

Распространение поперечных акустических импульсов пикосекундной длительности в системе крамерсовских дублетов

© С.В. Сазонов, Н.В. Устинов*

Российский научный центр „Курчатовский институт“,
123182 Москва, Россия

* Томский государственный университет,
634050 Томск, Россия

E-mail: sazonov.sergey@gmail.com, n_ustinov@mail.ru

(Поступила в Редакцию 18 июля 2007 г.)

Изучено распространение предельно коротких импульсов поперечной деформации в низкотемпературном кристалле, содержащем парамагнитные примеси с эффективным спином $S = 1/2$, в случае геометрии Фохта. Показано, что в результате спин-акустического взаимодействия между составляющими поля упругости могут формироваться различные типы акустических солитонов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 05-02-16422а).

PACS: 43.25.+y, 62.30.+d, 72.55.+s

1. Введение

Одной из тенденций развития физической акустики является разработка устройств, позволяющих генерировать и измерять акустические импульсы все более коротких длительностей [1,2]. Ситуация здесь в значительной степени аналогична развитию нелинейной оптики [3,4]. На сегодняшний день можно уверенно говорить о пикосекундной акустике как о сформировавшемся направлении научных исследований [5,6]. Отдельную ветвь таких исследований образует нелинейная акустика парамагнитных кристаллов при температурах жидкого гелия, берущая начало с открытия акустической самоиндуцированной прозрачности [7,8]. Температуры жидкого гелия необходимы в этих исследованиях по двум основным причинам. Во-первых, при столь низких температурах велика равновесная разность населенностей зеемановских подуровней, что обеспечивает сильное взаимодействие парамагнитных ионов с акустическим полем. Во-вторых, в таких условиях можно пренебречь акустическим затуханием, вызванным ангармонизмом колебаний кристаллической решетки, а также наличием у нее дефектов [6,9].

При описании распространения микро- и наносекундных акустических импульсов традиционно используется приближение медленно меняющихся огибающих [7,10–13]. Пикосекундные импульсы могут содержать всего несколько периодов упругих колебаний, т.е. являться предельно короткими импульсами, и в этом случае к ним уже неприменимо данное приближение. Однако если плотность парамагнитных примесей мала, то изучать динамику импульсов деформации можно на основе приближения однонаправленного распространения (ОР) [14]. Именно в рамках такого подхода в работах [15–18] было исследовано взаимодействие пикосекундных акустических импульсов с парамагнитными кристаллами. В частности, особенности нелинейной ди-

намики квазипродольных импульсов были изучены в [18] с помощью приближения ОР.

Парамагнитные примесные ионы характеризуются эффективным спином S , способным взаимодействовать с колебаниями кристаллической решетки (спин-акустическое взаимодействие). В простейшем случае парамагнитные ионы обладают эффективным спином $S = 1/2$. Магнитное поле вызывает расщепление уровней энергии таких ионов на крамерсовские дублеты, взаимодействие которых с колебаниями кристаллической решетки осуществляется за счет модуляции тензора Ланде полем деформации в условиях „замораживания“ орбитального момента [9]. При этом, как и в случае $S \geq 1$, акустические импульсы не только возбуждают квантовые переходы между спиновыми подуровнями, но также смещают частоту этих переходов.

Так как упругие волны в кристалле состоят в общем случае из нескольких компонент (двух квазипоперечных и квазипродольной), представляет интерес ситуация, когда какие-либо составляющие акустического импульса, воздействуя на квантовые переходы внутри зеемановских подуровней парамагнитных ионов, взаимодействуют тем самым между собой. Для эффективного проявления такого рода (спин-акустической) нелинейности необходимо, чтобы линейные скорости составляющих не сильно отличались друг от друга. Как правило, в кристаллах скорость продольного звука значительно превосходит скорость поперечных упругих волн [19,20]. По этой причине распространение импульсов продольной и поперечной деформации происходит практически независимо. В то же самое время в кубических и тетрагональных кристаллах существуют направления акустической симметрии, при распространении вдоль которых скорости обеих поперечных компонент равны [20,21]. Поэтому спин-акустическая нелинейность способна оказывать существенное влияние именно на динамику поперечных акустических импульсов.

Настоящее исследование посвящено выявлению особенностей нелинейной динамики пикосекундных акустических импульсов в системе крамерсовских дублетов при температурах жидкого гелия. В отличие от работ [15–17], где изучались продольно-поперечные акустические импульсы, здесь импульсы являются сугубо поперечными, что обеспечивает эффективное нелинейное взаимодействие между их составляющими.

2. Система волновых и материальных уравнений

Пусть тетрагональный (или кубический) кристалл содержит парамагнитные примеси с эффективным спином $S = 1/2$. Направим оси x , y и z декартовой системы координат вдоль осей симметрии кристалла. Будем считать, что поперечный акустический импульс распространяется вдоль оси x , а внешнее магнитное поле \mathbf{B} — параллельно оси z (геометрия Фохта). Рассмотрим одномерный случай, когда динамические переменные зависят только от координаты x и времени t . В этих условиях Гамильтониан \hat{H} спин-акустического взаимодействия имеет вид [9]

$$\hat{H} = -\hbar\omega_0 [\hat{\sigma}_z + F_{44}\mathcal{E}_{yx}\hat{\sigma}_y + F_{55}\mathcal{E}_{zx}\hat{\sigma}_z]/2. \quad (1)$$

Здесь $\omega_0 = g\mu_B B/\hbar$ — частота зеемановского расщепления крамерсовского дублета; g — фактор Ланде; μ_B — магнетон Бора; $B = |\mathbf{B}|$; $\mathcal{E}_{yx} = \partial u_y/\partial x$ и $\mathcal{E}_{zx} = \partial u_z/\partial x$ — компоненты тензора деформаций; u_y и u_z — декартовы компоненты вектора локальных смещений \mathbf{u} ; $F_{44} = g^{-1}(\partial g_{yx}/\partial \mathcal{E}_{yx})_0$ и $F_{55} = g^{-1}(\partial g_{zx}/\partial \mathcal{E}_{zx})_0$ — компоненты тензора спин-упругого взаимодействия (в обозначениях Фохта; нижний индекс „0“ означает дифференцирование в отсутствие акустического импульса); g_{jk} — компоненты тензора Ланде; $\hat{\sigma}_y$ и $\hat{\sigma}_z$ — матрицы Паули; \hbar — постоянная Планка.

