

Действие цветного шума на цепочки хаотических генераторов

© Э.В. Кальянов

Фрязинский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 141190 Фрязино, Московская область, Россия
e-mail: ervask@mail.ru

(Поступило в Редакцию 12 июля 2012 г. В окончательной редакции 15 января 2013 г.)

Рассмотрены уравнения, описывающие кольцевую систему, состоящую из замкнутой цепочки n ($n = 2, 3, 4, \dots$) однонаправленно связанных автоколебательных систем, обладающих хаотической динамикой, при воздействии внешнего цветного шума. Достаточно полные результаты численного анализа приведены для простоты применительно к случаю трех генераторов. Показано, что внешний цветной шум, воздействующий на парциальные генераторы кольцевой системы, может способствовать процессу установления режима синхронных колебаний и сокращать переходные процессы установления хаотической синхронизации. Приводится качественное объяснение рассмотренного эффекта. Для сравнения численными методами проведен анализ влияния внешнего цветного шума в случае разомкнутой цепочки, состоящей из трех генераторов.

Введение

Процессы, происходящие при хаотической синхронизации генераторов, обладающих хаотической динамикой, относятся к наиболее сложной части фундаментального явления синхронизации автоколебательных систем различной природы. В последнее время изучению этих процессов уделяется большое внимание, в частности, применительно к использованию в системах скрытой связи [1]. При этом исследуется как взаимная хаотическая синхронизация, так и принудительная, когда между системами осуществляется однонаправленная связь; результаты исследований неавтономных хаотических систем нашли отражение в учебных пособиях и монографиях [2–5]. Они значительно сложнее процессов, реализующихся в неавтономных системах с регулярной динамикой, причем даже в случае автоколебательных систем, являющихся генераторами на сверхвысоких частотах [6].

К процессам, происходящим при принудительной хаотической синхронизации, относятся и явления, наблюдающиеся в кольце однонаправленно связанных хаотических неидентичных генераторов, усложняющиеся за счет образующейся сложной активной дополнительной обратной связи, приводящей к эффектам самоорганизации. В настоящей работе рассматриваются цепочки (замкнутая и разомкнутая) однонаправленно связанных неидентичных хаотических генераторов (подсистем) при воздействии внешнего цветного шума. Показано, что внешний шум при условии, что он является цветным, в противоположность ожидаемому ухудшению процесса синхронизации может способствовать установлению синхронизма хаотических колебаний и сокращению переходных процессов. При этом максимум спектральной плотности воздействующего цветного шума должен быть близок к максимумам спектральной плотности управляемых хаотических колебаний. Этот эффект в цепочках однонаправленно связанных неидентичных ге-

нераторов не исследовался и представляется парадоксальным, несмотря на относительно большое число работ, посвященных явлению хаотической синхронизации в различных динамических системах. Рассматриваемый эффект не является спецификой кольцевой системы однонаправленно связанных хаотических генераторов. С целью иллюстрации этого наряду с результатами исследований кольцевой системы приведены результаты по воздействию цветного шума на разомкнутую цепочку однонаправленно связанных хаотических генераторов.

