

03

О влиянии диффузии носителей заряда на устойчивость заряженной капли жидкости с конечной проводимостью

© Т.К. Артёмова, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 29 мая 2013 г.)

Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных осцилляций сферической капли вязкой несжимаемой жидкости с конечной скоростью переноса носителей электрического заряда с акцентом на роль диффузии. Показано, что особенно заметно влияние диффузии сказывается на реализации неустойчивости быстро затухающих квазипериодических движений при малой электропроводности жидкости. Инкремент неустойчивости капиллярных движений жидкости также растет с увеличением коэффициента диффузии заряда и уменьшается с ростом электропроводности жидкости.

Введение

Осцилляции и устойчивость заряженных капель при учете конечности скорости переноса электрического заряда в жидкости неоднократно исследовались, поскольку сама проблема представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [1–4]. Однако некоторые вопросы, связанные с указанной тематикой, до сих пор исследованы не полностью. Так, например, влияние диффузии в жидкости носителей заряда на закономерности реализации движений жидкости в капле (конечности скорости перераспределения заряда) при осцилляциях капли для жидкости исследованы пока слабо, хотя эта тематика неоднократно становилась объектом внимания исследователей, как для изолированной капли в вакууме [1–4], так и для вязкой проводящей капли в электропроводной вязкой среде [5]. Практически не исследованы роль и степень влияния на устойчивость капли явления диффузии электрического заряда. Влияние степени кривизны поверхности на условие баланса заряда во многих работах записывалось без учета слагаемого, пропорционального средней кривизне поверхности, очевидно, из-за механического переноса этого условия с плоской поверхности на криволинейную. Строгий вывод уравнения баланса заряда на произвольной криволинейной поверхности выполнен в [6]. Само условие баланса электрического заряда на поверхности осциллирующей сферической капли в соответствии с [6] записано в [4]. В связи со сказанным и проведено настоящее рассмотрение.

1. Формулировка задачи

Пусть сферическая капля вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ , коэффициентами кинематической вязкости ν , поверхностного натяжения α , ионной диффузии D , удельной проводимостью σ , диэлектрической проницаемостью ϵ , подвижностью носи-

телей заряда b обладает зарядом Q и помещена в вакуум. Границу раздела сред опишем в сферической системе координат с началом в центре капли в виде расстояния от центра капли как функции углов θ , φ и времени t в виде $r(\theta, \varphi, t) = R + \xi(\theta, \varphi, t)$, где R — радиус невозмущенной капли, а $\xi(\theta, \varphi, t)$ — малое возмущение равновесной сферической поверхности капли, вызванное капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды: $|\xi| \ll R$. Тогда уравнение свободной поверхности капли будет иметь вид

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - \xi(\theta, \varphi, t) = 0. \quad (1)$$

Для упрощения записи и последующих вычислений перейдем к безразмерным переменным, в которых $R = \rho = \alpha = 1$. Оставим для обезразмеренных величин прежние обозначения.

Тогда решаемая система уравнений примет вид [4,6]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_1 + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}_1 = 4\pi\mu, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}_2 = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \epsilon_1 \mathbf{E}_1 = \epsilon \mathbf{E}_1, & \mathbf{D}_2 &= \epsilon_2 \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2, \\ \mathbf{E}_1 &= -\nabla \Phi_1, & \mathbf{E}_2 &= -\nabla \Phi_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где индекс 1 относится к капле, а индекс 2 — к внешней среде, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей, $P_1(\mathbf{r}, t)$ — давление внутри капли при наличии электрического поля, $\mu(\mathbf{r}, t)$ — объемная плотность электрического заряда, \mathbf{E} , \mathbf{D} и Φ — напряженность, индукция и потенциал электрического поля собственного заряда капли.

На свободной поверхности капли (1) должны выполняться граничные условия

$$\frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla, F) = 0, \quad (6)$$

$$(\Pi_{2\tau} - \Pi_{1\tau}) - \nu [(\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{n}, \nabla)) \mathbf{u} + (\mathbf{n}, (\boldsymbol{\tau}, \nabla)) \mathbf{n}] = 0,$$

$$\Pi_\tau = \frac{\epsilon}{4\pi} E_n E_\tau, \quad (7)$$

$$-(P_1 - P_2) + 2\nu(\mathbf{n}, (-\mathbf{n}, \nabla))\mathbf{u} - P_E + P_\alpha = 0,$$

$$P_E \equiv E^2/8\pi, \quad P_\alpha \equiv \nabla \mathbf{n}, \quad (8)$$

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad \Phi_1 = \Phi_2, \quad (9)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\kappa, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} - \sigma(\mathbf{n}, \mathbf{E}_1) + \kappa(\mathbf{n}, \mathbf{u})\nabla \mathbf{n} + \operatorname{div}_\Sigma[\kappa(u_\tau + bE_\tau)\boldsymbol{\tau}] + \operatorname{div}_\Sigma[D\nabla_\Sigma\kappa] = 0, \quad (11)$$

где u_τ проекция поля скоростей и напряженности электрического поля на направление касательной к свободной поверхности капли, E_n , E_τ — нормальная и касательная компоненты напряженности электрического поля, \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к поверхности (1) $r = 1 + \xi(\theta, \varphi, t)$, P_2 — давление внешней среды, P_E и P_α — давления на свободную поверхность капли электрических сил и сил поверхностного натяжения, $\kappa(\theta, \varphi, t)$ — поверхностная плотность заряда на границе раздела сред, $\operatorname{div}_\Sigma \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A} - \mathbf{n}\partial \mathbf{A}/\partial n)_\Sigma$ — оператор поверхностной дивергенции, а $\nabla_\Sigma a = (\nabla a - \mathbf{n}\partial a/\partial n)_\Sigma$ — оператор поверхностного градиента. Электрический потенциал поля собственного заряда капли должен удовлетворять условиям

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_2 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow 0: \quad \Phi_1 \rightarrow \text{const}. \quad (12)$$

Потребуем также, чтобы объем капли при осцилляциях сохранялся, а ее центр масс был неподвижен:

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi, \quad \int_V \mathbf{r}dV = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (2)–(5) с условиями (6)–(13) на поверхности (1) представляет собой математическую формулировку решаемой задачи. При этом учет явления релаксации поверхностного заряда за счет диффузии сказывается только на виде граничного условия (11), а значит, не влияет на общий вид функциональных рядов решений, а только на коэффициенты в их представлении.

