

О влиянии электрон-фононного взаимодействия на температурные зависимости магнетотранспорта в квантово-холловских системах

© А.А. Грешнов[¶], Я.М. Бельтюков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 13 мая 2013 г. Принята к печати 26 июня 2013 г.)

Изучен вопрос о влиянии электрон-фононного взаимодействия на температурные зависимости проводимости в режиме целочисленного квантового эффекта Холла. Показано, что электрон-фононное взаимодействие приводит к возможности переноса в области локализованных состояний и тем самым формирует вид магнетотранспортных кривых при заданной температуре. В рамках аналитической модели показана связь между показателями в степенных законах, описывающих зависимости ширины переходных областей между последовательными плато квантового эффекта Холла от температуры и длины локализации, от энергии, отсчитанной от центра определенного уровня Ландау. Проведены прямые численные расчеты магнетотранспортных кривых в зависимости от температуры, результаты которых хорошо согласуются с теорией и экспериментальными данными по целочисленному квантовому эффекту Холла.

1. Введение

Несмотря на активные исследования квантового эффекта Холла, проводимые на протяжении последних 30 лет, и общее понимание физической картины явления, теоретического аппарата, способного воспроизвести магнетотранспортные кривые при заданной температуре, до сих пор не создано. На практике при анализе экспериментальных данных приходится довольствоваться скейлинговыми соображениями, подробно описанными в обзоре [1], квинтэссенция которых состоит в том, что при достаточно низких температурах ширины переходных областей между соседними плато квантового эффекта Холла степенным образом зависят от температуры, но каков показатель степени и префактор — не уточняется. В то же время характер магнетотранспортных кривых несет богатую информацию об исследуемой системе, виде случайного потенциала примесей (или других неоднородностей) и процессах неупругого рассеяния, собственно и приводящих к размытию резких (вертикальных) переходов между последовательными плато. Как и в случае слабой локализации, главными претендентами на роль процессов, нарушающих замкнутость электрон-примесной подсистемы и сглаживающих сингулярное поведение проводимости, являются электрон-фононное и электрон-электронное взаимодействия. На данный момент вопрос о том, какой из механизмов доминирует в реально исследуемых системах, остается открытым ввиду недостатка содержательных расчетных данных для сравнения с экспериментом. В части работ [2,3] предполагается, что главным является электрон-электронное взаимодействие, а наличие электрон-фононного попросту замалчивается. В то же время электрон-фононное взаимодействие в сильных магнитных полях можно наблюдать напрямую, в экспериментах по фононному увлечению [4,5], а его последствием может быть пробой квантового эффекта

Холла [6]. В данной работе мы ограничимся рассмотрением влияния на квантовый эффект Холла именно электрон-фононного взаимодействия, поскольку этот механизм является более прозрачным, не требующим использования концепции „сбоя фазы“ [2,3,7], имеющей смысл лишь для делокализованных состояний, в то время как все одноэлектронные состояния квантово-холловских систем являются, строго говоря, локализованными (исключая, конечно, бесконечно узкие полосы энергии вблизи центров каждого из уровней Ландау).

Ранее электрон-фононное взаимодействие в двумерных электронных системах в условиях сильного магнитного поля исследовалось в работах [8–13]. В работе [8] был изучен префактор перед экспонентой в активационном законе для продольной проводимости, т.е. рассматривалась область сильно локализованных состояний, транспорт по которым затруднен даже с учетом взаимодействия. В работах [9,10], напротив, случайным потенциалом пренебрегали, и были найдены вклады от электрон-фононного взаимодействия в диагональную [9] и холловскую [10] компоненты тензора проводимости. В работах [11,12,14] были рассчитаны температурные зависимости средних времен ухода из одноэлектронных состояний с определенной энергией $\tau(E, T)$, однако использованные в них приближения (замена случайного потенциала на однородное поле в работе [11] и адаптированная диффузионная форма для двухчастичного коррелятора [15] в работе [12]) вряд ли оправданы. В любом случае, статус величины τ туманен, так как время „сбоя фазы“ можно ввести лишь в области делокализованных состояний; не прилагается и рецепт использования τ для вычисления собственно проводимости. Наконец, в работе [13] были выполнены расчеты обеих компонент тензора проводимости σ_{xx} и σ_{xy} в зависимости от фактора заполнения для разных температур, однако использованная модель (потенциал специального вида), метод (классическое уравнение Больцмана) и результаты для σ_{xx} , представленные на графике рис. 2 статьи [13], заставляют сомневаться в адекватности использованного подхода.

[¶] E-mail: a_greshnov@hotmail.com

В данной работе представлена последовательная теория магнетотранспорта в режиме квантового эффекта Холла с учетом электрон-фононного взаимодействия, следуя которой выполнены численные расчеты, показавшие хорошее согласие с экспериментальными данными. Кроме того, в рамках упрощенной аналитической модели найдена простая связь между скейлинговым показателем k , характеризующим зависимости ширины переходных областей между соседними плато от температуры, и ν , описывающим зависимость длины локализации от энергии (отсчитанной от центра актуального уровня Ландау).