Для вывода уравнений, описывающих динамику эффективных спинов и поля деформаций, применим полуклассический подход [7,15]. В соответствии с ним эволюция спиновой подсистемы подчиняется квантовомеханическому уравнению на матрицу плотности

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (2)$$

При этом поле упругого импульса будем описывать классическими уравнениями Гамильтона для непрерывной среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}} \left[H_a + \int n \langle \hat{H} \rangle d\mathbf{r} \right], \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta \mathbf{p}} \left[H_a + \int n \langle \hat{H} \rangle d\mathbf{r} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{p} — плотность импульса локальных смещений кристалла;

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left[\frac{p_y^2 + p_z^2}{\rho} + \rho a^2 (\mathcal{E}_{yx}^2 + \mathcal{E}_{zx}^2) \right] d\mathbf{r} \quad (4)$$

— гамильтониан свободного поля деформации; ρ — средняя плотность кристалла; n — концентрация парамагнитных ионов; $\langle \hat{H} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{H})$ — квантовое среднее оператора \hat{H} ; a — линейная скорость поперечной акустической волны. Интегрирование проводится по всему кристаллическому объему. Мы не учитываем диссипативные эффекты в уравнениях (2) и (3), поскольку длительность рассматриваемых импульсов короче всех времен релаксации, а самопоглощение звука вследствие ангармоничности решетки значительно меньше при гелиевых температурах, чем поглощение, обусловленное парамагнитными примесями [7,9].

Введем блоховские переменные

$$U = \frac{\rho_{21} + \rho_{12}}{2}, \quad V = \frac{\rho_{21} - \rho_{12}}{2i},$$

$$W = \frac{\rho_{22} - \rho_{11}}{2},$$

где ρ_{jk} ($j, k = 1, 2$) — элементы матрицы плотности. Тогда (1) и (2) дают следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = (\omega_0 + \Omega_z)V + \Omega_y W, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -(\omega_0 + \Omega_z)U, \quad (6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\Omega_y U, \quad (7)$$

где $\Omega_y = \omega_0 F_{44} \mathcal{E}_{yx}$, $\Omega_z = \omega_0 F_{55} \mathcal{E}_{zx}$. При этом из (1), (3) и (4) получим

$$\frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial x^2} = -\frac{n\hbar\omega_0^2 F_{44}^2}{4\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial x^2} = \frac{n\hbar\omega_0^2 F_{55}^2}{4\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Уравнения (5)–(9) описывают взаимодействие поперечного поля деформации с парамагнитным кристаллом в случае геометрии Фохта. Из (5)–(7) видно, что y -компонента Ω_y акустического импульса вызывает квантовые переходы между спиновыми подуровнями, в то время как z -компонента Ω_z динамически сдвигает частоту крамерсовского дублета. Отметим, что в случае акустических импульсов, рассмотренных в [18], обе эти функции выполнялись единственной квазипродольной импульсной составляющей.

Для дальнейшего упрощения уравнений сделаем численные оценки. Взяв для парамагнитных ионов Co^{2+} в кристалле MgO $n \sim 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, $\omega_0 \sim 10^{10} \text{ Hz}$, $\rho \sim 1 \text{ g/cm}^3$, $a \sim 5 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$ и $F_{44} \sim F_{55} \sim 10^3$ [7,9], получим, что безразмерные параметры $\eta_y = n\hbar\omega_0 F_{44}^2/4\rho a^2$

и $\eta_z = n\hbar\omega_0 F_{55}^2 / 4\rho a^2$, которые характеризуют вклад правых частей решений (8) и (9), имеют порядок 10^{-2} . Выполнение условий $\eta_y, \eta_z \ll 1$ позволяет применить к данным уравнениям приближение ОР [14] подобно тому, как это делалось в [22]. Введя новые независимые переменные $\tau = t - x/a$ и $\xi = \eta x$, где $\eta = \max(\eta_y, \eta_z)$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Тогда в первом порядке по η имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\frac{\eta}{a} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

для левой и правой частей уравнений (8) и (9) соответственно. Интегрирование по τ волновых уравнений, полученных таким образом, и применение (5)–(7) дают следующую систему в терминах исходных переменных x и t :

$$\frac{\partial \Omega_y}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega_y}{\partial t} = \frac{n\hbar\omega_0^2 F_{44}^2}{8\rho a^3} (\omega_0 + \Omega_z) U, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} = -\frac{n\hbar\omega_0^2 F_{55}^2}{8\rho a^3} \Omega_y U. \quad (11)$$

Уравнения (5)–(7), (10) и (11) описывают динамику поперечных акустических импульсов в парамагнитном кристалле при выполнении условий малой плотности ($\eta_y, \eta_z \ll 1$) в случае геометрии Фохта. Они обобщают хорошо известные в нелинейной оптике редуцированные уравнения Максвелла–Блоха (РМБ) [22]. Поскольку здесь импульс состоит из двух компонент, выполняющих разные функции, будем называть полученную систему двухкомпонентными уравнениями РМБ (ДРМБ). Система, эквивалентная уравнениям ДРМБ, была выведена в [17] при рассмотрении эволюции продольно-поперечного акустического импульса, распространяющегося параллельно внешнему магнитному полю (геометрия Фарадея). При этом одна из поперечных компонент поля деформации полагалась равной нулю, а скорости продольного и поперечного звуков считались равными. С практической точки зрения, эти условия являются труднодостижимыми. Также в работе [17] было обнаружено, что данная система, как и уравнения РМБ [22], интегрируема в рамках метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [23,24].

Следует отметить, что уравнения, отличающиеся только обозначениями от (5)–(7), (10), (11), возникли при изучении динамики двухкомпонентных электромагнитных импульсов в одноосном кристалле, содержащем двухуровневые квантовые частицы [25]. Кроме того, выведенные уравнения являются частным случаем системы модифицированных уравнений РМБ, тоже имеющей приложения в физической акустике [17,26].