2. Равновесная форма

Равновесная форма поверхности капли — форма в отсутствие всякого движения жидкости. При этом скорость тождественно равна нулю и колебания свободной поверхности капли отсутствуют: $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$, $\xi(\theta, \varphi, t) \equiv 0$, а уравнение поверхности имеет вид $F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 = 0$ или просто $r = 1$. Тогда граничные условия (6)–(7) обращаются в тождества, граничное условие (8) превращается в уравнение, определяющее равновесную сферическую форму капли: $P_1^0 - P_2^0 = P_\alpha^0 - P_E^0$ на $r = 1$, где P_2^0 , P_α^0 и P_E^0 — значения давлений на равновесную поверхность капли: внешней среды P_2 , сил поверхностного натяжения P_α и электрических сил P_E соответственно, а значение P_1 для равновесной сферической поверхности капли находится из системы уравнений (2), (3) и является константой $P_1 = \text{const} \equiv P_1^0$.

3. Линеаризация задачи

Решение задачи о капиллярных колебаниях капли проведем в линейном по полю скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и возмущению поверхности $\xi(\theta, \varphi, t)$ приближении. Отнесем граничные условия к невозмущенной поверхности капли $r = 1$. Уравнение (3) при этом сохранит свой вид, а условия (6) и (13) примут вид

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi(\theta, \varphi, t)}{\partial t} = u_r, \quad (14)$$

$$\int_\Omega \xi(\theta, \varphi, t)d\Omega = 0, \quad \int_\Omega \mathbf{e}_r \xi(\theta, \varphi, t)d\Omega = 0, \quad (15)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Разложим давления P_1 , P_E и P_α в ряд по малым величинам u , ξ , ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости

$$P_1 = P_1^0 + p_1 + \dots, \quad P_E = P_E^0 + p_E + \dots,$$

$$P_\alpha = P_\alpha^0 + p_\alpha + \dots,$$

где обозначим добавки первого порядка малости к равновесным давлениям P_1 , P_α^0 и P_E^0 как p_1 , p_E и p_α . В линейном приближении уравнение (2) запишется

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (16)$$

а условия на касательные и нормальные компоненты тензора напряжений (7) и (8) примут вид

$$r = 1: \quad (\Pi_{2\tau} - \Pi_{1\tau}) - \nu[\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{n}, \nabla)]\mathbf{u} + (\mathbf{n}, (\boldsymbol{\tau}, \nabla)\mathbf{u}) = 0, \quad (17)$$

$$r = 1: \quad -p_1 + 2\nu(\mathbf{n}, (\mathbf{n}, \nabla))\mathbf{u} - p_E + p_\alpha = 0, \quad (18)$$

где $\Pi_{2\tau}$ и $\Pi_{1\tau}$ определяются через решения краевой задачи для потенциалов (4), (5), (9), (10).

Считая, что объемная плотность заряда в капле $\mu = 0$, а перераспределение заряда при волновом искажении формы капли происходит за счет поверхностных токов, из (4), (5) получим $\Delta\Phi_1 = 0$ и $\Delta\Phi_2 = 0$. Представим потенциалы Φ_i , $i = 1, 2$, в виде разложений $\Phi_i = \Phi_i^0 + \delta\Phi_i$, где Φ_i^0 — потенциалы при равновесном состоянии системы, $\delta\Phi_i$ — добавки, вызванные возмущением ξ равновесной формы поверхности капли, линейные по нему. Тогда с учетом (9) и (12) получим отдельные краевые задачи на Φ_i^0 и $\delta\Phi_i$, $i = 1, 2$:

$$\Delta\Phi_1^0 = 0, \quad r = 0: \quad \Phi_1^0 = \text{const},$$

$$\Delta\Phi_2^0 = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \Phi_2^0 \rightarrow 0,$$

$$r = 1: \quad \Phi_1^0 = \Phi_2^0, \quad (19)$$

$$\Delta\delta\Phi_1 = 0, \quad r = 0: \quad \delta\Phi_1 = 0,$$

$$\Delta\delta\Phi_2 = 0, \quad r \rightarrow \infty \quad \delta\Phi_2 \rightarrow 0,$$

$$r = 1: \quad \delta\Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial r} \xi = \delta\Phi_2 + \frac{\partial \Phi_2^0}{\partial r} \xi. \quad (20)$$

Перепишем (11) с учетом того, что $(\mathbf{n}, \mathbf{u})\nabla\mathbf{n} \approx 2u_r$, где u_r — проекция поля скоростей на направление \mathbf{e}_r :

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t} - \sigma(\mathbf{n}, \mathbf{E}_1) + 2\kappa u_r + \operatorname{div}_\Sigma[\kappa(u_r + bE_r)\boldsymbol{\tau}] + \operatorname{div}_\Sigma[D\nabla\kappa] = 0. \quad (21)$$

Объединяя (10) и (5), получим последнее граничное условие:

$$\kappa = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n}, (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) = \frac{1}{4\pi} \left(\varepsilon \frac{\partial(\Phi_1^0 + \delta\Phi_1)}{\partial n} - \frac{\partial(\Phi_2^0 + \delta\Phi_2)}{\partial n} \right). \quad (22)$$

4. Скаляризация задачи

Для решения векторной краевой задачи (3), (14)–(18) воспользуемся методом скаляризации [7,8]. При этом поле скоростей жидкости в капле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, имеющее первый порядок малости по $|\xi|$, представляется в виде суммы трех ортогональных векторных полей

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1\Psi_1(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3(\mathbf{r}, t), \quad (23)$$

где $\Psi_k(\mathbf{k}, t)$, $k = 1, 2, 3$ — скалярные функции, определяемые видом векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$; $\hat{\mathbf{N}}_k$, $k = 1, 2, 3$ — векторные дифференциальные ортогональные операторы: оператор $\hat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть течения, $\hat{\mathbf{N}}_2$ — вихревую тороидальную по отношению к оси OZ , $\hat{\mathbf{N}}_3$ — вихревую полоидальную компоненту течения жидкости в капле. Удобный вид операторов $\hat{\mathbf{N}}_k$ и эрмитово сопряженных им операторов $\hat{\mathbf{N}}_k^+$ (верхний индекс „плюс“ у оператора обозначает эрмитовое сопряжение) в сферической системе координат следующий:

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \hat{\mathbf{N}}_1 \times \mathbf{r} \equiv \nabla \times \mathbf{r},$$

$$\hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \hat{\mathbf{N}}_1 \times \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}),$$

$$\hat{\mathbf{N}}_1^+ \equiv -\nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2^+ \equiv \mathbf{r} \times \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_3^+ \equiv (\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla.$$