2. Теория

Для описания процессов переноса с участием акустических фононов, происходящих в двумерном замагниченном электронном газе при наличии случайного статического потенциала, мы воспользуемся кинетической теорией в представлении собственных функций одноэлектронной задачи, описанной в книге [16] с прицелом на прыжковую проводимость (так называемое λ -представление). Как известно, в условиях сильного магнитного поля $\omega_c \tau \gg 1$ плотность состояний двумерного электронного газа разбивается на подзоны Ландау, каждая из которых содержит $N_L = S/2\pi l_B^2$ электронных состояний (здесь S — площадь рассматриваемой системы, $l_B = (eB/\hbar c)^{-1/2}$ — магнитная длина). В главном порядке по $(\omega_c \tau)^{-1}$ каждый из уровней Ландау можно рассматривать независимо, при этом технически нахождение собственных энергий и волновых функций сводится к диагонализации матрицы $N_L \times N_L$ [17]. Предположим, что эта процедура выполнена, тогда гамильтониан всей системы во внешнем электрическом поле \mathcal{E} , направленном для определенности вдоль оси x , записывается в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_{ph} + \hat{H}_{e-ph} + \hat{H}_{\mathcal{E}}, \quad (1)$$

$$\hat{H}_e = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha}, \quad (2)$$

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} (\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} + 1/2), \quad (3)$$

$$\hat{H}_{e-ph} = \sum_{\alpha\beta\mathbf{q}} B_{\alpha\beta}^{\mathbf{q}} (\hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}) \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta}, \quad (4)$$

$$B_{\alpha\beta}^{\mathbf{q}} = i\Xi \sqrt{\frac{\hbar q}{2\rho v s}} \int d^3 r \Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \Psi_{\beta}(\mathbf{r}), \quad (5)$$

$$\hat{H}_{\mathcal{E}} = \sum_{\alpha} V_{\alpha\beta} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta}. \quad (6)$$

Здесь $\Psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ — одночастичная волновая функция состояния с номером α , $V_{\alpha\beta}$ — матричные элементы оператора

$V = e\mathcal{E}_x x$, Ξ — деформационный потенциал, ρ — плотность, s — скорость звука, v — объем системы. Используя уравнение Лиувилля для полной матрицы плотности, $i\hbar\dot{\rho} = [\hat{H}, \rho]$, и определение одночастичной матрицы плотности $f_{\alpha\beta}(t) = \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta} \rangle = \text{Tr}(\rho(t) \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta})$, несложно получить цепочку кинетических уравнений [16]:

$$[i\hbar\partial_t + E_{\alpha} - E_{\beta}] f_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma, \mathbf{q}, j=1,2} [B_{\beta\gamma}^{\mathbf{q}} g_{\alpha\gamma\mathbf{q}}^{(j)} - B_{\gamma\alpha}^{\mathbf{q}} g_{\gamma\beta\mathbf{q}}^{(j)}] + \sum_{\gamma} [V_{\beta\gamma} f_{\alpha\gamma} - V_{\gamma\alpha} f_{\gamma\beta}], \quad (7)$$

$$[i\hbar\partial_t + E_{\alpha} - E_{\beta} + (-1)^j \hbar\omega_{\mathbf{q}}] g_{\alpha\beta\mathbf{q}}^{(j)} = \sum_{\gamma, \delta, \mathbf{q}', j'=1,2} B_{\gamma\delta}^{\mathbf{q}'} [h_{\alpha\beta\gamma\delta\mathbf{q}\mathbf{q}'}^{(jj')} - h_{\gamma\delta\alpha\beta\mathbf{q}'\mathbf{q}}^{(j'j)}], \quad (8)$$

где $g_{\alpha\beta\mathbf{q}}^{(j)} = \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta} \hat{c}_{\mathbf{q}}^{(j)} \rangle$, $h_{\alpha\beta\gamma\delta\mathbf{q}\mathbf{q}'}^{(jj')} = \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta} \hat{a}_{\gamma}^{\dagger} \hat{a}_{\delta} \hat{c}_{\mathbf{q}}^{(j)} \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{(j')} \rangle$ — старшие матрицы плотности, а операторы $\hat{c}_{\mathbf{q}}^{(j)} = \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$, $\hat{c}_{\mathbf{q}}^{(2)} = \hat{b}_{-\mathbf{q}}$ введены для сокращения записи. Для расщепления цепочки воспользуемся малостью константы электрон-фононного взаимодействия (при этом $f_{\alpha} = f_{\alpha\alpha} \gg f_{\alpha\beta}$), тогда $h_{\alpha\beta\gamma\delta\mathbf{q}\mathbf{q}'}^{(jj')} \approx [\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} f_{\alpha} f_{\gamma} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} f_{\alpha} (1 - f_{\beta})] \langle \hat{c}_{\mathbf{q}}^{(j)} \hat{c}_{\mathbf{q}'}^{(j')} \rangle$. Фононную подсистему в условиях достаточного теплоотвода можно считать находящейся в равновесии (приближение „тепловой бани“) и заменить фононный коррелятор на бозевскую функцию распределения $n_{\mathbf{q}}$ согласно $\langle \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}'} \rangle \approx n_{\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$, $\langle \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}'}^{\dagger} \rangle \approx (n_{\mathbf{q}} + 1) \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$. В результате решение уравнения (8) выражается с помощью интеграла через неравновесную функцию распределения f_{α} , и подстановка в уравнение (7) приводит к кинетическому уравнению с памятью. Однако в условиях слабого взаимодействия под интегралом достаточно оставить лишь быстро осциллирующую часть, приходя к кинетическому уравнению марковского вида для $f_{\alpha}(t)$:

$$\partial_t f_{\alpha} = - \sum_{\beta} [W_{\alpha\beta} f_{\alpha} (1 - f_{\beta}) - W_{\beta\alpha} f_{\beta} (1 - f_{\alpha})] + \delta I_{\alpha}, \quad (9)$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{w_{\alpha\beta}}{|1 - e^{-(E_{\alpha} - E_{\beta})/T}|}, \quad (10)$$

$$w_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} |B_{\alpha\beta}^{\mathbf{q}}|^2 \delta(|E_{\alpha} - E_{\beta}| - \hbar\omega_{\mathbf{q}}), \quad (11)$$

$$\delta I_{\alpha} = \sum_{\beta} [V_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - V_{\beta\alpha} f_{\beta\alpha}], \quad (12)$$