Уравнения (10), (11) имеют интеграл движения

$$(\omega_0 + \Omega_z)^2 + F_{55}^2 \Omega_y^2 / F_{44}^2 = f(\tau)^2,$$

где функция $f(\tau)$ задана условиями на входе акустического импульса в среду. Данный интеграл определяет ограничения на амплитуды компонент поля деформации

$$|\Omega_y| \leq |f(\tau) F_{44} / F_{55}|, \quad |\omega_0 + \Omega_z| \leq |f(\tau)|.$$

Так как система (5)–(7), (10), (11) интегрируема с помощью МОЗР, она является условием совместности переопределенной системы линейных уравнений (пары Лакса)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \hat{L} \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \hat{A} \psi, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha \Omega_y & i\lambda(\omega_0 + \Omega_z + iq\Omega_y) \\ i\lambda(\omega_0 + \Omega_z - iq\Omega_y) & -\alpha \Omega_y \end{pmatrix}, \\ \hat{A} &= \frac{\beta}{2(\lambda^2 - 1)} \\ &\times \begin{pmatrix} iq\lambda^2 U + \alpha V & -i\lambda(W + \alpha U - iqV) \\ -i\lambda(W - \alpha U + iqV) & -iq\lambda^2 U - \alpha V \end{pmatrix} - \frac{\hat{L}}{a}. \end{aligned}$$

Здесь λ — спектральный параметр, $\psi = \psi(t, z, \lambda) = (\psi_1, \psi_2)^T$ — векторное решение,

$$q = \frac{F_{55}}{F_{44}}, \quad \alpha = \sqrt{q^2 - 1}, \quad \beta = \frac{n\hbar\omega_0^2 F_{44}^2}{8\rho a^3}.$$

Хорошо известно, что солитонные решения интегрируемых уравнений, которые во многих случаях представляют наибольший интерес с физической точки зрения, можно найти с помощью алгебраических методов. Одним из таких методов является техника преобразования Дарбу (ПД) [27]. Можно показать, что ПД пары Лакса (12) имеет вид

$$\tilde{\psi}_1 = (\mu\psi_1 - \lambda\varphi_1\psi_2/\varphi_2)/f, \quad \tilde{\psi}_2 = f(\mu\psi_2 - \lambda\varphi_2\psi_1/\varphi_1), \quad (13)$$

$$\tilde{\Omega}_y = \Omega_y - \frac{2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \ln f, \quad \tilde{\Omega}_z = \Omega_z + \frac{iq}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\varphi_1\varphi_2}{\delta_1\delta_2},$$

$$\tilde{U} = -U - \frac{i}{q\beta} \hat{D} \ln \frac{\varphi_1\delta_2}{\varphi_2\delta_1}, \quad \tilde{V} = V + \frac{2}{q\beta} \hat{D} \ln f,$$

$$\tilde{W} = W + \frac{i}{q\alpha\beta} \hat{D} \ln \frac{\varphi_1\varphi_2}{\delta_1\delta_2}, \quad (14)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ — решение уравнений (12) при $\lambda = \mu$,

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t}, \quad f = \sqrt{\frac{\varphi_1\delta_1}{\varphi_2\delta_2}},$$

$$\delta_1 = \alpha\varphi_1 - q\mu\varphi_2, \quad \delta_2 = \alpha\varphi_2 - q\mu\varphi_1.$$

Равенства (14) определяют новое („одетое“) решение уравнений ДРМБ (5)–(7), (10) и (11).

3. Особенности динамики эффективных спинов и поля деформации

В этом разделе на основе солитонных решений уравнений ДРМБ мы изучим взаимодействие поперечного поля деформации с системой крамерсовских дублетов. Возьмем в качестве исходного решения уравнений ДРМБ нулевой фон: $\Omega_y = \Omega_z = 0$, $U = V = 0$, $W = W_0$. Выражения для компонент решения φ пары Лакса (12) с $\lambda = \mu$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= c_1 \exp(\gamma) + c_2 \exp(-\gamma), \\ \varphi_2 &= c_1 \exp(\gamma) - c_2 \exp(-\gamma), \end{aligned} \quad (15)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные,

$$\gamma = \frac{i\mu}{2} \left[\omega_0(t - x/a) + \frac{\beta W_0 x}{1 - \mu^2} \right].$$

В дальнейшем постоянные c_1 и c_2 считаются такими, что получаемые с помощью ПД решения уравнений ДРМБ вещественны и не имеют особенностей. При этом, используя сдвиги по переменным t и x , их можно положить равными заданным величинам, выбранным из соображений удобства.

Пусть $\mu = i/\omega_0 t_p$, где t_p — вещественная постоянная. Подставив (15) в правые части равенств (14), получим односолитонный импульс уравнений ДРМБ. Если $|q| \geq 1$, то при соответствующем выборе постоянных c_1 и c_2 выражения для компонент поля деформации и инверсии населенности W можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \frac{2\omega_0 \sqrt{A} \operatorname{sh} \theta}{\Delta_1}, \quad \Omega_z = -\frac{2\omega_0 q^2}{\Delta_1}, \\ W &= W_0 \left[1 - \frac{2\omega_0^2 t_p^2}{(1 + \omega_0^2 t_p^2) \Delta_1} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\Delta_1 = A \operatorname{sh}^2 \theta + q^2, \quad A = q^2(1 + \omega_0^2 t_p^2) - \omega_0^2 t_p^2,$$

$$\theta = \frac{t - x/v}{t_p}, \quad v^{-1} = a^{-1} \left[1 - W_0 \frac{a\beta\omega_0 t_p^2}{1 + \omega_0^2 t_p^2} \right].$$

Из последнего соотношения в (16) видно, что W_0 имеет смысл начальной инверсии населенности спиновых подуровней. Свободным параметром солитона является t_p . В дальнейшем будем считать, что среда в отсутствие импульса находится в термодинамически равновесном состоянии: $W_0 < 0$. Скорость импульса v в этом случае меньше линейной скорости поперечного звука. Кроме того, для определенности будем считать

