эксперимента необходимо модифицировать расчет, из-за чего многие исследователи вынуждены создавать свои собственные модели. Дело осложняется тем, что уже на этапе составления модель-

ных уравнений требуется с достаточной полнотой определить количество доминирующих процессов в плазме разряда и оценить их вклад без априорного знания параметров плазмы, которые сами еще только подлежат вычислению в составляемой модели.

При моделировании ЭП плазм из такого „заколдованного круга“ выходят, пользуясь на этапе составления моделей простыми априорными оценками типа соотношения Шоттки. Простые оценочные соотношения часто представляют и самостоятельный интерес для качественного анализа процессов в плазме. Попытки получения подобных соотношений для ЭО плазм ранее неоднократно предпринимались, но полученные в ряде работ формулы либо были весьма сложными [3–5,11], либо являлись аппроксимациями не разрешимых в явном виде аналитических выражений [6]. Наиболее успешными в этом направлении явились работы [1,10,12]. В них приведен ряд соотношений, связывающих частоты прилипания, отлипания и ионизации как с геометрическими параметрами профилей концентраций заряженных частиц, так и между собой. Однако разграничение областей применимости полученных формул было проведено недостаточно четко, а вопросам их точности уделено незначительное внимание.

Целью данной работы является выявление простых аналитических соотношений, позволяющих быстро и с приемлемой точностью оценить параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц в плазме ПС тлеющего разряда низкого и среднего давлений в ЭО газах, а также энергетические параметры названной плазмы без привлечения численного моделирования. Основной ход рассуждений будет близок работам [1] и частично [10], однако в настоящей работе основное внимание уделено анализу наиболее простых соотношений, представлению их в легко запоминающейся форме, уточнению условий их применения и выяснению их точности.

Основным механизмом гибели отрицательных ионов будем полагать отлипание электронов — как для разрядов при наличии кислорода. Примем квазинейтральность плазмы  $n_e + n_n = n_p$ . Исходная стационарная система для поперечных потоков заряженных частиц  $\Gamma_j$  и их дивергенций имеет вид

$$\begin{cases} \nabla \Gamma_e = (v_i - v_a)n_e + v_d n_n \\ \nabla \Gamma_p = v_i n_e \\ \nabla \Gamma_n = v_a n_e - v_d n_n, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Gamma_j = -D_j \nabla n_j + z_j n_j \mu_j E_x, \quad (2)$$

$$\Gamma_p - \Gamma_n - \Gamma_e = 0. \quad (3)$$

Граничные условия имеют вид:  $n_e(x_W) = n_p(x_W) = n_n(x_W) = 0$ ,  $\Gamma_n(x_W) = 0$ . Здесь  $x_W$  — координата стенки,  $D_j, \mu_j, z_j$  — коэффициенты диффузии, подвижности и знак заряда частиц  $j$ -го сорта, индексы  $e, p, n$  соответствуют электронам, положительным и отрицательным ионам,  $E_x$  — поперечное к протеканию тока поле, вызванное пространственным зарядом,  $v_i, v_a, v_d$  — частоты ионизации, прилипания и отлипания. В реальности указанные коэффициенты и частоты в конечном итоге определяются продольным электрическим полем столба  $E_z$ , являющимся собственным числом задачи. В излагаемой ниже простой 1D модели принято, что собственным числом является частота ионизации  $v_i$ , а  $v_a, v_d, D_j, \mu_j$  являются заданными константами.

Если  $T_e \gg T_i$ , а концентрация электронов не слишком мала, то при  $\mu_e n_e \gg \mu_p n_p, \mu_n n_n$  поле  $E_x$ , согласно (2) и (3), соответствует больцмановскому  $E_x \cong -(T_e/ex_W)(\nabla n_e/n_e)$ . Исключая  $E_x$  и обозначив  $\tau_j = T_j/T_e, D_{aj} = \mu_j T_e/e$ , можно получить

$$-\Delta n_n \tau_n + \nabla \left( \frac{n_n}{n_e} \nabla n_e \right) \cong \frac{v_a n_e - v_d n_n}{D_{an}}, \quad (4)$$

$$-\Delta n_p \tau_p - \nabla \left( \frac{n_p}{n_e} \nabla n_e \right) \cong \frac{v_i n_e}{D_{ap}}. \quad (5)$$

