

## Динамическая фрагментация твердых частиц при взаимодействии с жесткой преградой

© Н.А. Горбушин,<sup>1</sup> Ю.В. Петров<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН,  
199178 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: gorbushinnikolay@gmail.com, yp@YP1004.spb.edu

(Поступило в Редакцию 27 марта 2013 г.)

Рассмотрено явление фрагментации твердых частиц малого размера при соударении с жесткой преградой. Показано, что применение энергетического подхода Гриффитса к динамическому разрушению характеризуется величиной удельной поверхностной энергии, отличной от той же величины, определяемой из статических испытаний. Установлено существование пороговой скорости фрагментации и предложен способ ее прогнозирования. Также приведен способ экспериментальной оценки инкубационного времени разрушения.

### Введение

Проблема фрагментации частиц при ударе с жесткой преградой остается еще до конца не изученной. В зависимости от использования процесс фрагментации может быть полезным или нежелательным. Транспортировка частиц по различным каналам приводит к контактам с его стенками. При некоторых условиях может произойти разлом целой частицы на мелкие части, что нежелательно в данной ситуации. В случаях перемалывания частиц в порошок требуется задание таких условий, при которых разлом начальных частиц произведет как можно больше малых осколков, при этом затратив наименьшую энергию. И в тех и других случаях необходима некоторая качественная и количественная модель описания дробления частиц при ударе, что также отмечается в работах [1–3]. С этой целью в настоящей работе предлагается рассмотреть вопрос об удельной энергии, необходимой для образования новых поверхностей при фрагментации, и о моделировании пороговой скорости. В обоих случаях будем предполагать, что частицы имеют сферическую форму и удар является нормальным.

В работе [1] произведена классификация фрагментации частиц при ударе в зависимости от начальной скорости и формы образовавшихся откольных частей для различных материалов. В настоящей работе отмечается, что при „низкой“ скорости частицы происходит ее раскол на 2 части, которые представляют собой половину сферической частицы. При увеличении скорости до „среднего“ уровня происходит образование больших частей: откол небольшой конусовидной части в области удара и образование частей в виде „апельсиновых долек“. Данный вид фрагментации наблюдается для ряда материалов: карбид вольфрама, сталь, оксид алюминия, сапфир, ПММА.

В работе [3] проводились эксперименты по определению пороговых скоростей фрагментации, т.е. минимальных скоростей, при которых наблюдается данное

явление. Авторы приводят примеры того, что при увеличении скорости соударения происходит раскол частицы на 3 и 4 части, которые также имеют вид „апельсиновых долек“.

### Поверхностная энергия при фрагментации

Классический подход механики разрушения, основанный на энергетическом характере данного явления, был предложен Гриффитсом и имеет вид [4]:

$$-\frac{d\varepsilon}{dS} = 2\gamma, \quad (1)$$

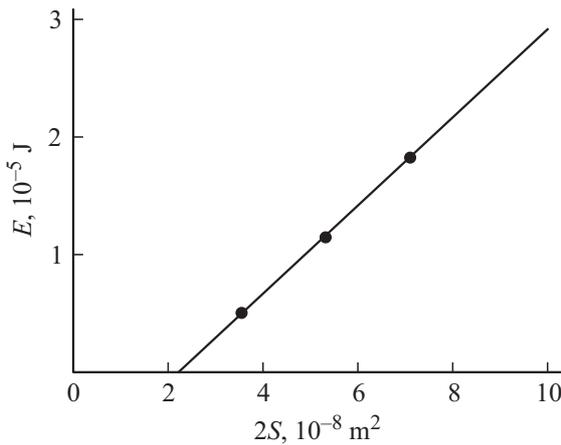
где  $d\varepsilon$  — изменение полной энергии системы, часть которой идет на образование новой поверхности, что приводит к изменению ее площади на величину  $dS$ . Под величиной  $2\gamma$  понимается полная работа (на единицу площади) в зоне разрушения. Первоначально данная величина трактовалась как удельная поверхностная энергия (на единицу площади) [5,6].

При описании процессов разрушения, характеризующихся короткой длительностью нагружения, возникают попытки к применению величины  $\gamma$ , полученной из квазистатического эксперимента. В работе [7] отмечается, что затраты энергии на образование поверхности разрушения зависят от временного фактора. Покажем, что вычисленная величина поверхностной энергии в процессе фрагментации отличается от той же величины, определяемой из квазистатического эксперимента.