Операторы $\hat{\mathbf{N}}_k$ и $\hat{\mathbf{N}}_k^+$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$(\hat{\mathbf{N}}_j, \hat{\mathbf{N}}_k) = 0 \quad \text{при } k \neq j$$

и коммутативности с самосопряженным ($\Delta^+ \equiv \Delta$) оператором Лапласа Δ :

$$\Delta\hat{\mathbf{N}}_k = \hat{\mathbf{N}}_k\Delta, \quad \Delta^+\hat{\mathbf{N}}_k^+ = \hat{\mathbf{N}}_k^+\Delta^+,$$

$$\Delta\hat{\mathbf{N}}_k^+ = \hat{\mathbf{N}}_k^+\Delta, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для скаляризации векторного уравнения (16) подставим в него разложение (23) и используем явный вид оператора $\hat{\mathbf{N}}_1$ и свойства коммутативности:

$$\sum_{k=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_k \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta \right) \Psi_k + \delta_{k1}p_1 \right] = 0,$$

где δ_{k1} — символ Кронекера. Умножая это выражение слева последовательно на операторы $\hat{\mathbf{N}}_j^+$, $j = 1, 2, 3$, и используя условия ортогональности, получим систему трех независимых уравнений

$$(\hat{\mathbf{N}}_k^+, \hat{\mathbf{N}}_k) \left\{ \delta_{k1}p_1 + \frac{\partial\Psi_k}{\partial t} - \nu\Delta\Psi_k \right\} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Так как операторы $\hat{\mathbf{N}}_k$ и $\hat{\mathbf{N}}_k^+$ ортогональны и коммутируют с самосопряженным ($\Delta^+ \equiv \Delta$) оператором Лапласа Δ , то условие коммутативности будет справедливым и для операторов $(\hat{\mathbf{N}}_k^+, \hat{\mathbf{N}}_k)$ и Δ , а следовательно, эти операторы обладают общей системой собственных функций $\{\varphi_j\}$ с собственными значениями n_j^k и λ_j , отвечающими этим функциями соответственно:

$$(\hat{\mathbf{N}}_k^+, \hat{\mathbf{N}}_k)\varphi_j = n_j^k\varphi_j, \quad \Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j.$$

Так как неизвестные функции $p_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi_k(\mathbf{r}, t)$ в уравнениях (24) определены в той же области пространства, что и $\{\varphi_j\}$, то их можно разложить в ряд по $\{\varphi_j\}$:

$$p_1 = \sum_j A_j\varphi_j(\mathbf{r}, t), \quad \Psi_k(\mathbf{r}, t) = \sum_j B_j^k\varphi_j(\mathbf{r}, t),$$

где A_j и B_j^k — коэффициенты разложения, а суммирование ведется по всему полному набору собственных функций $\{\varphi_j\}$. Подставляя эти разложения в (24), после преобразований получим

$$\sum_j \left\{ A_j\delta_{k1} + B_j^k \frac{\partial}{\partial t} - \nu B_j^k\lambda_j \right\} n_j^k\varphi_j = 0.$$

Так как система собственных функций $\{\varphi_j\}$ не нулевая, то, исключая тривиальный случай $n_j^k = 0$, не соответствующий физическому смыслу задачи, получим

$$n_j^k \neq 0, \quad A_j\delta_{k1} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\lambda_j \right) B_j^k = 0 \quad (\forall k, j).$$

Умножая каждое из этих уравнений на соответствующую собственную функцию φ_j и суммируя по всем j , получим систему трех скалярных уравнений

$$\delta_{k1}p_1 + \frac{\partial}{\partial t} \Psi_k(\mathbf{r}, t) - \nu\Delta\Psi_k(\mathbf{r}, t) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Исключим из нее давление p_1 , выразив его из первого уравнения ($k = 1$) и учитывая, что при подстановке в (3) разложения (23) с учетом свойств оператора $\hat{\mathbf{N}}_1$, будем иметь $(\nabla \cdot \nabla)\Psi_1 \equiv \Delta\Psi_1 = 0$:

$$p_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(\mathbf{r}, t). \quad (25)$$

Тогда система уравнений окончательно примет вид:

$$\Delta\Psi_k(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\nu}(1 - \delta_{k1}) \frac{\partial\Psi_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (26)$$

Для скаляризации граничных условий (14), (17) и (18) воспользуемся выражениями для компонент вектора $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в сферической системе координат через скалярные функции $\Psi_k(\mathbf{r}, t)$, которые выписываются с помощью разложения (23) и явного вида операторов $\tilde{\mathbf{N}}_k$.

После ряда преобразований кинематическое граничное условие (14) примет вид

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi(\theta, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \Delta_\Omega \Psi_3, \quad (27)$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах. Соотношения (17) распадается на два условия:

$$r = 1, \quad \boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{e}_\theta:$$

$$\left(\Pi_{2\theta} - \Pi_{1\theta} \right) - \nu \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_\Omega) \Psi_3 \right\} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \frac{\Psi_2}{r} \right\} \right] = 0, \quad (28)$$

$$r = 1, \quad \boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{e}_\varphi:$$

$$\left(\Pi_{2\varphi} - \Pi_{1\varphi} \right) - \nu \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_1}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_\Omega) \Psi_3 \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \frac{\Psi_2}{r} \right\} \right] = 0, \quad (29)$$

Динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений (18) запишется в виде [9]

$$r = 1: \quad -p_1 + 2\nu \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} - \Delta_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi_3}{r} \right) \right) \right] - p_E + p_\alpha = 0, \quad (30)$$

где $p_\alpha = -\alpha(2 + \Delta_\Omega)\xi/r^2$.

Представляя в векторном условии (15) радиус-вектор \mathbf{e}_r в декартовой системе координат и выражая его проекции на оси через шаровые функции $Y_l^m(\theta, \varphi)$, где индекс $m = \{-1, 0, 1\}$, и записывая в аналогичном же виде скалярное условие (15), получим:

$$\int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) Y_l^m(\theta, \varphi) d\Omega = 0, \\ \int_{\Omega} \xi(\theta, \varphi, t) Y_0^0(\theta, \varphi) d\Omega = 0. \quad (31)$$