Введем безразмерную координату  $X = x/x_W$  для плоской геометрии (ПГ); для цилиндрической геометрии (ЦГ) будет  $X = r/x_W$ , где  $x_W$  — радиус сосуда с плазмой. Введем приведенные диффузионные частоты  $D_{aj}^* = \mu_j T_e/(ex_W^2)$ , а также приведенные безразмерные частоты ионизации  $v = v_i/D_{ap}^*$ , прилипания  $\alpha = v_d/D_{an}^*$  и отлипания  $\beta = v_a/D_{an}^*$ . Нормируем концентрации заряженных частиц на  $n_{e0}$ -электронную концентрацию в центре плазмы — и введем обозначения  $n = n_e/n_{e0}, N = n_n/n_{e0}, P = n_p/n_{e0}$ . Тогда (4) и (5) перейдут в

$$-\Delta N \tau_n + \nabla \left( \frac{N}{n} \nabla n \right) = \alpha n - \beta N, \quad (6)$$

$$-\Delta P \tau_p - \nabla \left( \frac{P}{N} \nabla n \right) = v n, \quad (7)$$

а аргументом здесь и далее является безразмерная координата  $0 \leq X \leq 1$ .

Уравнения (1)–(3) и (6), (7) описывают профили концентраций при всех  $0 \leq X \leq 1$ , однако их можно решить только численно, что затрудняет анализ. Поэтому далее рассмотрим периферийную и центральную области плазмы по отдельности, делая разумные предположения о конкретных свойствах этих областей. Правомерность сделанных предположений, а также точность полученных в итоге соотношений будут продемонстрированы ниже путем сравнения последних с результатами численного решения (1)–(3). При анализе ограничимся случаем сильной электроотрицательности  $\alpha \gg 1$  (реально  $\alpha \geq 10$ ).

### Периферия плазмы

При  $T_e \gg T_i$  (т.е. при  $\tau \ll 1$ ) можно пренебречь первыми членами левых частей (6) и (7), тогда, сложив эти уравнения, получим

$$\Delta n = -(\alpha + v)n + \beta N. \quad (8)$$

На периферии („оболочке“  $e$ -и-плазмы) отрицательных ионов мало, и при  $N/n \ll \alpha/\beta$  можно пренебречь отлипанием. Тогда при граничном условии  $n(1) = 0$  из (8) получаем простое решение для  $n(X)$  в ПГ

$$n(X) \approx n_1 \sin[\sqrt{v + \alpha}(1 - X)]. \quad (9)$$

Из условия стремления к нулю поперечного поля  $E_x$  на границе  $X_0$  раздела  $e$ -и- и  $i$ -и-плазм [1,2], т.е. из  $n'(X_0) = 0$  толщину оболочки  $\delta$  можно оценить как

$$\delta \cong \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{v + \alpha}}. \quad (10)$$

Соотношение (10) приведено в работах [1,12] (вместо  $\delta$  там использовано обозначение  $l_e$ ). При  $\alpha \gg 1$  будет и  $\alpha \gg v$  (табл. 1), и (10) можно записать еще проще

$$\delta \approx \pi/(2\sqrt{\alpha}). \quad (11)$$

Величина  $n_1 = n(X_0) = n(1 - \delta)$  определится из условия сшивки  $n(X)$  на границе оболочка–объем (см. ниже (15)).