В рассматриваемой задаче полная энергия, переданная системе, может быть вычислена как кинетическая энергия частицы перед соударением

$$\varepsilon = \frac{mV^2}{2}, \quad (2)$$

где  $m$  — масса частицы,  $V$  — ее скорость к началу контакта.



**Рис. 1.** График зависимости полной энергии, переданной системе от площади образовавшихся поверхностей.

Будем считать, что в рассматриваемом случае фрагментации образовавшаяся поверхность имеет площадь

$$S = n\pi R^2, \quad n = 2, 3, 4. \quad (3)$$

Если ввести сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в геометрическом центре частицы ( $\theta$  — зенитный угол,  $\varphi$  — азимутальный), то  $n$  — число частей, образовавшихся при разрушении, которые по предположению представляют собой части шара, разрезанного по медианным плоскостям, содержащим ось соударения,  $R$  — радиус частицы.

На рис. 1 представлена зависимость кинетической энергии частицы от площади, образовавшейся при фрагментации. Прямая линия, аппроксимирующая данную зависимость, была построена с помощью метода наименьших квадратов. Угол наклона данной линии дает нам некоторое значение  $\gamma_d = 375.72 \text{ J/m}^2$ . В контексте изучаемого нами процесса данная величина понимается как динамическое значение поверхностной энергии, т. е.

$$-\frac{d\varepsilon}{dS} = 2\gamma_d. \quad (4)$$

Нашей целью является дать приближенное значение, которое может принимать величина  $\gamma$ . В [4–6] применяется следующая формула для определения  $\gamma$  через критическое значение коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}$  и модуль упругости  $E$

$$\gamma = \frac{K_{Ic}^2}{2E}. \quad (5)$$

Считая формулу (5) верной, мы получим  $\gamma = 26.64 \text{ J/m}^2$  ( $K_{Ic} = 4.5\sqrt{m}$  МПа,  $E = 380$  ГПа), что на порядок меньше установленного значения  $\gamma_d$ . Это свидетельствует о том, что применение статических критериев и величин, характеризующих разрушение материала, полученных из статических экспериментов, не может дать качественного объяснения причин разрушения материалов при динамическом нагружении. Приблизительно такое же различие полученных величин (примерно

на порядок) отмечается в работе [7]. Это указывает на зависимость поверхностной энергии от временного фактора.

Также, глядя на график (рис. 1) и учитывая сделанные предположения о форме образовавшихся частей, можно сделать вывод о том, что энергия действительно имеет пороговое значение, ниже которого разрушение происходить не будет. Этот факт дает основания говорить о существовании пороговых скоростей, при которых наблюдается фрагментация.

## Пороговая скорость фрагментации

В работах [3,8] проведена серия экспериментов по определению пороговой скорости разрушения сферических частиц при фрагментации. Знание величины пороговой скорости дает нам возможность оптимизации процесса фрагментации. Поскольку при скоростях выше пороговой дробление частиц будет заведомо происходить, мы можем задавать минимальную скорость, при которой будет происходить разрушение.

Перемещение волнового фронта напряжений в сферической частице имеет сложный характер, тем не менее можно сделать несколько предположений. Предположим, что в силу малости частиц что поле напряжений внутри частиц имеет установившийся квазистатический характер. Тем самым задачу можно понимать как задачу о сжатии сферы диаметрально приложенными точечными силами. Также в работе [2] отмечается сходство фрагментации частиц при ударе и их разрушении при сдавливании.

Основываясь на характере разрушения при ударе частицы, будем предполагать, что это связано с возникновением растягивающих напряжений. При сжатии частицы возникающие растягивающие напряжения на оси нагружения в экваториальной плоскости имеют значения [9]:

$$\sigma^{\text{def}} = \sigma_\varphi = \frac{21}{28 + 20\nu} \frac{P}{\pi R^2}, \quad r = 0, \quad \theta = 0, \quad (6)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $P$  — диаметрально приложенная точечная сила сжатия.

Зависимость  $\sigma = \sigma(t)$ , а точнее  $P = P(t)$ , мы можем определить, предположив, что удар квазистатический, т. е. справедливы соотношения, полученные Герцем при решении задачи о внедрении жесткого сферического штампа в упругое полупространство [10].