где δI_{α} — аналог полевого члена классического кинетического уравнения. При вычислении темпов переходов будем считать температуру достаточно низкой, чтобы тепловой волновой вектор фонона $q_T = T/\hbar s$ был много меньше обратной ширины квантовой ямы a^{-1} (хотя процессы с излучением фононов с большими волновыми векторами и разрешены уравнением (10), они не

существенны ввиду фермиевской статистики заполнения электронных состояний). В этом случае выражение для $w_{\alpha\beta}$ записывается в виде

$$w_{\alpha\beta} = \frac{\Xi^2 Q^2}{\hbar \rho s^2} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{|P_{\alpha\beta}^q|^2}{\sqrt{Q^2 - q^2}}, \quad (13)$$

$$P_{\alpha\beta}^q = \int \Psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \Psi_{\beta}(\mathbf{r}) d^3 r, \quad (14)$$

где интегрирование ведется в плоскости ямы, $Q = |E_{\alpha} - E_{\beta}|/\hbar s$ — волновой вектор фонона, обеспечивающего перебор между состояниями α и β , а \mathbf{q} — компонента вектора \mathbf{Q} в плоскости. Дальнейший расчет темпов переходов требует знания явного вида одноэлектронных волновых функций и будет обсуждаться в следующих разделах.

Заметим, что диагональная компонента матрицы плотности f_{α} , описываемая кинетическим уравнением (9), не дает вклада в ток

$$\mathbf{j}(t) = \text{Tr}(\rho \hat{\mathbf{j}}) = \frac{e}{v} \sum_{\alpha\beta} \mathbf{v}_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \quad (15)$$

ввиду требования $\mathbf{v}_{\alpha\alpha} = 0$, следующего из отсутствия тока в равновесии, при $f_{\alpha\beta} = f_0(E_{\alpha})\delta_{\alpha\beta}$ (где f_0 — фермиевская функция распределения). Для нахождения недиагональных компонент матрицы плотности в марковском приближении можно использовать уравнение (7) с опущенной производной по времени, предварительно выразив в этом же приближении функции $g_{\alpha\beta}^{(j)}$. В результате с точностью до членов первого порядка по V имеем

$$f_{\alpha\beta} = \frac{1}{E_{\alpha} - E_{\beta}} \left[V_{\beta\alpha} (f_{\alpha} - f_{\beta}) + \sum_{\gamma\mathbf{q}} B_{\beta\gamma}^{\mathbf{q}} B_{\gamma\alpha}^{-\mathbf{q}} (C_{\alpha\gamma}^{\mathbf{q}} - C_{\gamma\beta}^{\mathbf{q}}) \right], \quad (16)$$

$$C_{\alpha\beta}^{\mathbf{q}} = \frac{(f_{\alpha} - f_{\beta})n_{\mathbf{q}} + f_{\alpha}(1 - f_{\beta})}{E_{\alpha} - E_{\beta} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}} + \frac{(f_{\alpha} - f_{\beta})n_{\mathbf{q}} - f_{\beta}(1 - f_{\alpha})}{E_{\alpha} - E_{\beta} + \hbar\omega_{\mathbf{q}}}. \quad (17)$$

Используя уравнение (16), несложно выделить часть тока, не связанную с электрон-фононным взаимодействием. Для этого достаточно положить $B_{\alpha\beta}^{\mathbf{q}} = 0$ и $f_{\alpha\beta} = f_0(E_{\alpha})\delta_{\alpha\beta}$, в результате

$$\mathbf{j}^{(0)} = \frac{e^2 \mathcal{E}_x}{v} \sum_{\alpha\beta} \frac{f_0(E_{\alpha}) - f_0(E_{\beta})}{E_{\alpha} - E_{\beta}} \mathbf{v}_{\alpha\beta} x_{\beta\alpha}. \quad (18)$$

Воспользовавшись соотношением $\hbar v_{\alpha\beta}^y = i(E_{\alpha} - E_{\beta})y_{\alpha\beta}$ и определением холловской проводимости $j_y = \sigma_{yx} \mathcal{E}_x$, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} &= -\frac{e^2}{\hbar S} \sum_{\alpha\beta} [f_0(E_{\alpha}) - f_0(E_{\beta})] y_{\alpha\beta} x_{\beta\alpha} \\ &= \frac{2e^2}{\hbar S} \sum_{\alpha} f_0(E_{\alpha}) \text{Im}[(xy)_{\alpha\alpha} - x_{\alpha} y_{\alpha}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Полученная формула весьма поучительна, так как формально правая часть уравнения (19) обращается в нуль. На самом деле это показывает, что вклад в σ_{xy} не дают локализованные состояния, ведь для делокализованных средние значения координат попросту не определены. При практическом моделировании проводимости рассматриваются системы конечных размеров, и чтобы волновые функции не были ограничены размером образца, необходимо использовать периодические граничные условия, иначе проводимость действительно занулится. Поскольку при использовании периодических граничных условий запись возмущающего потенциала в виде $V = e\mathcal{E}_x x$ теряет корректность, в этом случае необходимо перейти к операторам скоростей и применять формулу

$$\sigma_{xy} = \frac{2e^2 \hbar}{S} \sum_{\alpha} f_0(E_{\alpha}) \sum_{\beta} \frac{\text{Im}[v_{\alpha\beta}^x v_{\beta\alpha}^y]}{(E_{\alpha} - E_{\beta})^2}, \quad (20)$$