$\alpha$	$\beta$	$v_{\text{num}}$	$\sqrt{\alpha}$	$\frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha}{\beta}$	$N_{0,\text{num}}$	$\frac{\sqrt{\alpha} + \alpha}{\beta}$	$\frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}$
10	1	4.4	3.2(4.4)	24.7	14.1	13.2	35.0
15	0.6	5.2	3.9(5.1)	61.7	33.4	31.5	128
15	0.9	5.1	3.9(5.0)	41.1	22.0	21.0	62.3
20	7	4.6	4.5(4.6)	7.0	3.4	3.5	3.9
25	1	6.1	5.0(6.0)	61.7	31.0	30.0	86.7
25	4	5.5	5.0(5.5)	15.4	7.5	7.5	10.1
25	7	5.0	5.0(5.0)	8.8	4.2	4.3	4.8
25	10	4.7	5.0(4.7)	6.2	2.9	3.0	3.1
56	19	5.5	7.5	7.3(5.4)	3.2	3.3	3.3
90	30	6.5	9.5	7.4(5.9)	3.2	3.3	3.2
90	3	10.1	9.5(9.9)	74.0	33.3	33.2	54.7
256	64	8.9	16.0	9.9(7.7)	4.1	4.25	4.2
625	125	12.0	25.0	12.3(9.8)	5.1	5.2	5.1

При  $\alpha \gg 1$  будет  $\delta \ll 1$ , поэтому ввиду тонкости оболочки полученные для ПГ выражения (9)–(11) можно применить и для ЦГ. Численные расчеты показывают, что погрешность использования (9) и (10) для ЦГ при вычислениях  $\delta$  и  $n(X)$  в оболочке не превышает 10% уже при  $\sqrt{\nu + \alpha} > 4.5$ .

В оболочке поле намного сильнее, чем в объеме плазмы [2,9], и может потребоваться учет зависимости ионной подвижности от поля. Нетрудно убедиться в том, что и при  $\mu_{n,p} \sim E^k$  (где  $k \geq 0$ ) основное свойство решения (8), состоящее в наличии точки  $X_0$ , где производная  $n'(X_0)$  и поле  $E_x$  обращаются в нуль, сохраняется.

### Центральная область

При  $\tau \rightarrow 0$  из (6) и (7) имеем

$$\nabla \left( \frac{N}{n} \nabla n \right) \approx \alpha n - \beta N, \tag{12}$$

$$\nabla \left( \frac{P}{n} \nabla n \right) \approx -\nu n. \tag{13}$$

В центральной области, т.е. в объеме столба (*i-i*-плазма) при  $\alpha \gg 1$  будет  $P \approx N \ll n$  [1–5,12]. Отсюда следует подобие левых, а значит и правых частей (12) и (13), из чего следует подобие ионных профилей

$$\frac{P}{n} \approx \frac{N}{n} = N_0 \cong \frac{\nu + \alpha}{\beta}, \tag{14}$$

и тогда из (13)

$$n(X) \approx \cos \left( \sqrt{\frac{\nu\beta}{\nu + \alpha}} X \right)$$

или

$$n(X) \approx J_0 \left( \sqrt{\frac{\nu\beta}{\nu + \alpha}} X \right), \tag{15}$$

для ПГ и ЦГ соответственно ( $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка). В любой геометрии

$$N(X) \approx \frac{\nu + \alpha}{\beta} n(X). \tag{16}$$

### Переходная область

Для оценки поведения  $n$  в переходной области введем координату  $Z$ , отсчитываемую от границы *e-i*- и *i-i*-плазм  $X_0 = 1 - \delta$  к стенке. В этой координате, в соответствии с (9)  $n(Z) \approx n_1 \cos(\sqrt{\nu + \alpha}Z)$ ,  $n_1 = n|_{Z=0}$ . Будем считать переходную область узкой, т.е.  $0 \leq Z \ll 1$ , тогда  $\frac{n'}{n} \approx -(\nu + \alpha)Z$ ,  $N(Z) \approx n_1$ , а (6) при  $\tau_{p,n} \rightarrow 0$  можно записать как

$$(NZ)' = \frac{\beta}{\nu + \alpha} N - \frac{\alpha n_1}{\nu + \alpha}. \tag{17}$$

Общее решение (17)  $N(Z) = CZ^{\frac{\beta}{\nu + \alpha} - 1} - \frac{\alpha n_1}{\nu + \alpha - \beta}$ . Поскольку  $\alpha > \beta$ , то  $\frac{\beta}{\nu + \alpha} - 1 < 0$ . Так как  $N(Z) > 0$  для любого  $Z$ , то произвольная постоянная  $C > 0$ , а тогда при  $Z \rightarrow 0$  (или, что то же самое, при  $X \rightarrow X_0$ ) величины  $N(Z)$  и  $|N'(Z)|$  должны резко возрастать. Поэтому точку  $X_0$  логично сопоставить с границей между периферийной *e-i*-плазмой и *i-i*-плазмой в объеме, где содержатся практически все отрицательные ионы, и должно включиться отлипание.