Уравнения движения

Используя уравнения, описывающие колебания в одном генераторе с хаотической динамикой, предложенные в [7], можно применительно к случаю замкнутой цепочки из n ($n = 2, 3, 4, \dots$) однонаправленно связанных таких генераторов, находящихся в шумовой среде, записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= y_1, & dy_1/dt &= [\beta_1(1 - 2z_1) \exp(-z_1) - \delta_1]y_1 - x_1 + D_1(y_n - y_1) + \xi(t), \\ dz_1/dt &= (x_1^2 - z_1)/\alpha_1 \\ dx_2/dt &= y_2, & dy_2/dt &= [\beta_2(1 - 2z_2) \exp(-z_2) - \delta_2]y_2 - x_2 + D_2(y_1 - y_2) + \xi(t), \\ dz_2/dt &= (x_2^2 - z_2)/\alpha_2, \\ dx_3/dt &= y_3, & dy_3/dt &= [\beta_3(1 - 2z_3) \exp(-z_3) - \delta_3]y_3 - x_3 + D_3(y_2 - y_3) + \xi(t), \\ dz_3/dt &= (x_3^2 - z_3)/\alpha_3, \\ dx_n/dt &= y_n, & dy_n/dt &= [\beta_n(1 - 2z_n) \exp(-z_n) - \delta_n]y_n - x_n + D_n(y_{n-1} - y_n) + \xi(t), \\ dz_n/dt &= (x_n^2 - z_n)/\alpha_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где β_i — параметр, определяющий усиление i -го ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) генератора, δ_i — параметр диссипации, α_i — постоянный коэффициент, определяющий инерционность i -й подсистемы, D_i — коэффициент односторонней связи, $\xi(t)$ — внешний шум.

В случае $D_1 = 0, D_2 \neq 0, D_3 \neq 0, \dots, D_n \neq 0$ уравнения (1) описывают находящуюся в шумовой среде разомкнутую цепочку односторонне связанных хаотических генераторов.

В работе для создания шумовой среды применен цветной шум $\xi(t) = \gamma u(t)$ (γ — постоянный коэффициент), формируемый с помощью уравнений, описывающих фильтрацию нерегулярных колебаний, генерируемых с помощью программы RND, прилагаемой к Windows. Таким образом,

$$du/dt = v, \quad dv/dt = -\varepsilon v - u + \text{RND}, \quad (2)$$

где ε — постоянный коэффициент.

Результаты численного анализа кольцевой системы (1) с учетом уравнений (2) приведены для простоты и наглядности применительно к случаю трех генераторов, хотя исследуемый эффект воздействия цветного шума на неавтономную хаотическую систему проявляется и при большем числе генераторов, в частности, при $n = 4$. Расчеты проводились методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом интегрирования по времени, равным 0.02. Достаточная точность вычислений определялась по структуре аттракторов. При численном анализе использовались программы, приведенные в [8] на языке Фортран после их перевода на Бейсик. Неидентичность трех автоколебательных подсистем с сохранением в них хаотического режима работы достигалась различием параметров усиления, определяемых значениями $\beta_1 = 4.98, \beta_2 = 5.0, \beta_3 = 5.02$. При этом $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2.6, \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.01, D_1 = D_2 = D_3 = D$. Начальные условия для подсистем выбраны так, что $x_1(0) = 0.42, y_1(0) = 0.17, z_1(0) = 0.25, x_2(0) = 0.89, y_2(0) = -0.50, z_2(0) = 1.23, x_3(0) = -1.33, y_3(0) = 0.63, z_3(0) = 1.64$. Этими значениями переменные подсистем достигали в случае начальных условий, равных 0.1, при $t = 240$. При этом $\varepsilon = 0.4$, а начальные условия для переменных $u(t)$ и $v(t)$ следующие: $u(0) = v(0) = 0.1$.

В соответствии с используемым значением ε экстремальные „выбросы“ колебаний цветного шума, определяемого уравнениями (2), на порядок меньше выбросов автономных хаотических колебаний $x_1(t), x_2(t)$ и $x_3(t)$, занимающих интервал $(x_1, x_2, x_3) \in [-3.9, 3.9]$. Значения параметров, при которых проводились расчеты разомкнутой цепочки односторонне связанных генераторов, те же, что и в кольцевой системе, но при этом $D_1 = 0, D_2 = D_3 = D$.