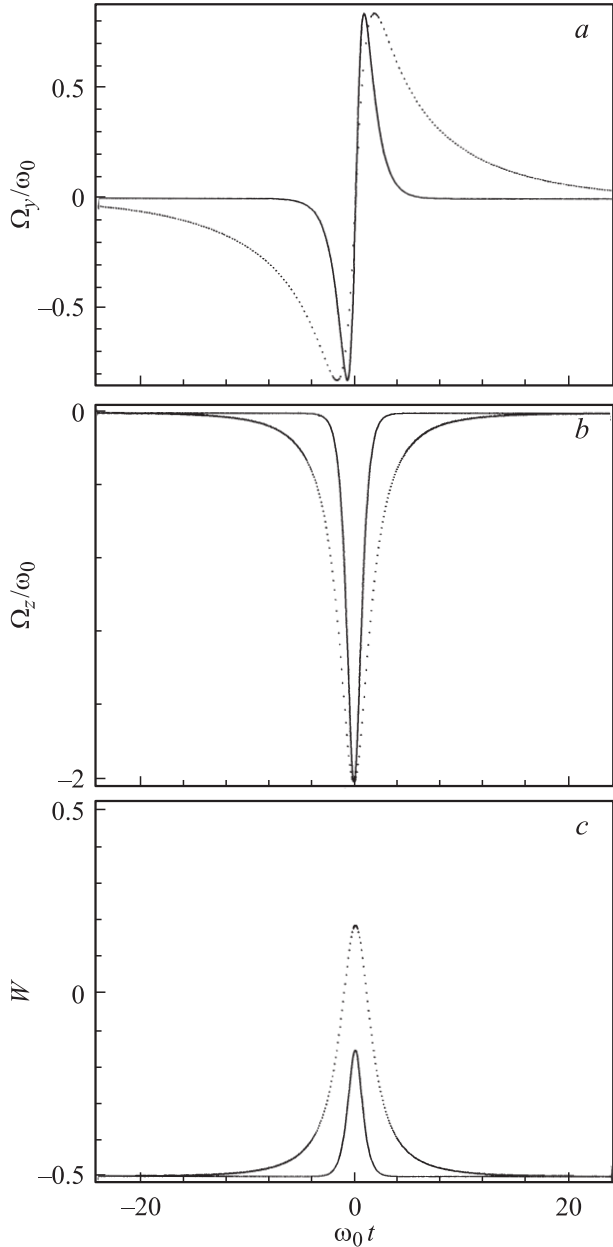


Рис. 1. Временные зависимости компонент поля деформации Ω_y (a), Ω_z (b) акустического импульса и инверсии населенности W (c) при $q = 1.2$, $W_0 = -0.5$ для $\tau_p = 1/\omega_0$ (сплошные линии) и $\tau_p = 8/\omega_0$ (пунктир). Координата x произвольна.

параметр t_p положительным. Чтобы не потерять при этом общность, договоримся, что квадратный корень из A в равенствах (16) принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Как следует из (16), компонента Ω_z поля деформации имеет асимметрию по полярности: $\Omega_z < 0$ (см. также рис. 1, b), т.е. частота квантового перехода динамически понижается при прохождении импульса. Наибольшее изменение населенности квантовых уровней происходит в центре импульса ($\theta = 0$), где уровни меняются местами, поскольку $\Omega_z(\theta = 0) = -2\omega_0$. Компонента Ω_y состоит

из двух горбов разной полярности (рис. 1, *a*), амплитуда Ω_{\max} которых не зависит от t_p ,

$$\Omega_{\max} = \frac{\omega_0}{|q|}.$$

Временной интервал между горбами равен

$$\delta t = t_p \ln \left| \frac{q + \sqrt{q^2 + A}}{q - \sqrt{q^2 + A}} \right|.$$

Наибольшее изменение населенности и временной интервал между горбами увеличиваются с ростом t_p (ср. сплошные и пунктирные кривые на рис. 1). При этом полной инверсии не достигается ($W(\theta = 0) < -W_0$), а временной интервал остается ограниченным: $\delta t < \delta t_{\max}$, где

$$\delta t_{\max} = \lim_{t_p \rightarrow \infty} \delta t = \frac{2|q|}{\omega_0|\alpha|}.$$

Чтобы пояснить последнее свойство, рассмотрим предел $t_p \rightarrow \infty$ в равенствах (16). Раскрыв неопределенности по правилу Лопиталя, получим алгебраически убывающий импульс уравнений ДРМБ

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \pm 2\alpha\omega_0^2\theta_r/\Delta_r, & \Omega_z &= -2\omega_0q^2/\Delta_r, \\ W &= W_0(1 - 2/\Delta_r), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_r &= (q^2 - 1)\omega_0^2\theta_r^2 + q^2, & \theta_r &= t - x/v_r, \\ v_r &= a/(1 - W_0a\beta/\omega_0). \end{aligned}$$

Здесь временной интервал между горбами равен δt_{\max} . Заметим, что в случае $|q| \geq 1$ длительность импульса равна по порядку величины δt .

Если $|q| < 1$, то односолитонные импульсы уравнений ДРМБ можно разбить на два семейства, соответствующие различным областям значений параметра t_p . При $t_p \leq t_c = \delta t_{\max}/2$ (или $A \geq 0$) существуют солитоны первого семейства, имеющие вид (16). Основные свойства этих солитонов такие же, как и в случае $|q| \geq 1$. Единственное отличие состоит в том, что интервал между горбами становится неограниченным при $t_p \rightarrow t_c$ ($A \rightarrow 0$). В центре импульса при этом происходит полная инверсия: $W(\theta = 0) = -W_0$.

Для солитонов второго семейства ($t_p > t_c$ или $A < 0$) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \frac{2\omega_0\sqrt{-A}\operatorname{ch}\theta}{\Delta_2}, & \Omega_z &= \frac{2\omega_0q^2}{\Delta_2}, \\ W &= W_0 \left[1 + \frac{2\omega_0^2t_p^2}{(1 + \omega_0^2t_p^2)\Delta_2} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\Delta_2 = A \operatorname{ch}^2 \theta - q^2.$$

Здесь компонента Ω_y имеет один горб при $t_p \geq 2t_c$ или два горба одинаковой полярности при $t_c < t_p < 2t_c$ (ср.