5. Решение системы скалярных краевых задач

Решение краевой задачи (19) для равновесных потенциалов имеет вид

$$\Phi_1^0 = Q, \quad \Phi_2^0 = Q/r. \quad (32)$$

Решение сформулированных скалярных задач для функций $\Psi_k(\mathbf{r}, t)$ и для добавок $\delta\Phi_1$ и $\delta\Phi_2$ проведем методом возмущений. Равновесное состояние капли отвечает равновесному решению систем. Зададим некоторое малое начальное возмущение $\xi(\theta, \varphi, t = 0) \equiv \xi_0(\theta, \varphi)$. Решение тоже получит возмущение, которое можно представить в виде разложения по малым величинам u, ξ, ξ , ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости. Положим, что в каждой точке капли динамика колебательных процессов во времени описывается экспоненциальным законом с некоторым комплексным показателем S , имеющим смысл комплексной частоты:

$$\Psi_i(\mathbf{r}, t) \approx \Psi_i^0(\mathbf{r}) \exp(St),$$

$$\xi(\theta, \varphi, t) \approx \xi_0(\theta, \varphi) \exp(St). \quad (33)$$

Тогда система уравнений (26) примет вид

$$\Delta \Psi_i^0(\mathbf{r}) - \frac{1}{v} (1 - \delta_{i1}) S \Psi_i^0(\mathbf{r}) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решениями системы являются [9]

$$\Psi_1^0(\mathbf{r}) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm}^1 r^l Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$\Psi_k^0(r) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm}^k i_l \left(\sqrt{\frac{S}{v}} r \right) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad k = 2, 3, \quad (34)$$

где $i_l(x)$ — модифицированные сферические функции Бесселя первого рода порядка l [10], а $C_{lm}^k, k = 1, 2, 3$ — неизвестные коэффициенты.

По сферическим функциям можно разложить и функцию $\xi_0(\theta, \varphi)$:

$$\xi_0(\theta, \varphi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Z_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (35)$$

Условия (31) при подстановке в них (35) дают ограничения на диапазон изменения индекса l в (34), (35): $l \geq 2$.

Естественно предполагать, что добавки к потенциалам также будут небольшими, и в каждой точке капли и внешнего пространства будут иметь ту же экспоненциальную зависимость от времени. Тогда решения краевой задачи (20) для добавок к потенциалам $\delta\Phi_1$ и $\delta\Phi_2$ можно искать в виде

$$\delta\Phi_1 = \sum_{l,m} F_{lm}^1 r^l Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St),$$

$$\delta\Phi_2 = \sum_{l,m} F_{lm}^2 r^{-(l+1)} Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St). \quad (36)$$

Теперь, чтобы решить задачу определения осцилляций капли, требуется определить коэффициенты разложений (34)–(36) и оценить спектр возможных значений комплексной частоты S .

Граничное условие в (20) при подстановке в него (32) и (36) позволяет получить первое уравнение, связывающее неизвестные коэффициенты F_{lm}^1, F_{lm}^2 и Z_{lm} :

$$F_{lm}^1 = F_{lm}^2 - QZ_{lm}.$$

Условие (21) в первом порядке малости по u и ξ с учетом (14), (22), (33) и (34) можно представить в виде

$$r = 1 : \frac{S}{4\pi} \left(\varepsilon \frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial r} - \frac{\partial(\delta\Phi_2)}{r} - 2 \frac{Q}{r^3} \xi \right) + \sigma \frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial r} + 2 \frac{Q}{4\pi} S \xi + \frac{Q}{4\pi} \Delta\Omega \left(\Psi_1 + \frac{\partial}{\partial r}(r\Psi_3) - b\delta\Phi_1 \right) + \frac{D}{4\pi} \Delta\Omega \left[\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon\delta\Phi_1 - \delta\Phi_2) - 2 \frac{Q}{r^3} \xi \right] = 0.$$

Подставив сюда (34)–(36), получим с учетом (33) второе условие для коэффициентов F_{lm}^1, F_{lm}^2 и Z_{lm} :

$$[4\pi\sigma + (l+1)Qb + S\varepsilon - D(l+1)(2+l\varepsilon)]lF_{lm}^1 + (l+1)[S + lD(1-l)]F_{lm}^2 - Ql(l+1)[C_{lm}^1 + G_l(S, \nu)C_{lm}^3]Z_{lm} = 0,$$

где введены обозначения

$$G_l(S, \nu) \equiv qi_{l+1}(q) + (l+1)i_l(q), \quad q \equiv \sqrt{S/\nu}.$$

Исключим коэффициенты F_{lm}^1 и F_{lm}^2 из рассмотрения, выразив их в явном виде через Z_{lm}, C_{lm}^1 и C_{lm}^3 :

$$F_{lm}^1 = -D_l Q \left[(S + lD(1-l))Z_{lm} - l(C_{lm}^1 + G_l(S, \nu)C_{lm}^3) \right],$$

$$F_{lm}^2 = Q \left[[1 - D_l(S + lD(1-l))]Z_{lm} + lD_l(C_{lm}^1 + G_l(S, \nu)C_{lm}^3) \right], \quad (37)$$

$$D_l(\sigma, \varepsilon, S) \equiv \frac{(l+1)}{l(l+1)[Qb + S\varepsilon - D(l\varepsilon + l + 1)] + 4\pi\sigma l + (l+1)S}. \quad (38)$$

Используя полученные решения для потенциалов, выпишем нормальные и касательные компоненты вектора напряженности электрического поля, отнесенные к невозмущенной поверхности капли:

$$r = 1 : \quad E_{1n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) \approx Q \sum_{l,m} l D_l(\sigma, \varepsilon, S) \times [Z_{lm}(S + lD(1-l)) - lC_{lm}^1 - lG(S, \nu)C_{lm}^3] \times Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St),$$

$$E_{2n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2) \approx Q + Q \sum_{l,m} [l - 1 - (l+1)D_l(S + lD(1-l))]Z_{lm} + l(l+1)D_l(\sigma, \varepsilon, S)[C_{lm}^1 + G(S, \nu)C_{lm}^3]Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St),$$

$$E_{1\theta} = (\boldsymbol{\tau}_\theta \cdot \mathbf{E}_1) \approx Q \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) [Z_{lm}(S + lD(1-l)) - lC_{lm}^1 - lG(S, \nu)C_{lm}^3] \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \exp(St),$$

$$E_{2\theta} = (\boldsymbol{\tau}_\theta \cdot \mathbf{E}_2) \approx Q \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) [Z_{lm}(S + lD(1-l)) - lC_{lm}^1 - lG(S, \nu)C_{lm}^3] \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \exp(St),$$

$$E_{1\varphi} = (\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot \mathbf{E}_1) \approx Q \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) [Z_{lm}(S + lD(1-l)) - lC_{lm}^1 - lG(S, \nu)C_{lm}^3] \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \exp(St),$$

$$E_{2\varphi} = (\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot \mathbf{E}_2) \approx Q \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) [Z_{lm}(S + lD(1-l)) - lC_{lm}^1 - lG(S, \nu)C_{lm}^3] \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \exp(St).$$