Герцем было предложено следующее соотношение между контактной силой  $P$  и сближением  $h$ :

$$P = kh^{3/2}, \quad k = \frac{4E}{3(1 - \nu^2)} \sqrt{R}.$$

Аналогично работам [11,12] получим решение уравнения изменения импульса  $md^2h/dt^2 = -P(t)$ . Из полученного решения находим следующие соотношения:

$$\sigma(t) = \alpha V^{6/5} \left( \sin \frac{\pi t}{t_0} \right)^{3/2}, \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{21}{28 + 20\nu} \left( \frac{E}{\pi(1 - \nu^2)} \right)^{2/5} \left( \frac{5}{4} \rho \right)^{3/5}, \quad (8)$$

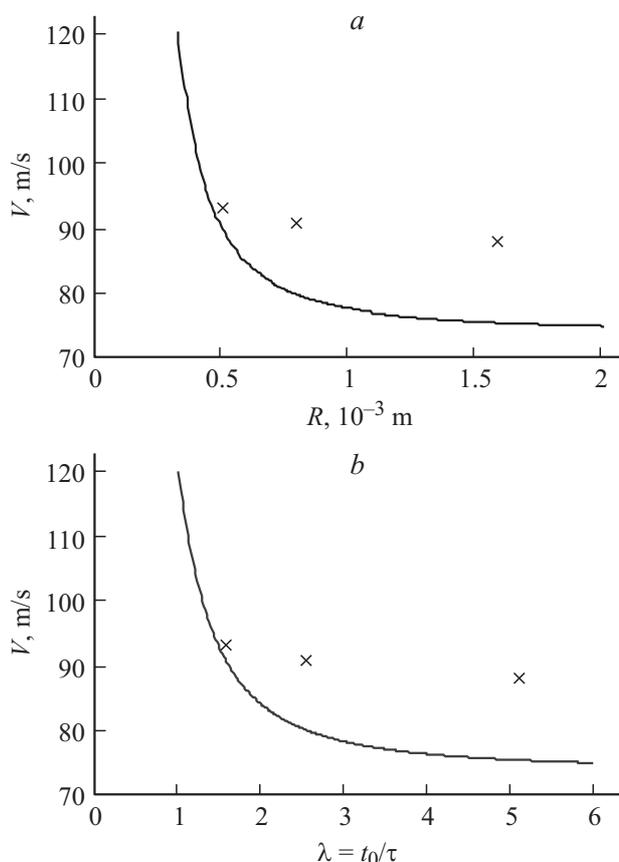
$$t_0 = 3.2 \left( \frac{1 - \nu^2}{E} \pi \rho \right)^{2/5} \frac{R}{V^{1/5}}, \quad (9)$$

где  $t_0$  — время контакта,  $\rho$  — плотность материала частицы.

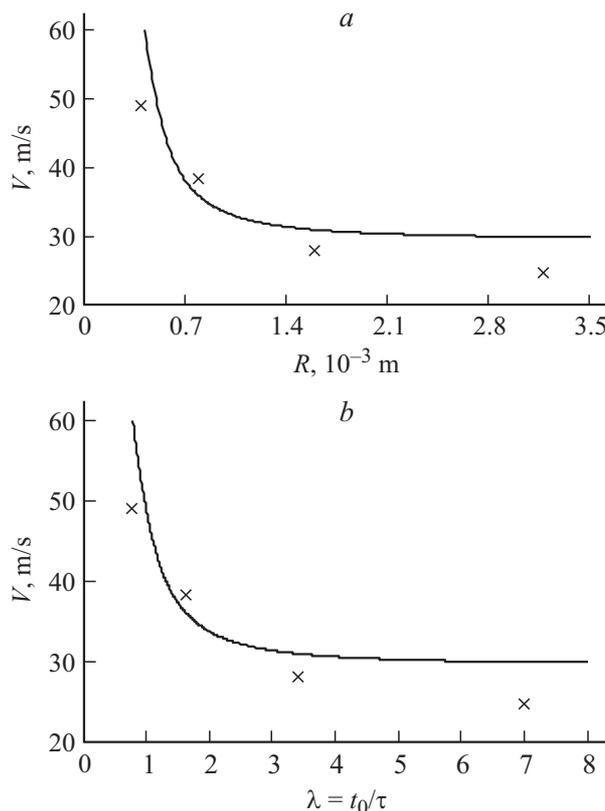
В рассматриваемом диапазоне длительностей и размеров частиц применение классических статических критериев не дает возможности исследовать поведение пороговой скорости. В работах [6,7,11–13] эффективно применяется структурно-временной критерий для задач динамического разрушения материалов. Следуя данной концепции разрушения, будем считать, что фрагментация частицы наступает тогда, когда выполнен критерий инкубационного времени

$$\frac{1}{\tau} \max_t \int_{t-\tau}^t \sigma(s) ds = \sigma_c, \quad (10)$$

где  $\sigma_c$  — статическая прочность материала на растяжение,  $\tau$  — инкубационное время разрушения. Инкубационное время  $\tau$  характеризует продолжительность