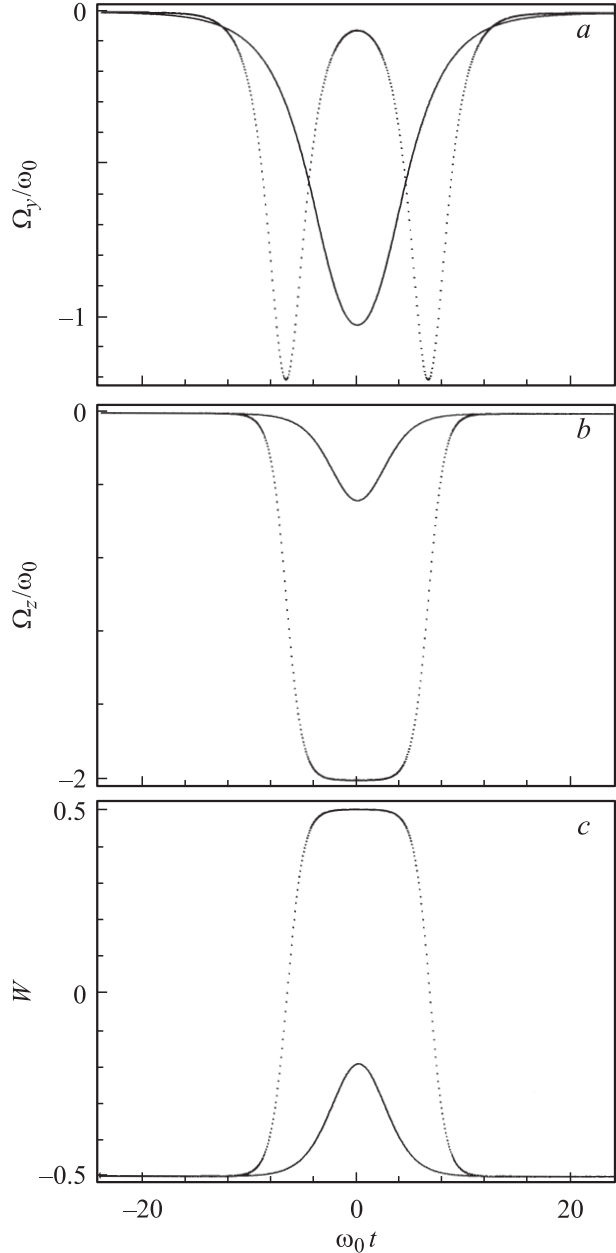


Рис. 2. Временные зависимости компонент поля деформации Ω_y (*a*), Ω_z (*b*) акустического импульса и инверсии населенности W (*c*) при $q = 1/1.2$, $W_0 = -0.5$ для $\tau_p = 3.1/\omega_0$ (сплошные линии) и $\tau_p = 1.508/\omega_0$ (пунктир). Координата x произвольна.

сплошные и пунктирные кривые на рис. 2, *a*). Амплитуды горбов и временной интервал между ними такие же, как у солитонов первого семейства. Наибольшее изменение и временной интервал между горбами увеличиваются при $t_p \rightarrow t_c$, т.е. с уменьшением t_p , а не с увеличением этого параметра, как в предыдущем случае. Компонента Ω_z тоже имеет асимметрию по полярности ($\Omega_z < 0$, рис. 2, *b*), но в отличие от случая солитонов первого семейства ее амплитуда в центре импульса меньше $2\omega_0$. Важное отличие от случая $|q| \geq 1$ состоит в том, что

компоненты поля деформации стремятся к нулю при $t_p \rightarrow \infty$.

Отметим, что условия $|q| < 1$ и $|q| > 1$ могут иметь место в одном и том же тетрагональном кристалле при распространении акустических импульсов вдоль разных осей симметрии.

Рассмотрим случай $|q| = 1$ (кубический кристалл). Здесь существуют импульсы первого семейства. Учитывая, что $A = 1$, из (16) находим

$$\Omega_y = \pm \frac{2\omega_0 \operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch}^2 \theta}, \quad \Omega_z = -\frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}^2 \theta},$$

$$W = W_0 \left[1 - \frac{2\omega_0^2 t_p^2}{(1 + \omega_0^2 t_p^2) \operatorname{ch}^2 \theta} \right].$$

Временной интервал между горбами компоненты Ω_y пропорционален t_p : $\delta t = t_p \ln(3 + 2\sqrt{2})$. Полная инверсия будет иметь место в пределе $t_p \rightarrow \infty$.

Мы видим, что при $|q| \leq 1$ временной интервал δt между горбами Ω_y может быть сколь угодно большим. Обсудим более подробно, как ведут себя эффективные спины в этих условиях. Первый горб компоненты Ω_y акустического импульса вызывает переходы внутри крамерсовских дублетов. Если временной интервал δt достаточно велик (т.е. $|t_p/t_c - 1| \ll 1$), то населенность возбужденного уровня оказывается больше, чем населенность основного ($W > 0$, пунктирная кривая на рис. 2, *c*). В отсутствие полей деформации такое состояние эффективных спинов не является устойчивым. Однако в рассматриваемом случае важную роль выполняет компонента Ω_z импульса (рис. 2, *b*). Она смещает уровни крамерсовских дублетов таким образом, что энергия возбужденного подуровня становится меньше энергии основного. Благодаря этому состояние эффективных спинов между горбами компоненты Ω_y устойчиво. Когда второй горб Ω_y приближается, z -компонента убывает, возвращая взаимное положение подуровней к исходному. Затем второй горб y -компоненты вызывает обратные переходы с возбужденного подуровня на основной, восстанавливая баланс энергии между импульсом и средой.

Поскольку изученные выше импульсы стационарные, их можно модифицировать на случай нередуцированных уравнений. Действительно, если скорость импульсов определить следующим образом:

$$v = a \sqrt{1 + W_0 \frac{2a\beta\omega_0 t_p^2}{1 + \omega_0^2 t_p^2}},$$

то равенства (16) и (18) дают решения уравнений (5)–(9).