Давление электрического поля на возмущенную поверхность капли имеет вид [8]

$$P_E = -\mu\Phi_1 + \frac{1}{8\pi} [E_{2n}^2 - \varepsilon E_{1n}^2] + (\varepsilon - 1) \frac{E_{2\tau}^2}{8\pi}.$$

Подставляя сюда компоненты напряженности электрического поля и учитывая, что $\mu = 0$, получим при $r = 1$ выражение для давления электрического поля в нулевом $P_E^0 = Q^2/(8\pi)$ и в первом порядках малости [1–4,8]

$$P_E \approx \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{l,m} \left[[l - 1 - (l+1)D_l(\sigma, \varepsilon, S) \times (S + lD(1-l))]Z_{lm} + l(l+1)D_l(\sigma, \varepsilon, S) \times [C_{lm}^1 + G(S, \nu)C_{lm}^3] \right] Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(St). \quad (39)$$

Вычисляя далее касательные компоненты тензора напряжений $\Pi_\tau = (\varepsilon/4\pi)E_n E_\tau$, получим, что $\Pi_{1\theta}$ и $\Pi_{1\varphi}$ являются величинами второго порядка малости, и значит, можно принять $\Pi_{1\theta} \approx \Pi_{1\varphi} \approx 0$. Тогда разности $\Pi_{2\theta} - \Pi_{1\theta}$ и $\Pi_{2\varphi} - \Pi_{1\varphi}$ в граничных условиях (28) и (29) в первом порядке малости принимают вид

$$r = 1 : \quad \Pi_{2\theta} - \Pi_{1\theta} \approx \Pi_{2\theta} \approx \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \times [Z_{lm}(S + lD(1-l)) - lC_{lm}^1 - lG(S, \nu)C_{lm}^3] \times \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \exp(St),$$

$$\begin{aligned} \Pi_{2\varphi} - \Pi_{1\varphi} &\approx \Pi_{2\varphi} \approx \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) \\ &\times [Z_{lm}(S + lD(1-l)) - lC_{lm}^1 - lG(S, \nu)C_{lm}^3] \\ &\times \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \exp(S\tau). \end{aligned}$$

Сформируем теперь с учетом разложений (34) из двух скалярных граничных условий (28) и (29) одно векторное. Подействуем на него оператором \hat{N}_1 . Учтем свойство ортогональности операторов \hat{N}_1 и \hat{N}_2^+ и свойство $\hat{N}_2\hat{N}_2^+ = \Delta_\Omega$. Тогда $r = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega \left\{ \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{l,m} D_l(\sigma, \varepsilon, S) [Z_{lm}(S + lD(1-l)) \right. \\ \left. - lC_{lm}^1 - lG_l(S, \nu)C_{lm}^3] Y_l^m(\theta, \varphi) \right. \\ \left. - \nu \left[2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Psi^0}{r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi_3^0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} (2 + \Delta_\Omega) \Psi_3^0 \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (34) получим

$$r = 1: \quad \sum_{l,m} l(l+1)C_{lm}^2 Y_l^m(\theta, \varphi) \left[\frac{\partial i_l(qr)}{\partial r} - i_l(qr) \right] = 0. \quad (40)$$

Аналогично действуя на векторное уравнение оператором \hat{N}_2^+ , получим

$$r = 1: \quad \Delta_\Omega \left\{ \frac{\partial \Psi_2^0}{\partial r} - \frac{\Psi_2^0}{r} \right\} = 0,$$

тогда с учетом свойств модифицированных сферических функций Бесселя [10]

$$\begin{aligned} 4WD_l(\sigma, \varepsilon, S)[S + lD(1-l)]Z_{lm} \\ - C_{lm}^1[4WlD_l(\sigma, \varepsilon, S) + 2\nu(l-1)] \\ + \left\{ i_l(q)[\nu(2-2l^2-q^2) - 4Wl(l+1)D_l(\sigma, \varepsilon, S)] \right. \\ \left. + i_{l+1}(q)2q(\nu - 2WlD_l(\sigma, \varepsilon, S)) \right\} C_{lm}^3 = 0, \quad (41) \end{aligned}$$

где $W \equiv Q^2/16\pi$. Критическое для реализации неустойчивости основной моды, а следовательно, и всей капли, значение W равно 1 [8].

Преобразуем динамическое граничное условие на нормальные компоненты тензора напряжений (30). Давление p_1 в первом порядке малости (25) с учетом разложения (34) для функции $\Psi_1(\mathbf{r}, r)$ примет вид

$$r = 1: \quad p_1 = -S\Psi_l^0(\mathbf{r}) \approx -S \sum_{l,m} C_{lm}^1 Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Давления p_α в первом порядке малости с использованием (34) и (35) примет вид

$$r = 1: \quad p_\alpha \approx \sum_{l,m} [l(l+1) - 2]Z_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \exp(S\tau).$$

Подставляя в (30) полученные выражения для p_1 и p_α , p_E из (39) и учитывая (34), окончательно получим

$$\begin{aligned} [S + 2\nu l(l-1) - 4Wl(l+1)D_l(\sigma, \varepsilon, S)]C_{lm}^1 \\ + l(l+1) \left[2\nu(qf_1(q) + l-1) \right. \\ \left. - 4WD_l(\sigma, \varepsilon, S)(qf_l(q) + l+1) \right] i_l(q)C_{lm}^3 \\ + \left[l(l+1) - 2 + 4W[(l+1)D_l(\sigma, \varepsilon, S)] \right. \\ \left. \times (S + lD(1-l)) - (l-1) \right] Z_{lm} = 0, \quad (42) \end{aligned}$$

где обозначено $f_1(q) \equiv i_{l+1}(q)/i_l(q)$.

Кинематическое граничное условие (27) при подстановке разложений (34) и (35) дает

$$lC_{lm}^1 + i_l(q)l(l+1)C_{lm}^3 - SZ_{lm} = 0. \quad (43)$$

Так как сферические функции являются ортогональными, то вся сумма (40) обращается в ноль только при условии обращения в ноль каждого из коэффициентов при $Y_l^m(\theta, \varphi)$:

$$r = 1: \quad C_{lm}^2 \left[\frac{\partial i_l(qr)}{\partial r} - i_l(qr) \right] = 0,$$

т.е. либо все коэффициенты C_{lm}^2 одновременно равны нулю, что дает тривиальное решение для вихревой тороидальной компоненты (ее отсутствие при колебаниях капли), либо диапазон возможных значений параметра S для $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ определяется уравнением [7]

$$qi_{l+1}(q) + (l-1)i_l(q) = 0, \quad q \equiv \sqrt{S/\nu}. \quad (44)$$

Три остальных коэффициента Z_{lm} , C_{lm}^1 , C_{lm}^3 связаны между собой линейными уравнениями (41)–(43). Таким образом, решение системы этих трех уравнений вместе с разложениями (34) и (35) и представлением (33) являются решениями поставленной задачи.