**Рис. 2.** Графики зависимости пороговой скорости сферической частицы оксида алюминия  $\text{Al}_2\text{O}_3$  ( $\tau = 0.4 \mu\text{m}$ ): *a* — от радиуса, *b* — от времени контакта, нормированного на инкубационное время  $\tau$ . Крестиками обозначены экспериментальные данные [3].



**Рис. 3.** Графики зависимости пороговой скорости сферической частицы нитрида кремния  $\text{Si}_3\text{N}_4$  ( $\tau = 0.6 \mu\text{s}$ ): *a* — от радиуса, *b* — от времени контакта, нормированного на инкубационное время  $\tau$ . Крестиками обозначены экспериментальные данные [3].

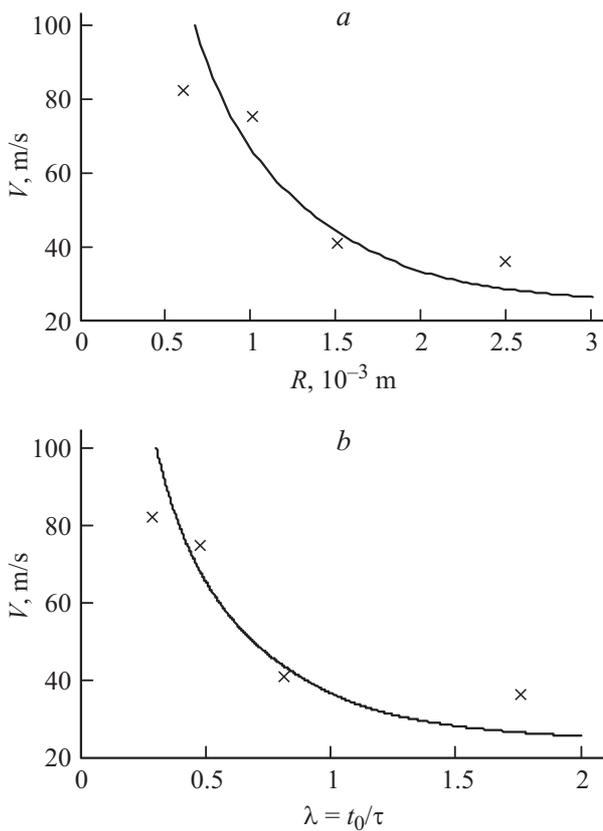
подготовки среды к разрушению или фазовому переходу и также является константой материала, определяемой экспериментально. В работах [6,11–14] приведены различные интерпретации инкубационного времени в зависимости от типов сплошных сред и решаемых задач. При построении модели пороговой скорости в рассматриваемой задаче инкубационное время подбиралось в соответствии с экспериментом.

Левая часть в соотношении (10) принимает максимальное значение в момент времени  $t = (t_0 + \tau)/2$ . Таким образом, критерий (10) приводит к соотношению для определения пороговой скорости

$$V = \left[ \frac{\alpha}{\sigma_c} \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \left( \sin \frac{\pi s}{\lambda} \right)^{3/2} [H(s) - H(s - \lambda)] ds \right]^{-5/6}, \quad (11)$$

где  $\lambda = t_0/\tau$  — безразмерное время контакта,  $H(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда.

При фиксированных различных значениях  $\lambda$  уравнения (9) и (11) позволяют получить зависимость  $V = V(R)$ . Графики зависимостей  $V = V(R)$  и  $V = V(\lambda)$  для  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Si}_3\text{N}_4$  и натриевого стекла представлены на рис. 2–4 соответственно. Константы материалов и



**Рис. 4.** Графики зависимости пороговой скорости сферической частицы натриевого стекла ( $\tau = 4.5 \mu\text{s}$ ): *a* — от радиуса, *b* — от времени контакта, нормированного на инкубационное время  $\tau$ . Крестиками обозначены экспериментальные данные [12].