Хаотическая синхронизация

При адиабатическом увеличении параметра односторонней связи D в замкнутом кольце трех хаотических генераторов при $\gamma = 0$ во всем интервале

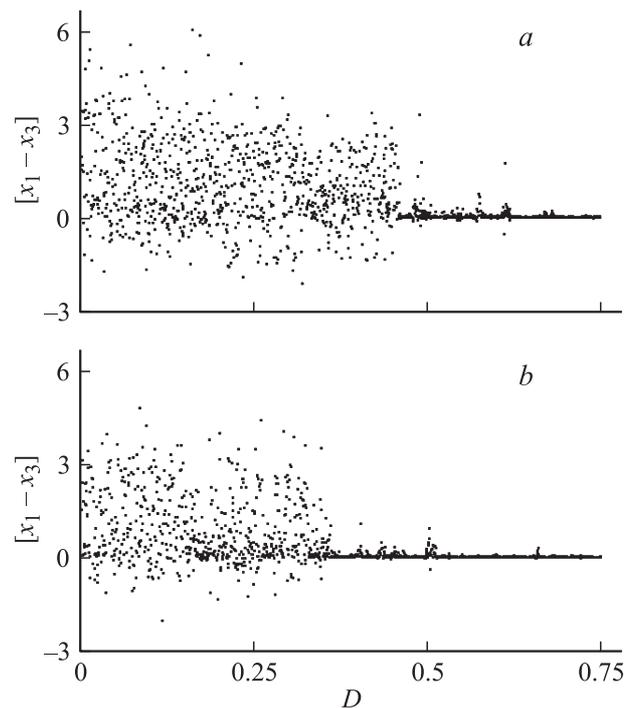


Рис. 1. Изменение максимальных значений разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_3(t)$ замкнутой цепочки генераторов в зависимости от параметра односторонней связи при $\gamma = 0$ (a) и при $\gamma = 0.9$ (b).

изменения параметра связи (в интервале $D \in [0, 0.75]$) сохраняется хаотический режим колебаний $x_1(t), x_2(t)$ и $x_3(t)$. При этом синхронность движений, например колебаний $x_1(t)$ и $x_3(t)$, возникает при достижении параметром связи значения $D \approx 0.51$. Последнее иллюстрируется диаграммой рис. 1, a, на которой показано изменение максимальных значений разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_3(t)$ (обозначенных через $[x_1 - x_3]$) в зависимости от параметра односторонней связи. Видно, что при $D > 0.51$ нерегулярный разброс точек, определяющих максимальные значения разности колебаний $x_1(t)$ и $x_3(t)$, практически отсутствует, так что реализуется синхронизм колебаний, хотя заметно, что этот разброс точек не равен нулю. При $D < 0.51$ наблюдается большой разброс точек и достигается лишь различной степени частичная синхронизация, в среднем тем большая, чем больше параметр связи.

Внешний цветной шум, формируемый решениями уравнений (2), способствует установлению в кольцевой системе односторонне связанных генераторов режима хаотической синхронизации. Это следует из анализа однопараметрической бифуркационной диаграммы, представленной на рис. 1, b. Эта диаграмма, в отличие от диаграммы, показанной на рис. 1, a, получена при $\gamma = 0.9$; величины остальных параметров прежние. Видно, что нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_3(t)$, снизится до величины, близкой к нулю, при достижении параметром связи значения