с помощью которой в работе [18] аналитически показано, что холловская проводимость нескольких полностью заполненных уровней Ландау является при нулевой температуре топологическим инвариантом, а в работе [19] численно исследована точность квантования в зависимости от размера системы. При $T = 0$ формула (20) приводит к предельно узким (вертикальным) переходам между соседними плато квантового эффекта Холла, которые размываются с повышением температуры согласно фермиевской функции распределения. Аналогичным образом ведет себя и продольная проводимость, имеющая при $T = 0$ вид набора предельно узких пиков высотой $\sim e^2/h$, размытие которых с температурой описывается формулой

$$\sigma_{xx} = - \int dE \frac{\partial f_0}{\partial E} \sigma_{xx}(E, T = 0). \quad (21)$$

На практике ширина переходной области оказывается гораздо шире T , что объясняется наличием дополнительного тока, обусловленного электрон-фононным взаимодействием. Для его описания удобно воспользоваться уравнением (9), в котором вместо полевого члена учтен сдвиг одноэлектронных уровней на величину $V_{\alpha} = V_{\alpha\alpha}$, так что $\tilde{E}_{\alpha} = E_{\alpha} + V_{\alpha}$. В таком представлении ток определяется неравновесной добавкой к функции распределения $\mathcal{F}_{\alpha} = f_{\alpha} - f_0(E_{\alpha})$, уравнение для определения которой имеет вид [16]

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{F}_{\alpha} &= - \sum_{\beta} \Gamma_{\alpha\beta} \left[\frac{V_{\alpha} - V_{\beta}}{T} + \frac{\mathcal{F}_{\alpha}}{f_0(E_{\alpha})[1 - f_0(E_{\alpha})]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathcal{F}_{\beta}}{f_0(E_{\beta})[1 - f_0(E_{\beta})]} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где за

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha} = W_{\alpha\beta} f_0(E_{\alpha}) [1 - f_0(E_{\beta})] \quad (23)$$

обозначены эффективные темпы переходов с учетом заселенностей электронных и фононных уровней. В стационарном случае (22) сводится к системе уравнений

Кирхгофа

$$\sum_{\beta} (R_{\alpha\beta})^{-1} (U_{\alpha} - U_{\beta}) = 0 \quad (24)$$

для случайной сетки сопротивлений, узлы которой отождествляются с локализованными одноэлектронными состояниями (α , β), а сопротивления — с обратными темпами переходов,

$$(R_{\alpha\beta})^{-1} = \frac{e^2 \Gamma_{\alpha\beta}}{T}. \quad (25)$$

При этом согласно формуле

$$U_{\alpha} = V_{\alpha} + \frac{T \mathcal{F}_{\alpha}}{f_0(E_{\alpha}) [1 - f_0(E_{\alpha})]} \quad (26)$$

установившееся напряжение на каждом узле содержит пропорциональную \mathcal{F}_{α} добавку, которая и позволяет удовлетворить уравнениям (24) при заданных V_{α} . Для нахождения проводимости системы удобно зафиксировать напряжения на противоположных гранях, положив $U_{\alpha} = 0$ для состояний, локализованных вблизи левой границы, и $U_{\alpha} = U$ для состояний, локализованных вблизи правой границы, после чего определить оставшиеся напряжения, а вместе с ними и полный ток I , связанный с проводимостью в случае образца квадратной формы формулой $I = \sigma_{xx} U$, из уравнений (24). Непосредственное решение системы уравнений (24) требует знания сопротивлений $R_{\alpha\beta}$, расчет которых с использованием формул (13), (14) может быть осуществлен численно; соответствующие результаты представлены в разд. 4. Возможна, однако, и приближенная трактовка, основанная на качественных соображениях в духе теории протекания.

3. Качественные соображения

Проанализируем, как эволюционирует проводимость системы при последовательном увеличении температуры. Согласно скейлинговым соображениям [1], длина локализации одноэлектронных состояний в сильных магнитных полях ($\omega_c \tau \gg 1$) степенным образом зависит от энергии, отсчитанной от центра актуального уровня Ландау,

$$\xi(E) \propto |E - E_n|^{-\nu}, \quad (27)$$

где $\nu \approx 2.3$. Наши численные расчеты соответствуют такому поведению (рис. 1). При достаточно низких температурах

$$T \ll T_0 \approx \Gamma \frac{l_B^2}{\xi^2} \propto |E - E_n|^{2\nu} \quad (28)$$

(где Γ — ширина уровня Ландау) одноэлектронные состояния внутри температурной полоски вблизи уровня Ферми перекрываются экспоненциально слабо (за исключением редких реализаций, не играющих роли). В результате проводимость с участием фононов является в этом температурном интервале экспоненциально