В реальной ЭО плазме при конечной ионной диффузии величина производной  $N'(Z)$  будет все же ограниченной даже при  $Z = 0$ . Если принять характерное время гибели отрицательных ионов порядка  $1/\nu_d$ , то можно оценить  $N'(X_0)$  как  $-N_0\sqrt{\beta/\tau}$  (см. ниже).

### Приведенная частота ионизации

На границе раздела *e-i*- и *i-i*-плазм при  $T_e \gg T_i$  (т.е. при  $\tau \rightarrow 0$  и малости ионной диффузии) безразмерный поток отрицательных ионов, текущий в объем и нарабатываемый в оболочке, согласно (6) и (9) (при  $\sqrt{\nu + \alpha} > 4.5$ , когда оболочку можно полагать плоской и в ЦГ), есть  $\frac{|\Gamma_n|}{D_{an}^* n_{e0} x_w} \approx n(X_0) \frac{\alpha}{\sqrt{\nu + \alpha}}$ ; при  $\alpha \gg 1$  будет  $\frac{|\Gamma_n|}{D_{an}^* n_{e0} x_w} \approx n(X_0) \sqrt{\alpha}$ . Оценка там же для текущего из объема потока положительных ионов в соответствии с (7) есть  $\frac{\Gamma_p}{D_{an}^* n_{e0} x_w} \approx \nu \int_0^{1-\delta} n(X) dX$  (для ПГ) или  $\frac{\Gamma_p}{D_{an}^* n_{e0} x_w} \approx \frac{\nu}{1-\delta} \int_0^{1-\delta} X n(X) dX$  (для ЦГ). Поскольку в области границы  $N \approx P$ , а потоки  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_n$  текут в одном и том же поле, то при  $\tau \rightarrow 0$  должно выполняться равенство  $|\Gamma_n|/\mu_n \approx \Gamma_p/\mu_p$ , т.е.

$$n(X_0) \sqrt{\alpha} \approx \nu \int_0^{1-\delta} n(X) dX \text{ (ПГ)}$$

или

$$n(X_0) \sqrt{\alpha} \approx \frac{\nu}{\alpha - \delta} \int_0^{1-\delta} X n(X) dX \text{ (ЦГ)}. \tag{18}$$

Из (18) и (15) получаются следующие соотношения, связывающие между собой величины  $\nu$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  для случая  $\alpha \gg 1$  и  $T_e \gg T_i$  в ПГ и ЦГ соответственно:

$$\sqrt{\nu} = \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{\nu + \alpha} \operatorname{ctg}[\sqrt{\nu\beta/(\nu + \alpha)}(1 - \delta)]$$

или

$$\sqrt{\nu} = \frac{\alpha \sqrt{\beta}}{\nu + \alpha} \frac{J_0[\sqrt{\nu\beta/(\nu + \alpha)}(1 - \delta)]}{J_1[\sqrt{\nu\beta/(\nu + \alpha)}(1 - \delta)]}. \tag{19}$$

В принципе, как и из соотношений Шоттки для ЭП плазмы, отсюда можно оценить  $\nu$  и электронную температуру плазмы ПС ЭО разряда, однако трансцендентные соотношения (19) сложны для применения на практике. Рассмотрим ряд сценариев, когда их можно упростить.