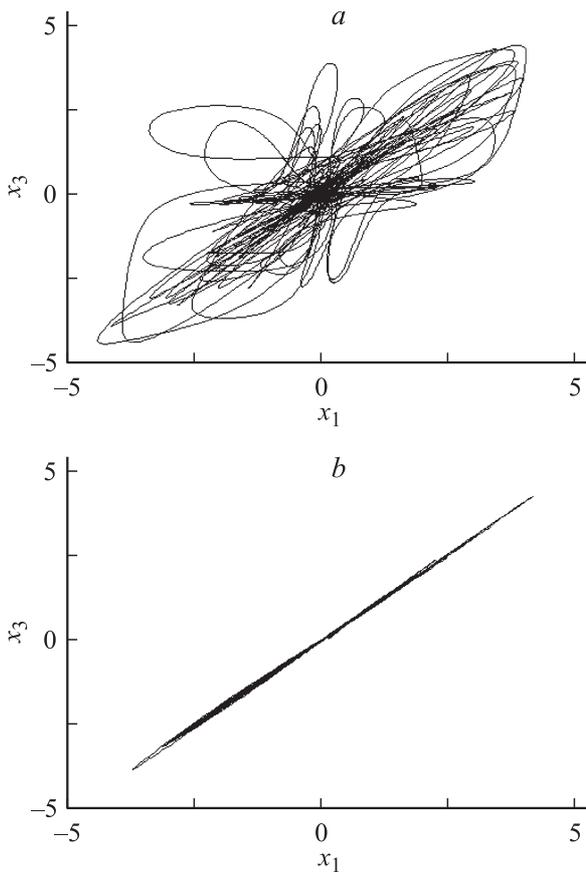


Рис. 2. Траектории движения изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_3\}$ при $\gamma = 0$ (a) и при $\gamma = 0.9$ (b).

$D \approx 0.37$. При этом, однако, в интервале $D \in [0.4, 0.5]$ существуют небольшие отклонения от нулевой линии.

Способствование внешнего цветного шума процессу достижения синхронизма колебаний в замкнутой цепочке одинаково связанных хаотических генераторов наглядно иллюстрируется траекториями движения изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_3\}$. В случае отсутствия внешнего шума в соответствии с бифуркационной диаграммой, представленной на рис. 1, a, при $D = 0.42$ синхронизма нет, так как разброс точек, соответствующих максимальным значениям разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_3(t)$, относительно велик и соответствует режиму частичной синхронизации. Благодаря наличию частичной синхронизации траектории движения изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_3\}$ имеют четко выраженную ориентацию в направлении множества $x_1 = x_3$ (рис. 2, a), тогда как при $D = 0$ траектория движения изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_3\}$ не имеет определенной ориентации. При воздействии внешнего шума в соответствии с диаграммой, приведенной на рис. 1, b, при $D = 0.42$ максимальное значение разности колебаний $x_1(t)$ и $x_3(t)$ близко к нулю. В этом случае траектория движения изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_3\}$ находится практически на множестве $x_1 = x_3$, отображая осуществление при

$\gamma = 0.9$ режима синхронизированных колебаний. Это иллюстрируется рис. 2, b.

В ряде случаев на основе изменения траекторий движения изображающей точки можно качественно составить представление о степени хаотической синхронизации. В рассматриваемой кольцевой системе по мере приближения к синхронизму колебаний $x_1(t)$ и $x_3(t)$ на плоскости $\{x_1, x_3\}$ уменьшается отношение максимальных отклонений траектории в направлении множества $x_1 = -x_3(t)$ к максимальным отклонениям траектории в направлении множества $x_1 = x_3(t)$. При отсутствии связи это отношение (обозначим его через κ) примерно равно единице, а при синхронизме — близко к нулю. Значение коэффициента эффективности синхронизации в случае рис. 2, a равно $\kappa \approx 0.44$, а в случае рис. 2, b — величине $\kappa \approx 0.015$.

На рис. 3 приведены спектры мощности колебаний $x_1(t)$ и внешнего воздействующего шума $u(t)$. Спектры мощности колебаний $x_1(t)$ рассчитаны при $D = 0.42$ для случаев $\gamma = 0$ (кривая 1) и $\gamma = 0.9$ (кривая 2). Они отображают характер колебаний как при отсутствии синхронизма (при частичной хаотической синхронизации), так и при синхронной динамике. В обоих случаях генерируются колебания в широком диапазоне частот с относительно небольшим перепадом спектральной плотности мощности хаотических колебаний. Спектр внешних колебаний, иллюстрируемый кривой 3, свидетельствует о том, что шум имеет выделенную частоту, на которой реализуется наибольшая спектральная плотность мощности шума, т.е. шум является „цветным“; максимальные значения спектральной плотности мощности цветного шума находятся вблизи значения $\omega \approx 1$.