Итерации ПД (13), (14) на нулевом фоне позволяют найти многосолитонные решения уравнений ДРМБ. Они описывают упругое взаимодействие односолитонных импульсов, уже рассмотренных в этом разделе, и так называемых бризеров друг с другом. Для получения решения, описывающего распространение одного бризера, надо

провести последовательность из двух ПД с решениями, у которых спектральные параметры равны

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{i}{\omega_0 t_p}$$

(ω и t_p — положительные постоянные) и μ^* . Если $|q| \geq 1$, то бризерный импульс можно привести к следующему виду:

$$\Omega_y = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{s_+ s_+^*}{s_- s_-^*}, \quad \Omega_z = \frac{i q}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{s_+ s_-}{s_+^* s_-^*},$$

$$W = W_0 + \frac{i}{q\alpha\beta} \hat{D} \ln \frac{s_+ s_-}{s_+^* s_-^*}, \quad (19)$$

где

$$s_{\pm} = \omega t_p [r_+ \exp(\theta_R) + r_- \exp(-\theta_R)]$$

$$\pm i [r_+ \exp(i\theta_I) + r_- \exp(-i\theta_I)],$$

$$r_{\pm} = (q\omega \pm \alpha\omega_0)t_p - iq,$$

$$\theta_R = \frac{t - x/v_g}{t_p}, \quad \theta_I = \omega(t - x/v_{ph}),$$

$$v_g = a \left[1 - \frac{W_0 a \beta \omega_0 t_p^2 (1 + (\omega_0^2 + \omega^2)t_p^2)}{1 + 2(\omega_0^2 + \omega^2)t_p^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 t_p^4} \right]^{-1},$$

$$v_{ph} = a \left[1 + \frac{W_0 a \beta \omega_0 t_p^2 (1 - (\omega_0^2 - \omega^2)t_p^2)}{1 + 2(\omega_0^2 + \omega^2)t_p^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 t_p^4} \right]^{-1}.$$

Свободными параметрами бризера являются постоянные t_p и ω , определяющие его длительность и несущую частоту. Заметим, что выражения в правых частях равенств (19) вещественны, и их можно переписать в виде, не содержащем мнимую единицу. Мы не используем его, поскольку получающиеся при этом формулы более громоздки.

Для временной площади $A_z = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_z dt$ z -компоненты данного бризерного импульса имеем следующее выражение:

$$A_z = -\frac{4q}{\alpha} \left[\arctg \frac{(q\omega + \alpha\omega_0)t_p}{q} - \arctg \frac{(q\omega - \alpha\omega_0)t_p}{q} \right].$$

Видно, что при любых знаках коэффициентов q и α выполняется неравенство $A_z < 0$, т.е. частота перехода эффективно понижается при прохождении импульса. С увеличением несущей частоты бризера ($\omega \rightarrow \infty$) временная площадь A_z стремится к нулю, стартуя при $\omega = 0$ со значения, равного удвоенной временной площади z -компоненты решения (16). Если $t_p \rightarrow \infty$, то A_z стремится при $\omega < \omega_0|\alpha/q|$ к величине $-4\pi|q/\alpha|$, которая равна удвоенной площади компоненты Ω_z рационального импульса (17), или стремится к нулю при $\omega > \omega_0|\alpha/q|$. С уменьшением t_p площадь A_z также убывает по абсолютной величине до нуля.

Временные зависимости компонент поля деформации и инверсии населенности бризерного импульса (19) приведены на рис. 3 и 4. Сравнив кривые на рис. 3, *b* и 4, *b*, видим, что возбуждение среды будет сильнее при $\omega < \omega_0$. Это вызвано влиянием компоненты Ω_z импульса, которая динамически понижает частоту перехода между спиновыми подуровнями и втягивает тем самым компоненту Ω_y в резонанс. Если $\omega > \omega_0$, то Ω_z , наоборот, уводит y -компоненту бризера из резонанса.

Из представленных графиков видно, что z -компонента и инверсия населенности имеют ярко выраженные нулевую и вторую гармоники, относительные вклады которых в Ω_z примерно равны. Отметим в этой связи, что применение приближения медленно меняющихся огибающих к уравнениям ДРМБ (5)–(7), 10 и (11) дает систему синхронизма длинных и коротких волн, подробно исследованную в [13,28]. В ходе изучения свойств решений этой системы было обнаружено, что импульсы могут проходить через резонансную среду в режимах, отличающихся от самоиндуцированной прозрачности. Ключевую роль при этом играет компонента, сдвигающая уровни энергии.

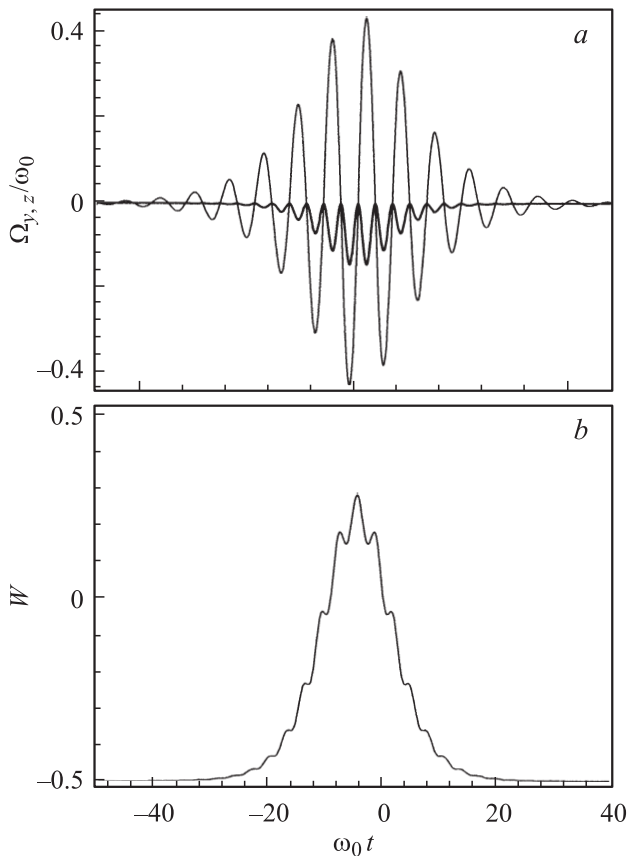


Рис. 3. Временные зависимости компонент поля деформации (Ω_y — тонкая сплошная линия, Ω_z — жирная сплошная линия) (а) и инверсии населенности W (б) бризерного импульса при $q = 1.2$, $W_0 = -0.5$, $\tau_p = 8/\omega_0$ и $\omega = 1.05\omega_0$. Координата x произвольна.