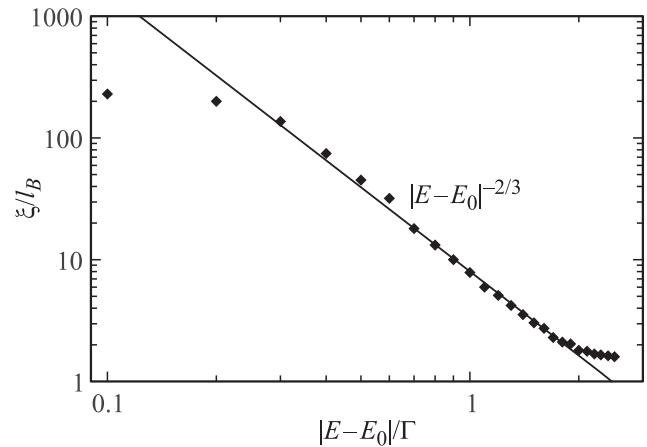


Рис. 1. Зависимость длины локализации одноэлектронных состояний от энергии для основного уровня Ландау $n = 0$ (размер моделируемой системы $L = 640l_B$).

слабой, а бесфононная составляющая обращается в нуль согласно формуле (21), поскольку $\sigma_{xx}(T = 0)$ имеет вид набора бесконечно узких пиков конечной высоты ($\sim e^2/h$). Иначе говоря, система находится ниже порога перколяции и возможен лишь прыжковый механизм транспорта. При $T \gtrsim T_0$ порог перколяции преодолевается и появляются соединяющие края образца последовательности резисторов, сопротивление которых не является экспоненциально малым. Однако близко к порогу перколяции таких цепей мало, а сопротивления резисторов еще достаточно велики, чтобы результирующая проводимость системы была порядка e^2/h . Для оценки роста проводимости выше порога перколяции $T \gtrsim T_0$ учтем, что в этом режиме одноэлектронные состояния существенно перекрываются, и степень перекрытия оказывается порядка $m = T/T_0$. Следуя представлениям, развитым в предыдущем разделе, введем сопротивления между перекрывающимися состояниями по формуле (25), а характерную величину этих сопротивлений обозначим за R_0 (далее мы обсудим зависимости R_0 от T и ξ). Для оценки величины σ_{xx} разобьем систему на квадраты со сторонами $\xi \times \xi$ (в каждый из них попадает m состояний) и будем считать, что все состояния из одного квадрата перекрываются со всеми состояниями из соседнего квадрата, а более далекими перекрытиями пренебрежем. Таким образом, соседние квадраты оказываются соединенными между собой m^2 резисторами с сопротивлениями R_0 (рис. 2), учитывая, что напряжение между ними равно $\delta U = U\xi/L$, получаем, что ток, текущий от данного квадрата к соседнему, равен $\delta I = m^2 \delta U / R_0$. Поскольку в поперечном направлении система содержит L/ξ таких областей, полный ток равен $I = \delta I L / \xi = m^2 U / R_0$, откуда получаем оценку для проводимости всей системы

$$\sigma_{xx} \simeq \frac{m^2}{R_0}. \quad (29)$$

Теперь определим, как сопротивление R_0 зависит от температуры и радиуса локализации перекрывающихся

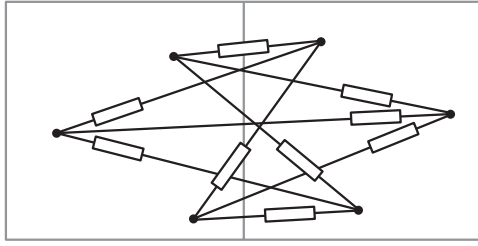


Рис. 2. Эффективная сетка сопротивлений: показаны резисторы, соединяющие одноэлектронные состояния из квадрата размером $\xi \times \xi$ со всеми состояниями из соседнего квадрата (пример приведен для $m = 3$).

состояний. Согласно формулам (25), (23) и (10), эффективное сопротивление между состояниями, попадающими в температурную полосу около уровня Ферми, определяется величиной $w_{\alpha\beta}$,

$$R_{\alpha\beta} \simeq \frac{T}{e^2 w_{\alpha\beta}}, \quad (30)$$

при этом зависимость темпов переходов $w_{\alpha\beta}$ от перекрытия волновых функций дается формулами (13), (14). Для оценки среднего $S(q, \omega, E) = \langle |P_{\alpha\beta}^q|^2 \rangle$ запишем его посредством функций Грина,

$$\begin{aligned} S(q, \omega, E) &= \left\langle \delta(E - \hbar\omega/2 - E_\alpha) \delta(E + \hbar\omega/2 - E_\beta) \right. \\ &\times \int d^2r_1 d^2r_2 \Psi_\alpha^*(\mathbf{r}_1) \Psi_\beta(\mathbf{r}_1) \Psi_\alpha(\mathbf{r}_2) \Psi_\beta^*(\mathbf{r}_2) e^{iq(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \left. \right\rangle \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r_1 d^2r_2 e^{iq(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \left\langle \mathcal{A}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, E - \hbar\omega/2) \right. \\ &\times \left. \mathcal{A}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, E + \hbar\omega/2) \right\rangle, \quad (31) \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) = (i/2\pi)[G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) - G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)]$ — (неусредненная) спектральная функция Грина. Разложение корреляционной функции $S(q, \omega, E)$ по случайному потенциалу дается теми же диаграммами, что и для проводимости, с той лишь разницей, что в вершинах вместо операторов тока фигурируют множители $e^{iq\mathbf{r}}$. Получить точный ответ для $S(q, \omega, E)$ не удастся ввиду необходимости учета вкладов всех порядков теории возмущений, однако для оценки можно воспользоваться следующим приемом. Поскольку нас интересуют характерные значения $|P_{\alpha\beta}^q|^2$ между состояниями, локализованными на длине $\xi \gg l_B$ и хорошо перекрывающимися друг с другом, их можно отождествить с делокализованными состояниями, возникающими в полоске энергий конечной ширины вблизи центра каждого из уровней Ландау при рассмотрении образца с размерами $L = \xi$. Пренебрежение эффектами локализации, проявляющимися на масштабах $L > \xi$, эквивалентно отбрасыванию всех диаграмм с самопересечениями, или говоря иначе — самосогласованному борновскому приближению. В