Результаты численного анализа свидетельствуют о том, что при воздействии внешнего цветного шума возникает эффект, аналогичный процессу принудительной частичной хаотической синхронизации. Внешний цветной шум, оказывая синхронизирующее действие на каждый парциальный генератор, „сближает“ структуры колебательных процессов парциальных генераторов и тем самым оказывает управляющее действие на связанные колебания; этим он облегчает процесс хаотической

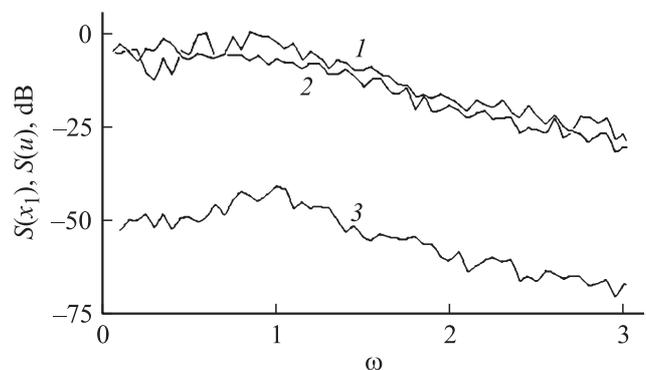


Рис. 3. Спектры мощности колебаний $x_1(t)$ при $D = 0.42$ для случаев $\gamma = 0$ (кривая 1) и $\gamma = 0.9$ (кривая 2) и спектр мощности колебаний внешнего цветного шума $u(t)$ (кривая 3).

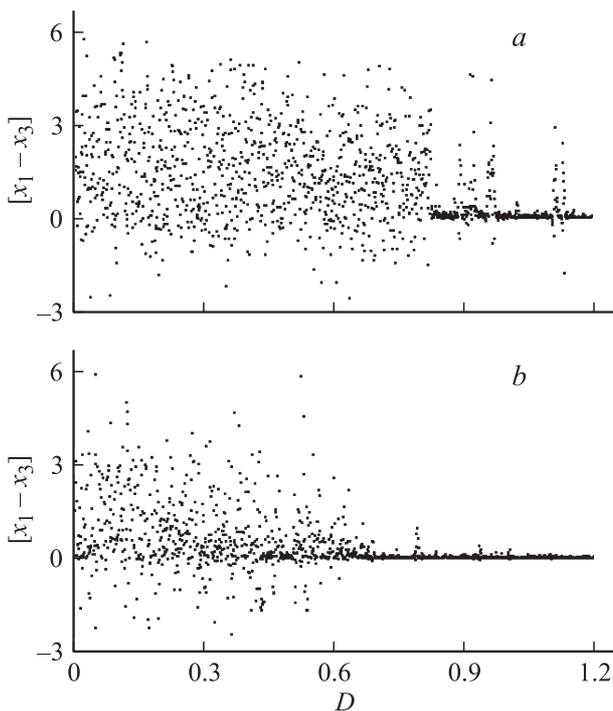


Рис. 4. Изменение максимальных значений разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_3(t)$ разомкнутой цепочки генераторов в зависимости от параметра однонаправленной связи при $\gamma = 0$ (a) и при $\gamma = 0.9$ (b).

синхронизации в кольцевой системе однонаправленно связанных генераторов.

В разомкнутой цепочке трех однонаправленно связанных генераторов, когда в уравнениях (1) $D_1 = 0$, $D_2 = D_3 = D$ происходят процессы, аналогичные процессам, наблюдающимся в кольцевой системе. При этом, что представляется естественным, эффект хаотической синхронизации выражен слабее, причем как при отсутствии внешнего шума, так и при его воздействии. Так, при параметрах, при которых рассчитывались диаграммы, представленные на рис. 1, синхронный режим без воздействия внешнего шума возникает при достижении параметром связи значения $D \approx 0.84$ (рис. 4, a). При этом в интервале изменения параметра связи $D \in [0.9, 1.0]$ и в окрестности значения $D \approx 1.15$ наблюдаются „всплески“, свидетельствующие об ухудшении режима хаотической синхронизации. При воздействии цветного шума (при $\gamma = 0.9$) хаотическая синхронизация устанавливается при достижении параметром связи значения $D \approx 0.69$.