экспериментальные данные взяты из работы [3] для  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , и [8] для натриевого стекла.

Авторы [3] отмечают, что максимальные растягивающие напряжения возникают не в центре сферической частицы, а на расстоянии, несколько смещенном к области контакта по оси удара. Однако сделанные нами предположения достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными для частиц малого радиуса; в частности, построенная модель достаточно точно описывает зависимость пороговой скорости от времени контакта при  $\lambda < 2$ .

## Об определении инкубационного времени

Предложенный способ моделирования пороговой скорости фрагментации основан на концепции понятия инкубационного времени разрушения. Соответствующий данному подходу временной параметр  $\tau$  является параметром материала и может быть определен, например, из эксперимента на откольное разрушение [6]. Однако величина инкубационного времени может быть опреде-

лена также из опытов на фрагментацию твердых частиц при ударе с жесткой преградой.

Составим уравнение баланса энергии при ударе сферической частицы

$$\varepsilon = 2\gamma_d S + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

где  $\varepsilon$  — кинетическая энергия частицы перед ударом,  $2\gamma_d S$  — энергия образования новых поверхностей при фрагментации,  $\varepsilon_1$  — кинетическая энергия образовавшихся после фрагментации частей,  $\varepsilon_2$  — оставшаяся часть энергии, которая перешла преграде и перешла в тепло. В работе [3] отмечается, что после фрагментации образовавшиеся осколки имеют скорость, почти равную начальной скорости удара (92–96% от начальной скорости). Предположим, что энергия, которая затрачивается на образование новых поверхностей, равняется 10% от начальной кинетической энергии частицы. Тогда

$$2\gamma_d S = 0.1 \frac{mV^2}{2}. \quad (12)$$

Если считать, что наблюдаемая фрагментация происходит при пороговом значении начальной скорости удара (формула (11)), то мы получим уравнение относительно безразмерного параметра  $\lambda$ , а именно

$$\frac{\pi \rho R^3}{15} \left[ \frac{\alpha}{\sigma_c} \int_{(\lambda-1)/2}^{(\lambda+1)/2} \left( \sin \frac{\pi s}{\lambda} \right)^{3/2} [H(s) - H(s - \lambda)] ds \right]^{-5/3} = 2\gamma_d S. \quad (13)$$

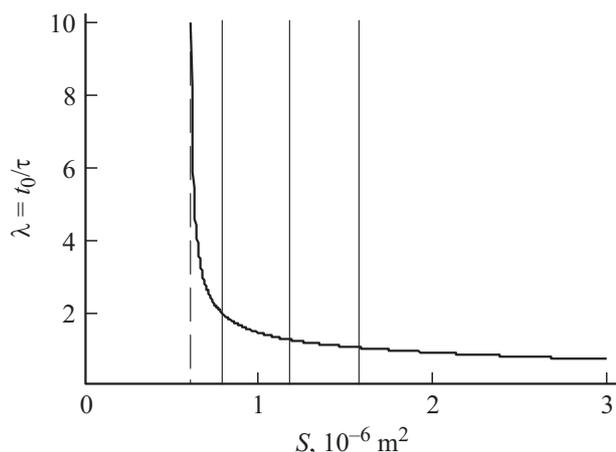
Построим график зависимости параметра  $\lambda$  от площади образовавшейся поверхности  $S$  для сферической частицы  $\text{Si}_3\text{N}_4$  (в первой части работы было определено примерное значение  $\gamma_d = 375.72 \text{ J/m}^2$ ) радиуса  $R = 0.5 \text{ mm}$ .

Считая, что при пороговом режиме фрагментации сферическая частица разламывается на 2 части, т.е.  $S = 7.85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ , мы получаем значение  $\lambda \approx 1.96$ . Экспериментальное значение пороговой скорости для рассматриваемого материала и указанного радиуса  $V \approx 93 \text{ m/s}$  [3]. Воспользовавшись соотношением (9) для определения времени контакта, будем иметь  $t_0 = 6.34 \cdot 10^{-7} \text{ s}$  и, так как  $\lambda = t_0/\tau$ , получаем значение инкубационного времени для  $\text{Si}_3\text{N}_4$   $\tau = 0.32 \mu\text{s}$ . Сравнивая данное значение со значением, используемым при моделировании пороговой скорости для этого же материала  $\tau = 0.4 \mu\text{s}$ , получаем вполне удовлетворительный результат.