этом приближении функция S дается суммой лестничных диаграмм, которые могут быть просуммированы с использованием явного вида (усредненных) одночастичных функций Грина [20], в результате при малых q и ω (продиктованных условием низких температур) имеем

$$S(q, \omega, E) \propto \frac{\rho(E) D q^2}{\omega^2 + (D q^2)^2}, \quad (32)$$

где $D = (n + 1/2) l_B^2 \Gamma / \hbar$ — коэффициент диффузии, а $\rho(E)$ — плотность состояний, которую будем считать постоянной, рассматривая энергии вблизи центра уровня Ландау. Поскольку характерные значения передаваемой энергии $\hbar\omega$ соответствуют температуре T , а максимальное значение q определяется тепловым волновым вектором $q_T = T / \hbar s$, при достаточно низких температурах первое слагаемое в знаменателе (32) будет доминировать над вторым, так что

$$S(q, \omega) = \langle |P_{\alpha\beta}^q|^2 \rangle \propto \frac{q^2}{\omega^2}. \quad (33)$$

Подставляя (33) в формулу (13) и заменяя $\hbar\omega$ на T , получаем для величины характерного сопротивления

$$R_0 \propto T^{-2}, \quad (34)$$

откуда, используя формулу (29) с $m \propto T \xi^2$, имеем

$$\sigma_{xx} \propto T^2 \xi^2. \quad (35)$$

Приравняв (35) к константе порядка e^2/h и используя формулу (27), получаем, что ширина пика проводимости зависит от температуры как

$$\Delta E \propto T^k, \quad k = \frac{1}{\nu} \approx 0.42. \quad (36)$$

Заметим, что использование при выводе (36) диффузионного вида (32) корреляционной функции $S(q, \omega, E)$ не является на самом деле математически строгим, поскольку ее поведение при малых q и ω существенно зависит от соотношения между ними [15]. Однако из физических соображений ясно, что интересующий нас случай $\omega \gg D q^2$ соответствует относительно малым временам, на которых эффекты локализации еще не успевают проявиться и поведение системы можно свести к диффузии. Для полноценного описания диффузионного процесса самосогласованного борновского приближения, строго говоря, недостаточно, однако учет оставшихся диаграмм не является принципиальным, приводя к поправкам к коэффициенту диффузии [21], но не меняя вида формулы (32). Кроме того, как мы увидим в следующем разделе, полученное нами соотношение $k = 1/\nu$ хорошо согласуется с результатами численного моделирования и экспериментальными данными из литературы.

4. Численные расчеты и обсуждение

Для численного расчета проводимости квантово-холловской системы прежде всего необходимо определить вид одночастичных волновых функций $\Psi_\alpha(\mathbf{r})$, при этом удобно воспользоваться базисом „полосок Ландау“,

$$\Psi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} l_B L_x}} \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2l_B^2}\right) H_n\left(\frac{\tilde{y}}{l_B}\right), \quad (37)$$

где $\tilde{y} = y - kl_B^2$, H_n — полиномы Эрмита. В условиях сильного магнитного поля $\omega_c \tau \gg 1$ каждый из уровней Ландау можно рассматривать независимо, в результате, следуя [17], для уровня Ландау с номером n получаем энергии одноэлектронных состояний $E_{n\alpha}$ и соответствующие им волновые функции в виде

$$\Psi_{n\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_k C_{nk}^{(\alpha)} \Psi_{nk}(\mathbf{r}), \quad (38)$$

где $\alpha = 1 - N_L$ — номер одночастичного состояния на n -м уровне Ландау, $N_L = S/(2\pi l_B^2)$ — кратность вырождения уровней Ландау, S — площадь образца. В базисе (37) формулу (14) можно переписать в виде

$$P_{\alpha\beta}^{nq} = e^{-\frac{q^2 l_B^2}{2}} L_n\left(\frac{q^2 l_B^2}{2}\right) \sum_k C_{nk}^{(\alpha)*} C_{n,k-q_x}^{(\beta)} e^{ikq_y l_B^2}, \quad (39)$$

однако проводить вычисления по ней напрямую оказывается нерационально, так как для каждого α, β, q_x и q_y необходимо суммировать по всем возможным k . Воспользуемся тем, что нас интересует область достаточно низких температур, а значит, и малых волновых векторов фононов q_x и q_y (по сравнению с обратной магнитной длиной l_B^{-1}). Заменим индекс k на два: $k = k_x + \sqrt{N_L} k_y$, где k_x и k_y пробегает значения от 0 до $\sqrt{2\pi} l_B^{-1}$. Тогда

$$P_{\alpha\beta}^{nq} = e^{-\frac{q^2 l_B^2}{2}} L_n\left(\frac{q^2 l_B^2}{2}\right) \sum_{k_x, k_y} C_{nk_x k_y}^{(\alpha)*} C_{n, k_x - q_x, k_y}^{(\beta)} e^{ik_y q_y \sqrt{N_L} l_B^2}, \quad (40)$$

где в экспоненте можно пренебречь фазой $k_x q_y l_B^2$, считая $q_y \ll l_B^{-1}$ в силу малости температуры. Далее в формуле (40) необходимо произвести свертку по индексу k_x и преобразование Фурье по индексу k_y , что можно выполнить эффективно, воспользовавшись алгоритмом быстрого преобразования Фурье.