Механизм стимулирования хаотической синхронизации в разомкнутой цепочке внешним цветным шумом тот же, что и в кольцевой системе: внешний цветной шум оказывает дополнительное синхронизирующее действие на каждый генератор. В обоих случаях это действие цветного шума тем эффективней, чем ближе частота, на которой реализуется максимум спектральной плотности цветного шума, к частотам, на которых имеются максимумы спектральной плотности хаотических

колебаний хаотических подсистем. Это обстоятельство приводит к ограничению числа возможных хаотических генераторов в цепочке в случае нарастания разброса их параметров, определяющих степень идентичности подсистем, так что стимулирование процесса хаотической синхронизации в большом числе генераторов проблематично.

Следует заметить, что рассмотренный эффект стимулирования хаотической синхронизации внешним цветным шумом может быть осуществлен в различных генераторах, обладающих хаотической динамикой. Проверено, что он реализуется, например, при хаотической синхронизации систем Лоренца. При этом эффективность стимулирования хаотической синхронизации повышается с сужением полосы воздействующего цветного шума. При белом шуме эффект стимулирования хаотической синхронизации отсутствует.

Переходные процессы при хаотической синхронизации

В соответствии с результатами численного анализа, свидетельствующими об уменьшении значений коэффициента однонаправленной связи, при которых происходит хаотическая синхронизация в кольцевой системе при воздействии внешнего цветного шума, происходит сокращение переходного процесса установления синхронизма в такой шумовой среде. При исследовании переходного процесса установления синхронного режима работы однонаправленная связь „включалась“ в момент времени $t = 600$, а воздействие внешнего цветного шума осуществлялось одновременно с началом возбуждения колебаний $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ (при $t = 0$). Рассмотрены колебательные процессы в интервале времени $t \in [480, 1080]$.

На рис. 5 иллюстрируется сокращение переходного процесса установления синхронных колебаний при воздействии на них внешнего цветного шума в кольцевой системе однонаправленно связанных неидентичных генераторов, когда параметр связи равен $D = 0.5$. Кривая 1 соответствует фрагменту реализации разности колебаний $x_1(t)$ и $x_3(t)$, когда внешний цветной шум отсутствует ($\gamma = 0$), а кривая 2 — когда интенсивность внешнего цветного шума определяется величиной

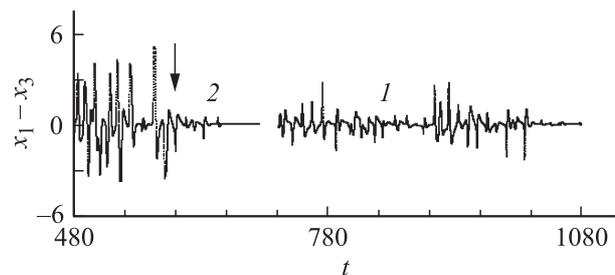


Рис. 5. Фрагменты разности колебаний $x_1(t)$ и $x_3(t)$ в кольцевой системе с однонаправленной связью при $\gamma = 0$ (кривая 1) и при $\gamma = 0.4$ (кривая 2).