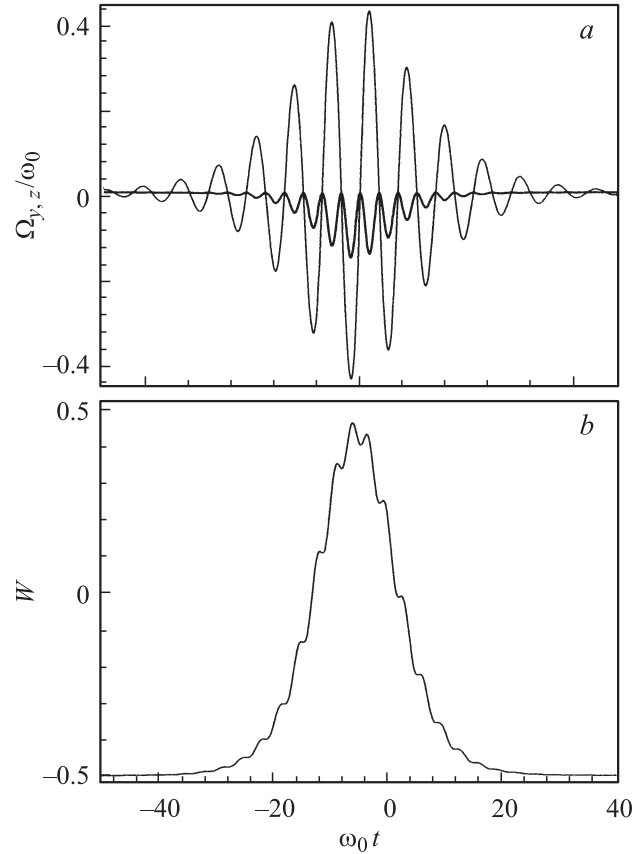


Рис. 4. Временные зависимости компонент поля деформации (Ω_y — тонкая сплошная линия, Ω_z — жирная сплошная линия) (а) и инверсии населенности W (б) бризерного импульса при $q = 1.2$, $W_0 = -0.5$, $\tau_p = 9/\omega_0$ и $\omega = 0.95\omega_0$.

Рационально убывающий бризер может быть получен из (19) в пределе $t_p \rightarrow \infty$, только если $\omega < \omega_0|\alpha/q|$. Его частным случаем при $\omega = 0$ является решение, описывающее взаимодействие двух алгебраических импульсов (17).

Для получения бризерного решения в случае $|q| < 1$ необходимо в равенствах (19) сделать замены:

$$s_{\pm} \rightarrow \omega t_p \operatorname{ch} \theta_R \pm i \cos \theta_I,$$

$$s_{\pm}^* \rightarrow \omega t_p [q_- \exp(\theta_R) + q_+ \exp(-\theta_R)]$$

$$\mp i [p_- \exp(i\theta_I) + p_+ \exp(-i\theta_I)],$$

где

$$q_{\pm} = q^2 \omega^2 t_p^2 + \left(q \pm \sqrt{1 - q^2 \omega_0 t_p} \right)^2,$$

$$p_{\pm} = q^2 \omega^2 t_p^2 + \left(q \pm i \sqrt{1 - q^2 \omega_0 t_p} \right)^2.$$

Выражения для θ_R , θ_I , фазовой и групповой скоростей останутся без изменений. Здесь временная площадь z -компоненты равна

$$A_z = -\frac{2q}{\sqrt{1-q^2}} \ln \frac{q_+}{q_-}.$$

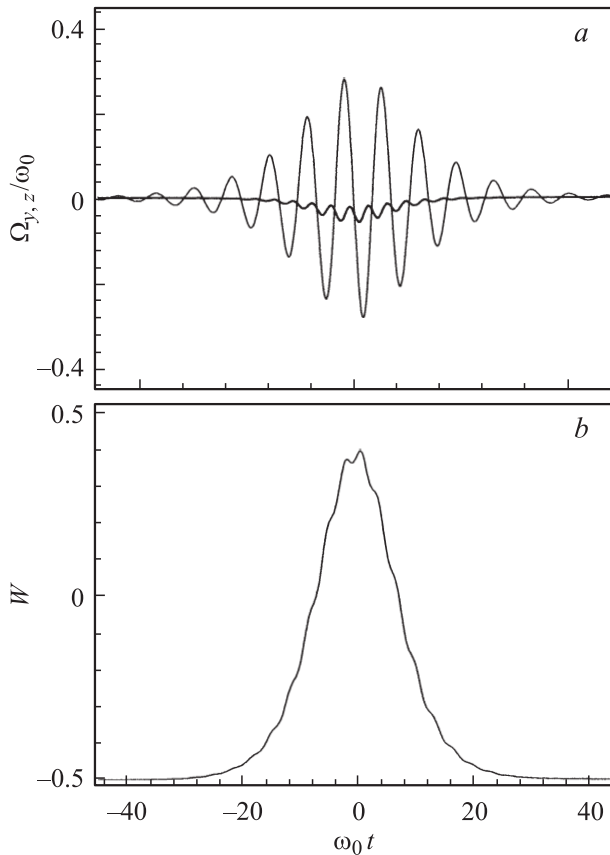


Рис. 5. Временные зависимости компонент поля деформации (Ω_y — тонкая сплошная линия, Ω_z — жирная сплошная линия) (a) и инверсии населенности W (b) бризерного импульса при $q = 1/1.2$, $W_0 = -0.5$, $\tau_p = 9/\omega_0$ и $\omega = 0.95\omega_0$.

