Письма в ЖТФ, том 18, вып. 24 26 декабря 1992 г.

01; 09

ГЕНЕРАТОР ФРАКТАЛЬНОГО СИГНАЛА

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов

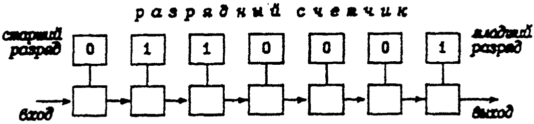
В радиотехнике хорошо известны периодические, квазипериодические и шумовые сигналы. Успехи нелинейной теории привели к расширению этого семейства и введению в рассмотрение сигналов, генерируемых простыми нелинейными системами в режиме хаотической динамики. Такие сигналы вблизки к шумовым по ряду признаков (сплошной спектр, экспоненциально спадающая корреляционная функция и т.д.), а по ряду признаков отличаются (например, невысокая величина хаусдорфовой размерности). Системы со сложной динамикой, однако демонстрируют еще один класс сигналов, которые можно было бы назвать „фрактальными". Такие сигналы генерируются точно на пороге хаоса, как говорят, в критическом состоянии [1–4]. Простейшим примером может служить логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \tag{1}$$

в критической точке λ_0=1.40115518909. Переменная x в этой случае пробегает по фрактальному множеству, характеризующемуся дробной величиной хаусдорфовой размерности D_H=0.5380450. Спектр такого сигнала содержит бесконечное число линий и обладает иерархической организацией по уровням субгармоник. Существуют определенные закономерности в построении линий разных уровней, простейшая из них состоит в том, что средний перепад между субгармониками соседних уровней составляет 13.4 дБ. Сигналы с подобными свойствами генерируют любые нелинейные системы, демонстрирующие переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, благодаря универсальности, открытой Фейгенбаумом.

К настоящему времени установлены и другие варианты критического поведения на пороге хаоса. Это трикритическая динамика двухпараметрических одномерных отображениях [3, 4], бикритическая и мультикритическая динамика двух односторонне связанных фейгенбаумовских подсистем [5–7], специфическое критическое состояние двух взаимоно связанных таких подсистем [8] и другие. Во всех критических состояниях реализуется характерный „фрактальный" сигнал, отличие состоит лишь в количественных характеристиках его иерархической организации (величина хаусдорфовой размерности, скейлинг–спектр, спектр и т. д.).

В свете этих результатов возникает естественный интерес к задаче о воздействии фрактальных сигналов на нелинейные системы.



Оказывается, можно сконструировать генератор, который будет генерировать фрактальный сигнал с регулируемыми свойствами. Представим себе двоичный N - разрядный счетчик. Пусть каждый элемент такого счетчика связан с двухполюсником, который может находится в двух состояниях. Если в соответствующем разряде счетчика находится 0, то на выходе двухполюсника сигнал равен $b\,(1+x)$, где x - входной сигнал. Если в этом разряде находится 1, то на выходе двухполюсника сигнал равен $-a\,(1+x)$. Здесь a и b некоторые регулируемые параметры. Все двухполюсники связаны в цепочку, как показано на рисунке. На вход этой цепочки подается сигнал $x_{вх} = b/(1-b)$. Нетрудно показать, что на выходе такой цепочки будет генерироваться сигнал, описываемый рекуррентным соотношением:

$$x_{2n} = b(1+x_n), \quad x_{2n+1} = -a(1+x_n). \tag{2}$$

Здесь n - дискретное время, отсчитываемое счетчиком. Пусть счетчик содержит „бесконечно много" элементов N. Тогда переменная x_n в ходе эволюции в соответствии с соотношением (2) будет пробегать на оси x по элементам двухмасштабного канторова множества, расположенного на отрезке $[-a/(1-b),\ b/(1-b)]$. При конечном числе разрядов в счетчике N мы будем получать аппроксимацию двухмасштабного конторова множества до уровня N построения из отрезков конечной длины, или, иными словами, правильно описывать динамику „истинного" фрактального сигнала на временах 2^N.

Для спектра колебаний фрактального генератора при $b \neq 0$, $a \neq 0$ справедливо точное выражение

$$\frac{a^2+b^2 \pm 2ab\cos(\pi\omega/2)}{4a^2b^2}\cdot S_n(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega/2), & \text{знак „+"} \\ S_{n+1}(1-\omega/2), & \text{знак „−"}, \end{cases} \tag{3}$$

где S_n и S_{n+1} - спектральные компоненты n-го уровня иерархии.

Предложенный генератор фрактального сигнала можно использовать с различными целями. В настоящее время широкое распространение получили разнообразные методы обработки сложных сигналов, генерируемых реальными нелинейными системами, в результате которых получают величину фрактальной размерности [9, 10] и скейлинг-спектр [11]. При этом встает вопрос об „эталоне", который давал бы сигнал с известными характеристиками, причем, естественно желательно, чтобы величина этих характеристик могла регулироваться. Описанный генератор фрактального сигнала может быть таким эталоном. Действительно, величина хаусдорфовой размерности D двухмасштабного канторова множества вычисляется из простого соотношения [11]:

$$a^{D}+b^{D}=1. \tag{4}$$

Достаточно просто вычисляется для двухмасштабного канторова множества и скейлинг-спектр, а также полный спектр обобщенных размерностей. Таким образом, выбрав параметры генератора a и b можно обеспечить некоторую величину фрактальной размерности (хаусдорфовой, корреляционной, информационной и т.д.), а затем сравнить с экспериментально измеренным значением.

Генератор можно использовать также для фундаментальных экспериментальных исследований в области нелинейной динамики. Действительно при вариации параметров сигнала (1) фейгенбаумовское поведение сменяется другим типом критической динамики, чему соответствует бифуркация слияния и обмена характера устойчивости неподвижных точек уравнения ренормгруппы [12-13]. За порогом этой бифуркации все критические индексы начинают зависеть от параметров воздействующего сигнала. С помощью генератора фрактального сигнала такой феномен можно изучить экспериментально, а также исследовать другие возможные эффекты в задаче о воздействии сигнала с иерархической организацией на нелинейные системы.

Список литературы

[1] Feigenbaum M.J. // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. N 1. P. 25.

[2] Hu B. // Phys. Rep. 1982. V. 91. N 5. P. 233.

[3] Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.// Phys. Rev. 1981. V. A24. N 5. P. 2669.

[4] Schell M., Fraser S.,Kapral R.// Phys. Rev. 1983. V. A28. N 1. P. 373.

[5] Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Кузнецов С.П. и др. // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 3. С. 619.

[6] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 4. С. 357.

[7] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. // Int. J. Bifurcation & Chaos. 1991. V. 1. N 4. P. 839-848.

[8] Kuznetsov S.P., Sataev I.R. // Phys. Lett. 1992. V. A162. P. 236.

[9] М у н Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 312 с.
[10] Б е р ж е П., П о м о И., В и д а л ь К. Порядок в хаосе. М., Мир, 1991. 368 с.
[11] H a l s e y T., J e n s e n M. et al. //Phys. Rev. 1986. V. 33. N 2. P. 1141.
[12] K u z n e t s o v A.P., K u z n e t s o v S.P., S a t a e v I.R. // Chaos, Solitons & Fractals. 1991. V. 1. N 4. P. 355.
[13] К у з н е ц о в А.П., К у з н е ц о в С.П., С а т а е в И.Р. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. № 6. С. 661.

Поступило в Редакцию
20 ноября 1992 г.