а. Если  $\alpha \gg \beta$ , то в объеме профили всех концентраций близки к плоским (см. (15)), при этом  $n(X_0) \approx n(0) = 1$ , а соотношения (19) соответственно упрощаются до

$$v \approx \sqrt{\alpha} \text{ (ПГ)} \text{ или } v \approx 2\sqrt{\alpha} \text{ (ЦГ)}. \quad (20)$$

Соотношение, близкое к (20), было впервые получено в работе [1]. Отношение концентраций отрицательных ионов и электронов в центре разряда  $N_0$  в соответствии с (14) можно выразить как

$$N_0 \cong \frac{\sqrt{\alpha} + \alpha}{\beta} \text{ (ПГ)} \text{ или } N_0 \cong \frac{2\sqrt{\alpha} + \alpha}{\beta} \text{ (ЦГ)}. \quad (21)$$

б. При возрастании величины  $\beta$  профиль  $n(X)$  в соответствии с (15) станет отклоняться от плоского, будет становиться  $n(X_0) < 1$ . Но одновременно будет убывать и  $\int_0^{1-\delta} n(X)dX$ , и пока  $\beta$  еще не очень велика, равенство (18), а значит и (20), будет нарушаться слабо. Можно записать  $v = \sqrt{\alpha}F(\xi)$ , где при  $\alpha \gg 1$   $\xi \approx \sqrt{\beta/\alpha}$  и  $F(\xi) \approx n(X_0)[\int_0^1 n(X)dX]^{-1}$ . Например, для ПГ  $F(\xi) \approx \xi \operatorname{ctg}(\xi) \approx 1 - \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{45} - \dots$ , и если  $\beta \leq \sqrt{\alpha}$ , то погрешность (20) не превысит 30%. Численные расчеты (табл. 1) подтверждают, что с точностью  $\sim 20\text{--}30\%$  соотношения (20) и (21) фактически выполняются при росте  $\beta$  вплоть до  $\beta \leq 2\sqrt{\alpha}$ .

в. Для получения простого выражения для  $v$  при еще больших значениях  $\beta$ , когда профили концентраций в объеме уже сильно отличаются от плоских и близки к колоколообразным, можно применить иной ход рассуждений, не связанный с выражениями (18) и (19). Если выполнено  $\alpha \gg 1$ , но  $\beta$  настолько велика, что  $\sqrt{\beta/\alpha}$  приближается к  $\pi/2$  (для ПГ), то правое граничное условие для  $N(X)$  делается близким к нулевому:  $N(X_0) \cong 0$ . При  $\alpha \gg 1$  будет  $\delta \ll 1$  (11) и  $X_0 \approx 1$ ; тогда из (15), (16) следует

$$v \approx \frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha}{\beta} \text{ (ПГ)}; \quad v \approx (2.4048)^2 \frac{\alpha}{\beta} \text{ (ЦГ)}. \quad (22)$$

Отметим, что соотношение, близкое к (22), было ранее получено в работе [4]. Из (14) для ПГ и ЦГ получается

$$N_0 \approx \frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}; \quad N_0 \approx (2.4048)^2 \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}. \quad (23)$$

Численные расчеты подтверждают, что соотношения (22) и (23) удовлетворительно выполняются при  $4\sqrt{\alpha} < \beta < \alpha$  (табл. 1).

В промежуточной области  $2\sqrt{\alpha} < \beta < 4\sqrt{\alpha}$  погрешности формул (20) и (22) могут возрасти до 50%, причем (20) завышает, а (22) занижает значения  $v$ . Значения же  $N_0$ , даваемые формулами (21) и (23), в этой области оказываются близкими друг к другу, а их погрешность не превышает 6%.

## Численная модель

С целью проверки полученных выше аналитических выражений, был проведен „вычислительный эксперимент“, т.е. было выполнено численное решение уравнений (1)–(3). Если обозначить  $F_j = \Gamma_j / (D_{aj}^* x_w n_{e0})$ , то (1)–(3) можно преобразовать к виду

$$\frac{dF_p}{dX} + \gamma \frac{F_p}{X} = \nu n, \quad (24)$$

$$\frac{dF_n}{dX} + \gamma \frac{F_n}{X} = \alpha n - \beta N, \quad (25)$$

$$\frac{dN}{dX} = - \frac{1}{n\tau_n(1 + \tau_p) + N(\tau_n + \tau_p)} \times [F_n(n + n\tau_p + N) + F_p N], \quad (26)$$