Можно показать, что $A_z < 0$, как и в предыдущем случае. Важное отличие от импульса (19) состоит в том, что временная площадь стремится к нулю при $t_p \rightarrow \infty$, а наиболее сильно она отличается от нуля, если

$$\tau_p = \frac{|q|}{\sqrt{\omega_0^2 + q^2(\omega^2 - \omega_0^2)}}.$$

Графики компонент поля деформации и инверсии населенности бризерного импульса при $|q| < 1$ представлены на рис. 5. Как и следовало ожидать, эффективность генерации z -компоненты и ее влияние в данном случае меньше, чем при $|q| \geq 1$. Сравнив жирные сплошные кривые на рис. 3, a, 4, a и 5, a, видим, что при $|q| < 1$ относительный вклад второй гармоники в компоненту Ω_z практически не изменился.

4. Заключение

В настоящей работе мы рассмотрели распространение двухкомпонентных предельно коротких поперечных акустических импульсов в системе крамерсовских дублетов, находящейся в низкотемпературном кристалле, в

направлении, перпендикулярном внешнему магнитному полю. В этих условиях составляющие акустических импульсов выполняют строго различные функции: компонента, перпендикулярная магнитному полю, вызывает квантовые переходы между спиновыми подуровнями, а компонента, параллельная полю, сдвигает частоту расщепления крамерсовского дублета. Равенство линейных скоростей поперечных упругих волн при распространении вдоль оси акустической симметрии кристалла обеспечивает эффективное спин-акустическое взаимодействие между импульсными составляющими.

Изучены свойства акустических импульсов, которые формируются в результате такого спин-акустического взаимодействия. Эти импульсы ограничены по амплитуде и имеют асимметрию по полярности одной из компонент: знак той составляющей поперечного поля деформации, которая смещает частоту перехода между спиновыми подуровнями, таков, что частота понижается при прохождении импульса. Ограничения по амплитуде являются следствием существования у уравнений, описывающих рассмотренный здесь процесс, интеграла движения. Также обнаружено, что характеристики упругих импульсов существенно зависят от соотношения между компонентами тензора спин-упругого взаимодействия. Так, при распространении вдоль одной из осей симметрии тетрагонального кристалла могут существовать стационарные импульсы только одного вида, причем эти импульсы ограничены по длительности. При распространении вдоль другой оси симметрии возможны стационарные акустические импульсы двух видов. В этом случае длительность импульсов может быть любой. Если кристалл обладает кубической структурой, то в нем существуют импульсы одного вида, но их длительность тоже может быть любой. В случае нестационарных импульсов нелинейное взаимодействие между компонентами поля деформации тоже играет важную роль. Так, за счет динамического сдвига частоты перехода бризерный импульс может входить в резонанс (либо уходить из резонанса) со средой.

Список литературы

- [1] K. Naugolnykh, L. Ostrovsky. Nonlinear wave processes in acoustic. Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [2] H.-Y. Nao, H.J. Maris. Phys. Rev. B **64**, 064 302 (2001).
- [3] С.А. Ахманов, В.А. Выслоух, А.С. Чиркин. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. Наука, М. (1988).
- [4] А.В. Ким, М.Ю. Рябикин, А.М. Сергеев. УФН **169**, 58 (1999).
- [5] С.А. Ахманов, В.Э. Гусев. УФН **162**, 3 (1992).
- [6] В.А. Голенищев-Кутузов, В.В. Самарцев, Н.К. Соловаров, Б.М. Хабибулин. Магнитная квантовая акустика. Наука, М. (1997).
- [7] N.S. Shiren. Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
- [8] В.В. Самарцев, Б.П. Смоляков, Р.З. Шарипов. Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).
- [9] Дж. Такер, Р. Рэмington. Гиперзвук в физике твердого тела. Мир, М. (1975).

- [10] Г.А. Денисенко. *ЖЭТФ* **60**, 2269 (1971).
- [11] G.T. Adamashvili. *Physica B* **266**, 173 (1999).
- [12] С.В. Воронков, С.В. Сазонов. *ЖЭТФ* **120**, 269 (2001).
- [13] S.V. Sazonov, N.V. Ustinov. *Phys. Rev. E* **73**, 056 614 (2006).
- [14] J.C. Eilbeck, R.K. Bullough. *J. Phys. A: Gen. Phys.* **5**, 820 (1972); J.C. Eilbeck. *J. Phys. A: Gen. Phys.* **5**, 1355 (1972).
- [15] С.В. Сазонов. *ЖЭТФ* **118**, 20 (2000).
- [16] А.А. Заболотский. *ЖЭТФ* **123**, 560 (2003).
- [17] А.А. Заболотский. *ЖЭТФ* **123**, 1239 (2003).
- [18] С.В. Сазонов, Н.В. Устинов. *ЖЭТФ* **129**, 849 (2006).
- [19] О. Андерсон. В сб.: *Физическая акустика*. Т. 3. Ч. Б. Динамика решетки / Под ред. У. Мэзона. Мир, М. (1968).
- [20] Ч. Киттель. *Введение в физику твердого тела*. Физматлит, М. (1963).
- [21] В.А. Красильников, В.В. Крылов. *Введение в физическую акустику*. Наука, М. (1984).
- [22] J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, P.J. Caudrey, R.K. Bullough. *J. Phys. A: Math. Nucl. Gen.* **6**, 1337 (1973); J.D. Gibbon, P.J. Caudrey, R.K. Bullough, J.C. Eilbeck. *Lett. Nuovo Cimento* **8**, 775 (1973).
- [23] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. *Теория солитонов: метод обратной задачи*. Наука, М. (1980).
- [24] Дж.Л. Лэм. *Введение в теорию солитонов*. Мир, М. (1983).
- [25] N.V. Bakhar, N.V. Ustinov. *Proc. SPIE* **6181**, 61810Q-1 (2006).
- [26] С.В. Сазонов, Н.В. Устинов. *ТМФ* **151**, 228 (2007).
- [27] V.B. Matveev, M.A. Salle. *Darboux transformations and solitons*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg (1991).
- [28] С.В. Сазонов, Н.В. Устинов. *ЖЭТФ* **127**, 289 (2005).