6. Дисперсионное уравнение. Исследование устойчивости равновесного состояния

Задача в силу независимости вихревого тороидального решения от полоидальных и гармонических дает два дисперсионных уравнения и два множества декрементов затухания. Первое множество определяет быстрые затухания вихревых тороидальных колебаний [7] с помощью (44). Второе множество является единым множеством для гармонических и вихревых полоидальных движений, определяется тремя уравнениями (41)–(43), а соответствующее ему дисперсионное уравнение можно получить из условия совместности этих трех уравнений, т.е. условия обращения в ноль определителя системы

$$lC_{lm}^1 + i_l(q)l(l+1)C_{lm}^3 - SZ_{lm} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & [S + 2\nu l(l - 1) - 4Wl(l + 1)D_l(\sigma, \varepsilon, S)]C_{lm}^1 \\
 & + l(l + 1)[2\nu(qf_l(q) + l - 1) \\
 & - 4WD_l(\sigma, \varepsilon, S)(qf_l(q) + l + 1)]i_l(q)C_{lm}^3 \\
 & + [l(l + 1) - 2 + 4W[(l + 1)D_l(\sigma, \varepsilon, S) \\
 & \times (S + lD(1 - l)) - (l - 1)]]Z_{lm} = 0, \\
 & -C_{lm}^1[4WlD_l(\sigma, \varepsilon, S) + 2\nu(l - 1)] + i_l(q)\{(l + 1) \\
 & \times [2\nu(1 - l) - 4Wl(l + 1)D_l(\sigma, \varepsilon, S)] - S \\
 & + f_l(q)2q(\nu - 2WlD_l(\sigma, \varepsilon, S))\}C_{lm}^3 \\
 & + 4WD_l(\sigma, \varepsilon, S)[S + lD(l - 1)]Z_{lm} = 0.
 \end{aligned}$$

Данная система отличается от случая неучета явления диффузии слагаемыми в множителях при коэффициенте Z_{lm} , а также новым значением $D_l(\sigma, \varepsilon, S)$ (выражение (38)). Приравнявая нулю ее определитель, после преобразований получим дисперсионное уравнение для гармонических и вихревых полоидальных движений

$$\begin{aligned}
 & -D \left[8W\nu l^2(l - 1)^2(l + 1)D_l(\sigma, \varepsilon, S)\sqrt{\frac{S}{\nu}} f_1 \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right] \\
 & - 2l(l - 1)(l - 4W + 2)\sqrt{\frac{S}{\nu}} f_l \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \\
 & \times (\nu - 2WlD_l(\sigma, \varepsilon, S)) + Sl(l - 1) \left[4\nu\sqrt{\frac{S}{\nu}} f_l \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) \right. \\
 & \left. \times [2W(2l + 1)D_l(\sigma, \varepsilon, S) - \nu(l + 2)] + l - 4W + 2 \right] \\
 & + 2S^2 \left[\sqrt{\frac{S}{\nu}} f_l \left(\sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) (2WlD_l(\sigma, \varepsilon, S) - \nu) \right. \\
 & \left. + \nu(2l^2 - l - 1) \right] + S^3 = 0,
 \end{aligned}$$

$$D_l(\sigma, \varepsilon, S) \equiv$$

$$\frac{(l + 1)}{l(l + 1)[(\pi W)^{1/2}b + S\varepsilon - D(l\varepsilon + l + 1)] + 4\pi\sigma l + (l + 1)S}. \quad (45)$$

При $\nu = 0$, $\sigma \rightarrow \infty$ и $D \rightarrow 0$ (45) сводится к дисперсионному уравнению для заряженной капли идеально проводящей невязкой жидкости в вакууме, полученному Рэлеем [8]. В этом случае $S = \pm i\sqrt{l(l - 1)}[(l + 2) - 4W]$. Если $4W < (l + 2)$, то S будет определять собственные частоты осцилляций поверхности заряженной капли идеальной жидкости. При $4W > (l + 2)$ величина S характеризует инкремент экспоненциального нарастания либо

декремент экспоненциального затухания решений со временем. Значение $4W = (l + 2)$ разделяет устойчивые и неустойчивые решения, т.е. определяет критическую величину имеющегося на капле заряда. Для того чтобы капля стала неустойчивой, достаточно, чтобы условие неустойчивости выполнялось для самой неустойчивой из мод: для второй. Полагая $l = 2$ и переходя в определении для W к размерным величинам, для случая идеально проводящей жидкости можно найти величину заряда капли, критического для начала реализации ее неустойчивости по отношению к давлению электрического поля: $Q \equiv 4\sqrt{\pi\alpha R^3}$.

Численные расчеты для основной моды $l = 2$ по полному дисперсионному уравнению (45) приводят к зависимостям вещественной и мнимой компонент комплексной частоты S от безразмерной удельной электропроводности жидкости, проведенным для случая безразмерных $\nu = 0.05$, $b = 0.02$ и $\varepsilon = 80$ на рис. 1, $a-f$ и рис. 2, $a-b$.

Из рисунков видно, что в целом с ростом величины коэффициента диффузии проявляется тенденция к увеличению неустойчивости заряженной капли. Так, на рис. 1, a при $D = 0.1$ и $W = 0.9$ (напомним, что критическое для реализации капиллярных осцилляций капли значение зарядового параметра $W = 1$) в области малых электропроводностей уже проявляется неустойчивость диффузионных движений (ветвь 4 на рис. 1, a). Причем происходит это на фоне устойчивых капиллярных осцилляций капли (ветвь 1 на том же рисунке). При этом безразмерная частота осцилляций примерно равна единице, а соответствующий инкремент по порядку величины в 10 раз меньше. Чего нельзя сказать о диффузионных движениях 2, 3 и 4, которые затухают с декрементами, большими соответствующих частот. Далее мы будем приводить на графиках декременты движений 2 и 3, если они умещаются на поле координат, декременты остальных квазипериодических движений лежат гораздо ниже по оси $\text{Re}S$. Эти движения могут быть идентифицированы в качестве вихревых движений, составляющих пограничный слой, связанный со свободной поверхностью жидкости, как это было отмечено в [11] и для капли проделано в [12–14].