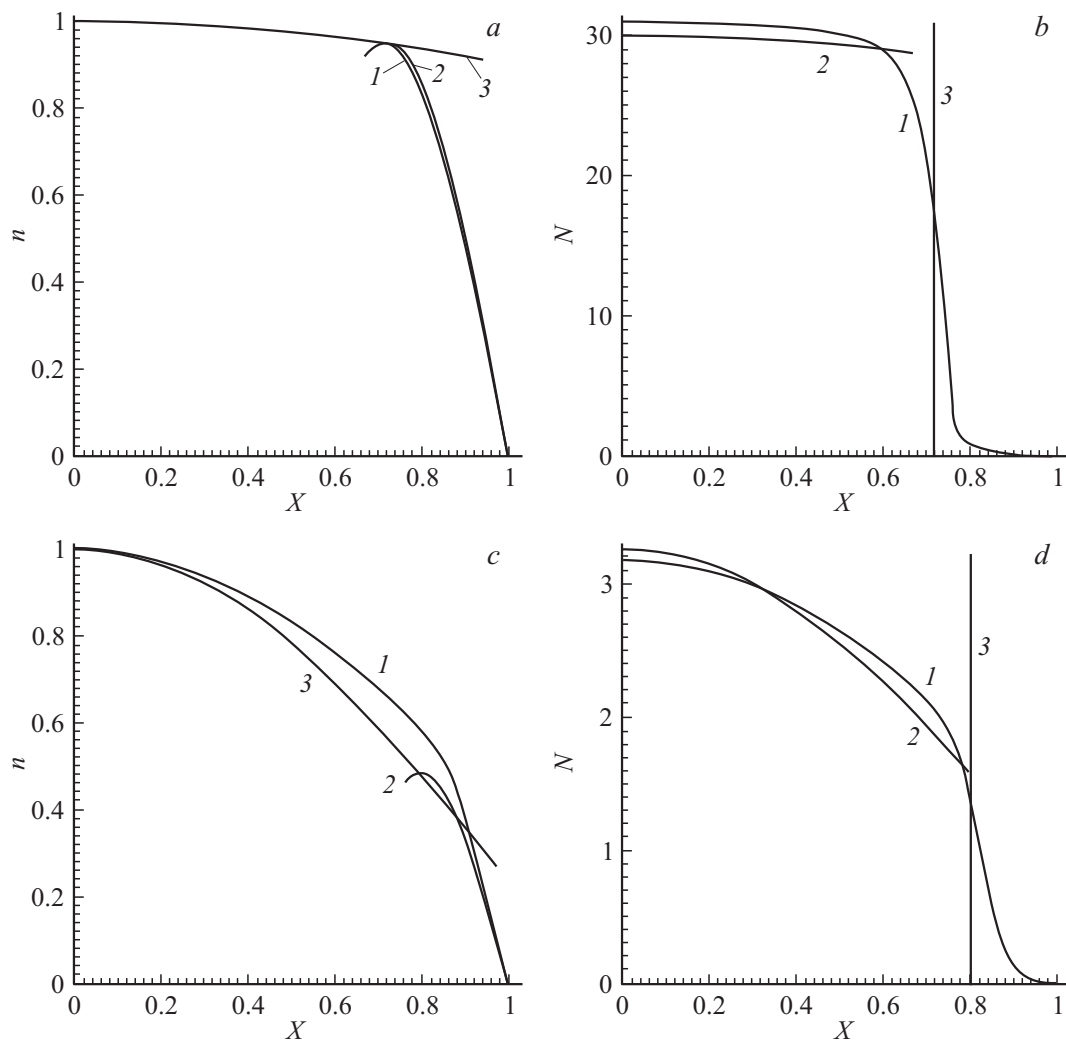
$$\frac{dn}{dX} = - \frac{n}{n(1 + \tau_p) + N(1 + \mu_n/\mu_p)} \left\{ F_p - F_n \mu_n/\mu_p + \frac{\mu_n \tau_n/\mu_p - \tau_p}{n\tau_n(1 + \tau_p) + N(\tau_n + \tau_p)} [F_n(n + n\tau_p + N)F_p N] \right\}, \quad (27)$$

где  $\gamma = 0$  для ПГ и  $\gamma = 1$  — для ЦГ. Система (24)–(29) сходна с аналогичной системой из [7], однако в настоящей работе она получена для случая отлипания, а также когда  $\mu_p \neq \mu_n$  и  $\tau_p \neq \tau_n$ .