Рассчитывая $P_{\alpha\beta}^{nq}$ по формуле (40) и действуя по схеме, указанной в конце разд. 2, мы находим проводимость σ_{xx}^{e-ph} за счет электрон-фононного взаимодействия. Однако в области делокализованных состояний, вблизи центра уровня Ландау, использовать такой подход нельзя. Действительно, в этом случае для оценки интеграла $P_{\alpha\beta}^{nq}$ по формуле (39) можно использовать модель равномерно делокализованных уровней Ландау [17], считая коэффициенты $C_{nk}^{(\alpha)}$ случайно распределенными некоррелированным образом, что дает $\sigma_0 \propto \langle |P_{\alpha\beta}^{nq}|^2 \rangle \propto N_L^{-1}$. Иначе

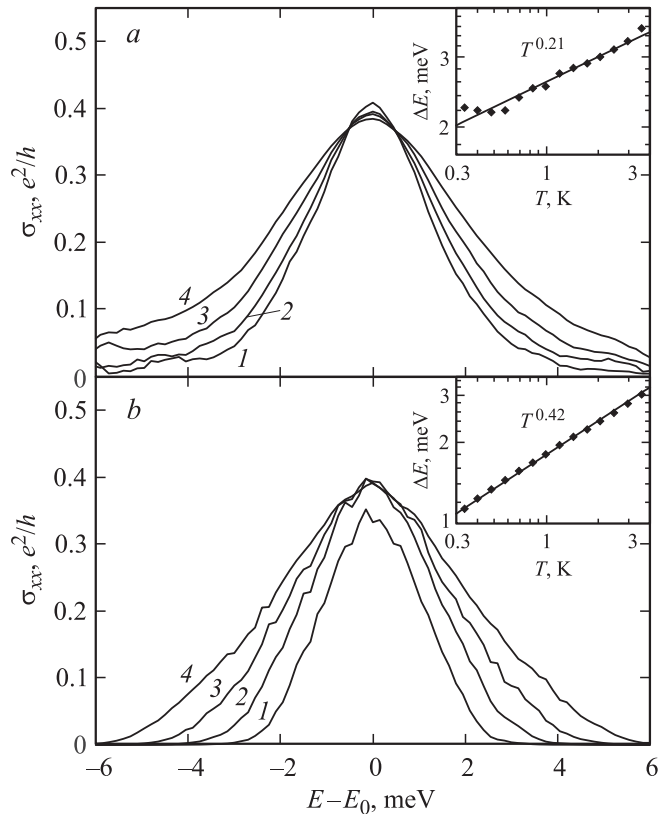


Рис. 3. Зависимости продольной проводимости σ_{xx} от положения уровня Ферми относительно центра основного уровня Ландау $n = 0$ при различных температурах: *a* — расчет по формуле Кубо (41), *b* — расчет с учетом электрон-фононного взаимодействия. Кривые 1–4 соответствуют температурам $T = 0.28, 0.48, 0.84, 1.44$ К, размер моделируемой системы составлял $L = 400l_B$ ($= 4 \mu\text{m}$ при магнитном поле $B = 6.5$ Тл), ширина уровней Ландау $\Gamma = 3$ мэВ, другие параметры: $\Xi = 10$ эВ, $\rho = 5$ г/см³, $s = 5 \cdot 10^5$ см/с. На вставках показаны зависимости ширины пиков проводимости от температуры.

говоря, мы имеем дело со случайной цепью из N_L^2 резисторов, связывающих попарно N_L узлов. Ток через сечение образца (которое выберем в середине) складывается из парциальных токов, протекающих через резисторы, соединяющие узлы по разные стороны от выбранного сечения. Число таких резисторов пропорционально N_L^2 , а напряжение на каждой паре узлов — порядка U , так что результирующая проводимость $\sigma_{xx} \propto \sigma_0 N_L^2 \propto N_L$, в противоречии с определением „интенсивной“ физической величины. Поэтому для оценки σ_{xx} в области делокализованных состояний применим подход, основанный на использовании формулы Кубо [17],

$$\sigma_{xx}^e(E) = \pi e^2 \hbar S D_F^2 \langle |v_x|^2 \rangle_T, \quad (41)$$

в которой в качестве энергетического интервала усреднения квадрата матричного элемента оператора скорости выбрана температура T (здесь D_F — плотность состояний на уровне Ферми). Хотя такая формула пре-