Вычислим площадь поверхности, образованной при фрагментации по классическому критерию прочности

$$\max_t \sigma(t) = \sigma_c, \quad (14)$$

где  $\sigma(t)$  задается формулой (7). При использовании (14) также получаем значение пороговой скорости, а по формуле (12) можем вычислить искомую площадь. Это



**Рис. 5.** График зависимости безразмерного параметра  $\lambda$  от площади  $S$  образовавшихся новых поверхностей при фрагментации сферической частицы  $\text{Si}_3\text{N}_4$  ( $\gamma_d = 375.72 \text{ J/m}^2$ ) радиуса  $R = 5 \text{ mm}$ . Вертикальные сплошные линии слева направо соответствуют площадям при расколе частицы на 2, 3 или 4 равные части. Вертикальная штриховая линия соответствует площади, вычисленной с помощью классического критерия прочности (14).

значение равно  $S^* \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^2$  и отмечено на рис. 5 штриховой линией. Тем самым мы показали, что при малых значениях инкубационного времени критерии (10) и (14) становятся эквивалентными, что также отмечается в работах [4,11]. Однако использование критерия (14) при моделировании пороговой скорости не дает соответствия с экспериментальными данными.

Из соотношения (13) можно аналитически установить, что при  $S \rightarrow \infty$  имеем  $\lambda \rightarrow 0$  (а точнее при  $\lambda \rightarrow 0$  имеем  $S \rightarrow \infty$ ). Другими словами, из характера разрушения и определенных пороговых скоростей можем дать качественное сравнение инкубационного времени материала и времени контакта.

Таким образом, экспериментальное определение пороговой скорости фрагментации может также служить экспериментом по определению инкубационного времени. Определение данного параметра для ряда материалов из изучаемого опыта может дать не только качественные, но и количественные оценки для прогнозирования динамического разрушения материалов.

## Заключение

При изучении энергии, необходимой для образования новых поверхностей, было показано, что использование величин, определяемых из статических испытаний материалов на разрушение, становится некорректным при динамическом разрушении. Установлено существование порогового значения затрачиваемой на фрагментацию энергии, что также подтверждает существование пороговой скорости фрагментации.

Предложена модель поведения пороговой скорости фрагментации, под которой понимается минималь-

ная скорость частицы, необходимая для инициирования разрушения. Модель основана на применении структурно-временного критерия разрушения. Построенные графики зависимости пороговой скорости от радиуса частицы и времени контакта частицы с преградой для ряда материалов хорошо согласуются с экспериментом.

Определение пороговой скорости при фрагментации и площади образованных при этом новых поверхностей дает возможность приблизительной оценки временной константы материала при динамическом разрушении. Так, было показано, что значение инкубационного времени, полученное через пороговую скорость сферической частицы  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , почти не отличается от значения, использованного ранее при моделировании пороговой скорости фрагментации.

## Список литературы

- [1] *Salman A.D., Reynolds G.K., Fu J.S. et al. // Powder Technology. 2004. Vol. 143–144. P. 19–30.*
- [2] *Gorham D.A., Salman A.D., Pitt M.J. // Powder Technology. 2003. Vol. 138. P. 229–238.*
- [3] *Andrews E.A., Kim K.-S. // Mechan. Mater. 1998. Vol. 29. P. 161–180.*
- [4] *Либовиц Г. Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир., 1975. 768 с.*
- [5] *Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.*
- [6] *Bratov V.A., Morozov N.F., Petrov Yu.V. Dynamic Strength of Continuum. SPb.: Univ. Press, 2009. 223 p.*
- [7] *Груздков А.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В. // ФТТ. 2003. Т. 25. № 5. С. 843–846.*
- [8] *Andrews E.A., Kim K.-S. // Mechan. Mater. 1999. Vol. 31. P. 689–703.*
- [9] *Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955. 492 с.*
- [10] *Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с. (Johnson K.L. Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1987. 468 p.)*
- [11] *Волков Г.А., Горбушин Н.А., Петров Ю.В. // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2012. № 5. С. 6–13.*
- [12] *Volkov G.A., Bratov V.A., Gruzdkov A.A., Babitsky V.I., Petrov Yu.V., Silberschmidt V.V. // Shock and Vibration. 2011. Vol. 18. P. 333–341.*
- [13] *Петров Ю.В., Ситникова Е.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 71–74.*
- [14] *Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: СПбГУ, 1997. 132 с.*