При дальнейшем увеличении параметра W частота капиллярных осцилляций снижается и становится меньше частот квазипериодических диффузионных движений. С неустойчивым движением 4 ничего не происходит.

При превышении параметром W критического значения, равного единице, частоты капиллярных осцилляций исчезают, а появляется неустойчивое апериодическое движение, обозначенное цифрой 1 на рис. 1, b . Квазипериодическое диффузионное движение 2 смещается влево, к оси ординат, и увеличивается по величине (т.е. увеличивается его $\text{Im}S$). Отметим, что декремент затухания квазипериодического движения 3 не приводится, так как не помещается на поле графика рис. 1, b .

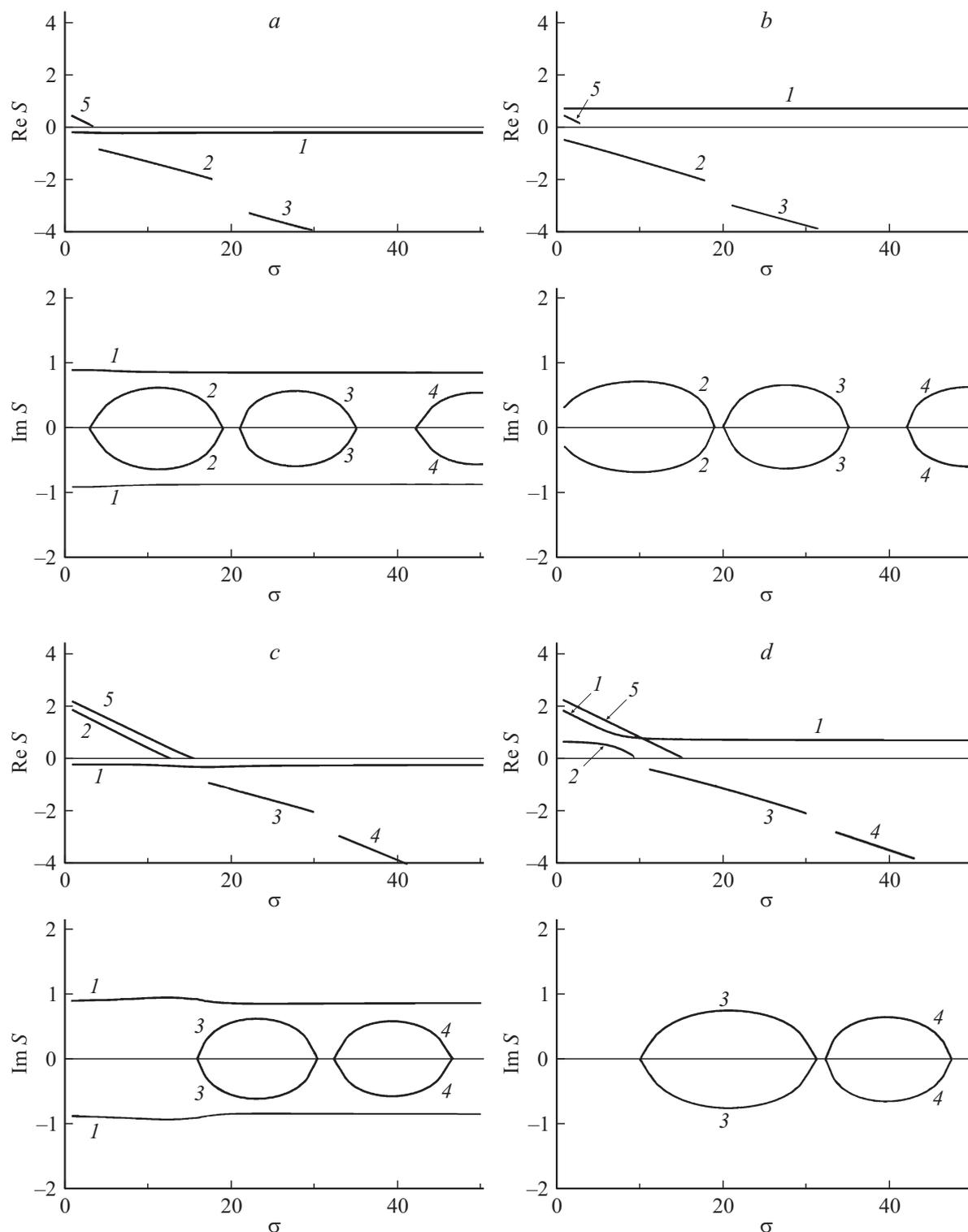


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты от безразмерной проводимости σ , рассчитанные при $\varepsilon = 80$, $b = 0.02$, $\nu = 0.05$, $l = 2$ и $W = 0.9$, $D = 0.1$ (a); $W = 1.1$, $D = 0.1$ (b); $W = 0.9$, $D = 0.4$ (c); $W = 1.1$, $D = 0.4$ (d); $W = 0.9$, $D = 0.8$ (e); $W = 1.1$, $D = 0.8$ (f).

Увеличение безразмерного коэффициента диффузии при неизменном значении параметра $W = 0.9$ приводит к тому, что квазипериодическое диффузионное движение 2 становится неустойчивым и смещается

вправо, как это видно из рис. 1, e, c. При этом декремент квазипериодического движения 3 уменьшается, а частоты этого движения смещаются по оси σ вправо.