увеличивает влияние температуры на транспорт (эффективное время „сбоя фазы“ растёт быстрее, чем T^{-1}), она даёт правильную оценку для проводимости сверху, так как в результате электрон-фононного взаимодействия существенно смешиваться могут лишь состояния в температурной полоске около уровня Ферми. Учитывая, что ширина пика проводимости для σ_{xx}^e оказывается гораздо шире, чем для её бесфононного аналога, результирующую проводимость можно оценить с помощью формулы $\sigma_{xx}^{-1} = (\sigma_{xx}^{e-ph})^{-1} + (\sigma_{xx}^e)^{-1}$. Результаты расчёта таким способом представлены на рис. 3, где на вставках приведены зависимости ширины пиков, определенных как второй момент функции $\sigma_{xx}(E)$, от температуры T . Видно хорошее совпадение со степенной зависимостью $\Delta E \propto T^k$, где показатель степени $k = 1/\nu = 0.42$ согласуется с качественными рассуждениями, которые были проведены в разд. 3. Такое же значение индекса k наблюдалось экспериментально в работах, посвященных исследованию целочисленного квантового эффекта Холла в образцах с квантовыми ямами на основе твердых растворов (где хорошо выполняется условие коротковолнового случайного потенциала), в частности, в работе [22], где были проведены тщательные измерения вплоть до температур порядка 1 мК .

5. Заключение

Показано, что электрон-фононное взаимодействие приводит к конечной проводимости в области локализованных состояний и определяет зависимость ширины переходных областей между соседними плато квантового эффекта Холла от температуры. Разработана теория, позволившая на основании качественных соображений найти простую связь $k = 1/\nu$ между степенными показателями в зависимостях длины локализации от энергии ($\xi \propto |E - E_n|^{-\nu}$) и ширины переходных областей от температуры ($\Delta B \propto T^k$). Также проведены численные расчёты магнетотранспортных кривых в зависимости от температуры, результаты которых хорошо согласуются с формулой $k = 1/\nu$ и новейшими экспериментальными данными [22].

Работа выполнена при поддержке фонда „Династия“ и РФФИ (12-02-31276).

Список литературы

- [1] B. Huckestein. Rev. Mod. Phys., **67**, 357 (1995).
- [2] I.S. Burmistrov, S. Bera, F. Evers, I.V. Gornyi, A.D. Mirlin. Ann. Phys., **326**, 1457 (2011).
- [3] D.G. Polyakov, K.V. Samokhin. Phys. Rev. Lett., **80**, 1509 (1998).
- [4] F. Dietzel, W. Dietsche, K. Ploog. Phys. Rev. B, **48**, 4713 (1993).
- [5] A.J. Kent, D.J. McKitterick, L.J. Challis, P. Hawker, C.J. Mellor, M. Henini. Phys. Rev. Lett., **69**, 1684 (1992).
- [6] O. Heinonen, P.L. Taylor, S.M. Girvin. Phys. Rev. B, **30**, 3016 (1984).
- [7] A. Cresti, G.P. Parravicini. Phys. Rev. B, **78**, 115 313 (2008).
- [8] D.G. Polyakov, B.I. Shklovskii. Phys. Rev. Lett., **73**, 1150 (1994).
- [9] A.P. Dmitriev, V.Yu. Kachorovskii. Phys. Rev. B, **52**, 5743 (1995).
- [10] Ya.M. Blanter, D.V. Livanov. Phys. Rev. B, **49**, 2955 (1994).
- [11] H.L. Zhao, S. Feng. Phys. Rev. Lett., **70**, 4134 (1993).
- [12] T. Brandes, L. Schweitzer, B. Kramer. Phys. Rev. Lett., **72**, 3582 (1994); T. Brandes. Phys. Rev., B, **52**, 8391 (1995).
- [13] D. Bicout, P. Magyar, J. Riess. Phys. Rev. B, **57**, 7228 (1998).
- [14] J.T. Chalker, G.J. Daniell. Phys. Rev. Lett., **61**, 593 (1988).
- [15] J. Chalker, G. Daniell. Phys. Rev. Lett., **61**, 593 (1988).
- [16] В.Л. Бонч-Бруевич, И.П. Звягин, Р. Кайпер, Л.Г. Миронов, Р. Эндерлайн, Б.-М. Эссер. *Электронная теория неупорядоченных полупроводников* (М., Наука, 1981).
- [17] A.A. Greshnov, G.G. Zegrya, E.N. Kolesnikova. JETP, **107**, 491 (2008).
- [18] Q. Niu, D.J. Thouless, Y.S. Wu. Phys. Rev. B, **31**, 3372 (1985).
- [19] A.A. Greshnov, E.N. Kolesnikova, G.G. Zegrya. Semiconductors, **40**, 89 (2006).
- [20] A.A. Greshnov. Semiconductors, **46**, 759 (2012).
- [21] R.R.P. Singh, S. Chakravarty. Nucl. Phys., **B**, **265**, 265 (1985).
- [22] W. Li et al. Phys. Rev. Lett., **102**, 216 801 (2009).

Редактор Т.А. Полянская

On the influence of electron-phonon interaction on temperature dependencies of magnetotransport in the quantum Hall system

A.A. Greshnov, Y.M. Beltukov

Ioffe Physicotechnical Institute,
Russian Academy of Sciences,
194021 St. Petersburg, Russia

Abstract Influence of the electron-phonon interaction on the temperature dependencies of conductivity has been studied in the regime of the integer quantum Hall effect. It is shown that electron-phonon interaction leads to non-zero transport in the region of localized states thus forming shape of the magnetotransport curves at given temperature. Relation between scaling indices in the power laws describing quantum Hall plateau widths as functions of temperature and localization length as a function of energy counted from the corresponding Landau level center is established in the framework of an analytical model. Direct numerical calculations of the magnetotransport curves carried out at various temperatures are in good agreement with the theory and available experimental data on the quantum Hall effect.