$\gamma = 0.4$. Стрелкой отмечен момент времени ($t = 600$), соответствующий включению однонаправленной связи. При этом в случае отсутствия воздействия внешнего шума (кривая I) показан участок фрагмента реализации разностных колебаний, соответствующий окончанию переходного процесса установления синхронности колебаний: как несущественный для понимания опущен участок фрагмента реализации в интервале времени $t \in [480, 720]$. При $\gamma = 0.4$ опущен участок реализации в интервале времени $t \in [700, 1080]$. Видно, что при воздействии внешнего цветного шума происходит существенное сокращение длительности переходного процесса установления синхронизма. В случае $\gamma = 0$ переходной процесс установления режима синхронизации занимает интервал времени $t \in [600, 1020]$, а в случае $\gamma = 0.4$ — значительно меньший интервал ($t \in [600, 655]$). При этом синхронные колебания остаются хаотическими и сохраняют особенность структуры колебаний, которая в соответствии с [7] отображает переключение движений между двумя бассейнами притяжения, несмотря на то, что воздействующий шум имеет существенно иную структуру.

При увеличении коэффициента однонаправленной связи переходной процесс установления синхронного режима работы в замкнутой цепочке однонаправленно связанных генераторов обычно сокращается, и это представляется естественным. В то же время четкая закономерность может нарушаться. Переходной процесс установления синхронизма при наличии внешнего цветного шума, как и при его отсутствии, зависит от момента включения однонаправленной связи, что определяется соотношением фаз и „выбросов“ хаотических колебаний парциальных генераторов кольцевой системы в этот момент времени.

В разомкнутой цепочке однонаправленно связанных генераторов внешний цветной шум также способствует сокращению переходных процессов установления режима хаотической синхронизации. При параметрах, при которых рассчитывалась кривая I рис. 5 для замкнутой кольцевой системы, в случае разомкнутой системы однонаправленно связанной цепочки генераторов процесс синхронизации не устанавливается: сохраняется асинхронная динамика. Однако при $D = 0.5$, $\gamma = 0.4$ хаотическая синхронизация реализуется, но переходной процесс занимает интервал времени $t \in [600, 990]$. При увеличении параметра связи хаотическая синхронизация возникает и при $\gamma = 0$; переходной процесс установления синхронного режима работы, занимающий при отсутствии шума (при $D = 1.2$, $\gamma = 0$) интервал времени $t \in [600, 990]$, при воздействии цветного шума (при $D = 1.2$, $\gamma = 0.4$) сокращается до интервала времени $t \in [600, 630]$.

Заключение

Результаты численного анализа свидетельствуют о том, что используемый цветной шум, формируемый на

основе программы RND, способствует процессу хаотической синхронизации в кольцевой системе однонаправленно связанных неидентичных генераторов и приводит к сокращению переходного процесса установления режима синхронных колебаний. При этом особенности структуры хаотически синхронизированных колебаний, отображающие в кольцевой системе движения с переключением, сохраняются, несмотря на то, что внешний шум отличается по структуре от структуры колебаний парциальных генераторов кольцевой системы. Внешний шумовой сигнал, оказывая управляющее действие на каждый генератор кольцевой системы, облегчает процесс их хаотической синхронизации при введении однонаправленной связи, благодаря чему и происходит сокращение переходного процесса установления синхронизма между парциальными генераторами.

Способствование воздействию внешнего цветного шума процессу хаотической синхронизации проявляется, хотя и в меньшей степени, и в разомкнутой цепочке однонаправленно связанных генераторов. При этом также происходит сокращение переходного процесса.

Эффект стимулирования внешним цветным шумом процесса хаотической синхронизации проявляется и в других системах с хаотической динамикой. Он может иметь место в системах скрытой связи, основанных на использовании явления хаотической синхронизации, при их работе в среде цветного шума.

Работа выполнена при поддержке программы „Радиовидение“ ОФН РАН.

Список литературы

- [1] Короновский А.А., Москаленко А.И., Храмов А.Е. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 1–8.
- [2] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [3] Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. 252 с.
- [4] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 544 с.
- [5] Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 424 с.
- [6] Железовский Б.Е., Кальянов Э.В. Многочастотные режимы в приборах СВЧ. М.: Связь, 1978. 256 с.
- [7] Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 16. С. 29–36.
- [8] Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. Наука, 1989. 280 с.