Следует отметить, что величины  $\tau_{p,n}$  в (26), (27) нельзя положить в точности равными нулю, ибо при  $\tau \rightarrow 0$  численное решение системы (24)–(27) приобретает сильную неустойчивость (что вызвано отмеченным выше резким изменением  $N'(X)$  в переходной области) и крайне высокую чувствительность к точности задания собственных чисел. Для успешного получения численного решения величины  $\tau$  должны быть конечными, хотя бы и малыми, т.е. такими, что при их дальнейшем уменьшении решение уже практически не меняется ( $\tau \leq 10^{-3}$ ). В этом смысле величины  $\tau_{p,n}$  являются параметрами регуляризации задачи.

Система (24)–(27) имеет два собственных значения (в качестве которых выбраны  $\nu$  и  $N_0$ ) и решается при следующих граничных условиях:  $n(0) = 1$ ;  $dn/dX|_{X=0} = 0$ ;  $N(0) = N_0$ ;  $F_p(0) = F_n(0) = 0$ . При  $X = 1$  должно быть  $N(1) = 0$  и  $n(1) = 0$ , а также  $F_n(1) = 0$  и  $dF_n/dX|_{X=1} = 0$ .

В табл. 1 приведено сравнение для ПГ величин  $\nu$ , рассчитанных по (20) и (22), а также  $N_0$  — по (21) и (23) — с соответствующими величинами, найденными при численном решении системы (24)–(27) (обозначены как  $\nu_{\text{num}}$  и  $N_{0,\text{num}}$  соответственно). Расчеты проведены при малых  $\tau$  и, для простоты, при  $\mu_p = \mu_n$ . Жирным шрифтом в табл. 1 выделены величины, которые должны соответствовать; в скобках приведены значения  $\nu$ , полученные из трансцендентного соотношения (19). Сравнение форм профилей концентраций приведено на рисунке. Координата границы  $i$ - $i$ - и  $e$ - $i$ -плазм в „вычислительном эксперименте“ определена как координата максимума  $|N'(X)|$ .



Профили распределений концентраций заряженных частиц для плоской геометрии: *a* — электроны,  $\alpha = 25, \beta = 1, \tau = 0.001$ ; *1* — численный расчет, *2* — формула (9), *3* — формула (15); *b* — отрицательные ионы,  $\alpha = 25, \beta = 1$ ; *1* — численный расчет, *2* — формула (16), *3* — указывает положение границы между *e-i*- и *i-i*-плазмами  $X_0 = 1 - \delta$ , где  $\delta$  вычисляется по (10); величина  $\nu$  рассчитана по (20); *c, d* — то же, что и *a, b*, но для  $\alpha = 56, \beta = 19, \tau = 0.01$ ; величина  $\nu$  рассчитана по (22).

Характеристики	ПС ЭП разряда	ПС ЭО разряда
Приведенная частота ионизации	$\nu = \frac{\pi^2}{4}$ (формула Шоттки)	$\nu \approx \sqrt{\alpha}$ (при $\beta < 2\sqrt{\alpha}$ ), $\nu = \frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha}{\beta}$ (при $4\sqrt{\alpha} < \beta < \sqrt{\alpha}$ )
Поперечное расслоение плазмы	Отсутствует	<i>i-i</i> -плазма при $0 \leq X < 1 - \delta$ (объем), $\delta \approx \pi/(2\sqrt{\alpha}) \ll 1$ <i>e-i</i> -плазма при $1 - \delta < X \leq 1$ (периферия разряда)
Отношения концентраций ионов и электронов	$\frac{n_p}{n_e} \approx 1$	$\frac{n_p}{n_e} \approx \frac{n_m}{n_e} \approx \frac{\nu + \alpha}{\beta} \gg 1$ (объем) $\frac{n_p}{n_e} \approx 1; \frac{n_m}{n_e} \rightarrow 0$ (периферия)
Профили концентраций заряженных частиц	$n(X) \approx \cos(\sqrt{\nu}X),$ $P(X) \approx n(X)$	$n_{vol}(X) \approx \cos\left(\sqrt{\frac{\nu\beta}{\nu+\alpha}} X\right),$ $N(X) \approx N_0 n_{vol}(X); N_0 \approx \frac{\nu+\alpha}{\beta},$ $P(X) \approx N(X) \gg n(X)$ (объем) $n(X) \approx n_{vol}(1 - \delta) \sin[\sqrt{\nu + \alpha}(1 - X)];$ $P(X) \approx n(X); N(X) \rightarrow 0$ (периферия)