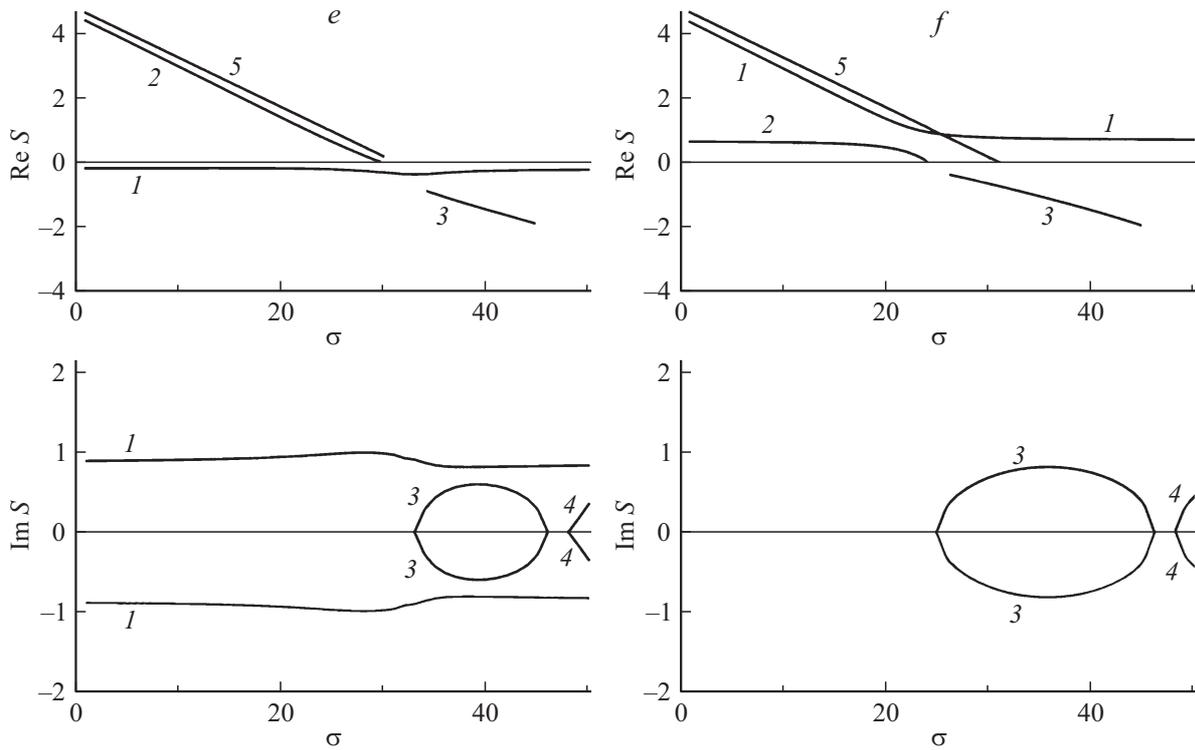


Рис. 1 (продолжение).

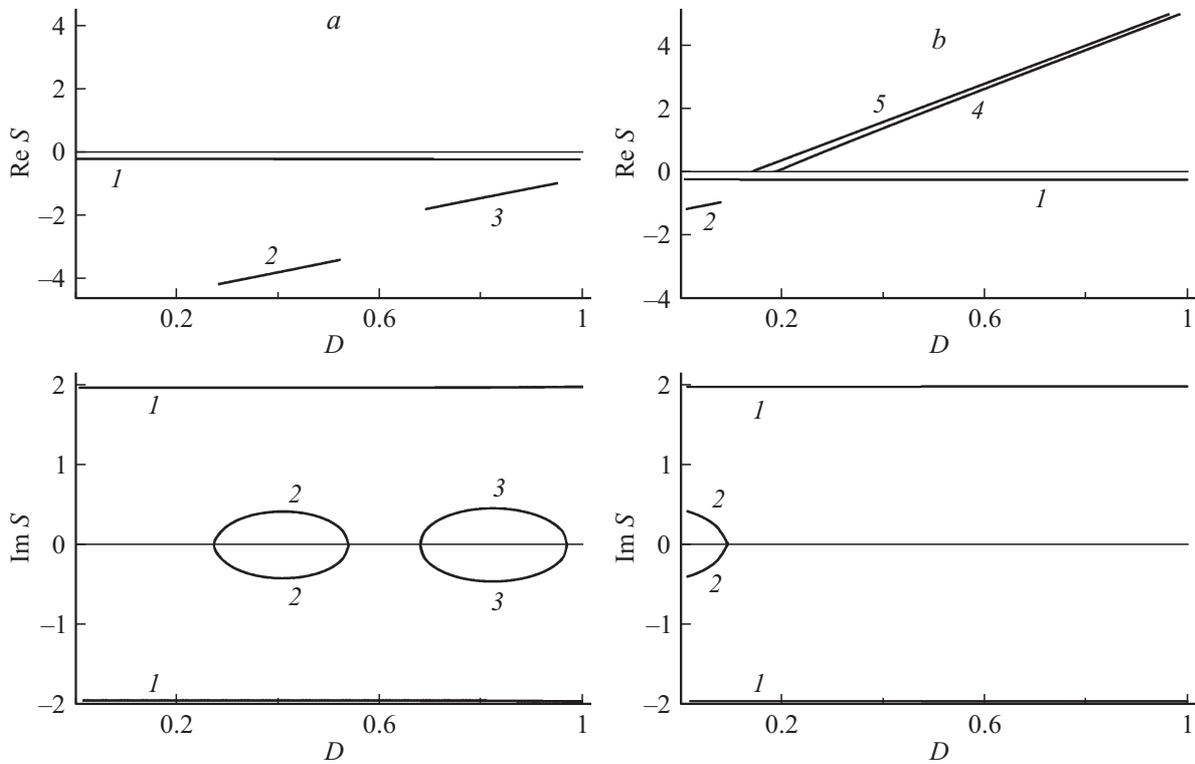


Рис. 2. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты от безразмерного коэффициента диффузии, рассчитанные при $\epsilon = 80$, $b = 0.02$, $\nu = 0.05$, $l = 2$, $W = 0.5$ и безразмерной электропроводности $\sigma = 40$ (a) и $\sigma = 5$ (b).

При закритическом значении зарядового параметра, $W > 1$, все вышеупомянутые тенденции сохраняются, но инкремент апериодического капиллярного движения при малых значениях σ увеличивается тем больше, чем больше величина коэффициента диффузии.

Влияние проводимости на обсуждаемое явление иллюстрирует рис. 2, *a, b*, где рис. 2, *a* и *b* построены при значениях электропроводности, различающихся на порядок. Видно, что с ухудшением проводимости квазипериодические движения жидкости становятся более неустойчивыми (в терминах приповерхностного пограничного слоя следует ожидать его увеличения).

Заключение

Выведено корректное дисперсионное уравнение для течений жидкости в заряженной капле вязкой несжимаемой жидкости с конечной электропроводностью переноса заряда с учетом явления диффузии носителей заряда. Показано, что неустойчивость диффузионных квазипериодических движений начинается при меньших значениях зарядового параметра, чем неустойчивость капиллярных осцилляций. Наиболее отчетливо это заметно при малых электропроводностях жидкости.

Работа выполнена в рамках тематического плана ЯрГУ им П.Г. Демидова.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 107–118.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 19–24.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 67–72.
- [4] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Крючков О.С. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 6. С. 13–21.
- [5] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 10. С. 34–42.
- [6] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 22–28.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд-во. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 180 с.
- [8] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [10] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [11] Longuet-Higgins M.S. // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
- [12] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Жарова И.Г. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 5. С. 54–63.
- [13] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Паранин А.Р. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 2. С. 31–41.
- [14] Григорьев А.И., Паранин А.Р., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2012. Т. 82. № 3. С. 55–66.