Из табл. 1 видно, что простые аналитические выражения, приведенные в настоящей работе, дают погрешность оценок  $\nu$ ,  $\delta$  и форм профилей не более 20–30%. Погрешность же оценки  $N_0 = N(0)$  не превышает 6%.

## Влияние ионной диффузии

Поскольку все приведенные выше соотношения получены при условии малости ионных температур, т.е. при  $\tau \rightarrow 0$  и пренебрежении ионной диффузией, то представляет интерес оценить область их применимости по отношению к случаю  $\tau > 0$ . Если механизмом гибели отрицательных ионов является отлипание, то их диффузионную длину можно оценить как  $\Lambda_n \approx \sqrt{D_n/\nu_d}$ , а в приведенном масштабе — как  $\lambda_n = \Lambda_n/x_W = \sqrt{\tau_n/\beta}$ . Ионная диффузия не окажет заметного влияния на профили концентраций ионов, когда  $\lambda_n$  будет много меньше масштаба изменения ионных профилей, т.е. если  $\lambda_n \ll \delta$ . При  $\alpha \gg 1$  для оценки  $\delta$  можно использовать (11). Тогда критерий малости влияния ионной диффузии можно сформулировать как  $\tau_p \ll \beta/\alpha$ . Сопоставление с результатами „вычислительного эксперимента“ дает возможность утверждать, что если  $\tau_n < 0.2\beta/\alpha$ , то формулы (9), (15), (16), (20)–(23) и при конечных  $\tau_n$  дают погрешность величин  $\nu$ , а также форм профилей концентраций не более 30%. Влияние же ионной диффузии на величину  $N_0$  еще слабее: погрешность формул (21) или (23) составляет не более 8%.

## Заключение

В табл. 2 приведено сравнение основных характеристик плазмы ПС ЭП разрядов низкого и среднего давлений с приведенными в настоящей работе аналогичными характеристиками плазмы ПС ЭО разрядов для плоской геометрии, сильной электроотрицательности ( $\alpha \gg 1$ ) и  $\tau_n < 0.2\beta/\alpha$ .

Настоящая работа выполнена по инициативе и при участии профессора Л.Д. Цендина, скончавшегося 19 августа 2012 г.

## Список литературы

- [1] Цендин Л.Д. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 21–28.
- [2] Volynets V.N., Lukyanova A.V., Rakhimov A.T. et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 26. P. 647–656.
- [3] Ferreira C.M., Gousset G., Touzeau M. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1988. Vol. 21. P. 1403–1413.
- [4] Daniels P.G., Franklin R.N. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1989. Vol. 22. P. 780–785.
- [5] Daniels P.G., Franklin R.N., Snell J. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1990. Vol. 23. P. 823–831.
- [6] Franklin R.N., Daniels P.G., Snell J. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 26. P. 1638–1649.
- [7] Franklin R.N., Snell J. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. Vol. 27. P. 2102–2106.
- [8] Sabadil H. // Beitr. Plasmaphys. 1973. Bd. 13. S. 235–251.
- [9] Головицкий А.П. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 3. С. 45–54.
- [10] Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д. и др. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 70–77.
- [11] Franklin R.N. // Plasm. Sourc. Sci. T. 2002. Vol. 11. P. 279–282.
- [12] Богданов Е.А., Колобов В.И., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 13–20.