Письма в ЖТФ, том 18, вып. 23 12 декабря 1992 г.

01

О ПЕРЕХОДЕ К ДИНАМИЧЕСКОМУ ХАОСУ В СИСТЕМАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ КОРТЕВЕГА – де ВРИЗА

Ю.Н. З а й к о

Волновые системы при переходе к хаосу демонстрируют гораздо более богатый набор сценариев по сравнению с колебательными [1]. Тем не менее, большинство методов описания и критериев перехода к хаосу в теории волн заимствованы из теории колебаний [2, 3]. Как правило, они носят качественный характер. В настоящей работе предложен метод описания перехода к хаосу, применимый к системам, основные уравнения которых могут быть приведены к уравнению КдВ или схожим с ним и позволяющий получать некоторую количественную информацию. Результаты работы не противоречат интегрируемости уравнения КдВ на бесконечной прямой или для задачи с периодическими условиями, которая и рассмотрена ниже, во-первых, потому, что конечнозонные потенциалы, для которых доказана интегрируемость, не возникают в реальных задачах и, во-вторых, потому, что уравнение КдВ, появляющееся в приложениях, содержит коэффициенты при производных, поведение которых (см. ниже) не всегда позволяет привести его к известной стандартной форме, для которой и доказана интегрируемость. Основная идея метода заимствована также из теории колебаний, а именно – из описания перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода [4]. Понятие бифуркации или ветвления решения нелинейного волнового уравнения возникает в теории нелинейных интегральных уравнений [5].

Рассмотрим конкретную задачу о волнах в одномерном электронном потоке, взаимодействующем с волноведущей структурой (ЭП–ВС) – одномерной гидродинамической модели лампы с бегущей волной без учета обгона. Исходные уравнения этой задачи могут быть методом многомасштабных разложений приведены к уравнению КдВ [6]:

$$
\begin{gathered}
v_\tau + A v v_x + B v_{xxx} = 0, \\
A = \frac{3}{2}(u-1)\left[u - 1 + \frac{u\delta}{(\gamma u^2-1)^2}\right]^{-1}, \quad B = \frac{1}{2\sigma^4}\left[u-1+\frac{u\delta}{(\gamma u^2-1)^2}\right]^{-1},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

v – переменная составляющая скорости потока, τ – время, x – координата (безразмерные), γ – параметр рассинхронизма средней скорости потока и волны в структуре, δ – параметр пространственного заряда, σ – параметр экранировки волн пространственного заряда в ЭП, вызванной наличием ВС, в длинноволновом приближении,

u – скорость длинноволновых возмущений, определяемая из уравнения:

$$K(u)=\frac{\delta u^2}{\gamma u^2-1}+\frac{1}{\sigma^2}-(u-1)^2=0. \qquad (2)$$

Точные выражения для всех величин и их вывод приведены в [6].

Уравнение (1) для $v=v(x-c\tau)$ приводится к виду:

$$v_{xx}-\frac{c}{B}v=-\frac{1}{2}\frac{A}{B}v^2, \qquad c>0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) в общем случае имеет четыре корня, два из которых (u_1 и u_2) могут быть комплексно-сопряженными. Рассмотрим такое изменение параметров задачи γ, δ, σ, при котором $u_1\to u_2$, что предшествует их выходу в комплексную плоскость. Предельное положение $u_1=u_2$ определяется из уравнения $K(u)=K'(u)=0$, что влечет за собой $|A| = |B| = \infty$. Рассмотрим то из значений $u_{1,2}\doteq u_n$, для которого $B<0$ и запишем решение (3) с условиями $v(-1)=v(1)$, $v'(-1)=v'(1)$.[1] Нормировать длину пространства взаимодействия можно подходящим масштабным преобразованием:

$$v(y)=\mu\cdot\int_{-1}^{1}G(y,z)v^2(z)dz, \quad \mu=\frac{1}{2}\frac{A}{c}, \quad y=\sqrt{-\frac{c}{B}}\cdot(x-c\tau), \qquad (4)$$

где $G(y,z)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi(y-z)}{(n\pi)^2-1}$ – функция Грина уравнения (3) с периодическими граничными условиями. Можно показать [5], что в данном случае все ненулевые характеристические значения интегрального уравнения (4) $(n\pi)^2-1$ являются точками ветвления уравнения (4), т.е. $\mu_n=(n\pi)^2-1$, или

$$(n\pi)^2-1=\frac{3}{4c}\;\frac{u_n-1}{u_n-1\;\dfrac{u_n\delta}{(\gamma u_n^2-1)^2}}. \qquad (5)$$

Из (5) видно, что слиянию $u_1\to u_2=u_\infty$ соответствует значение $n=\infty$, т.е. множество точек ветвления бесконечно и имеет предельную точку. При этом само это множество зависит от того, как менялись параметры задачи. По аналогии с теорией колебаний можно предположить, что дальнейшее изменение параметров γ, δ, σ, при котором u_1 и u_2 выходят в комплексную плоскость, приводит к

[1] Другой корень, соответствующий противоположному знаку дисперсии и противоположной полярности начального возмущения, допускает аналогичное рассмотрение.

хаосу. Вопрос о реализации определенного сценария перехода пока остается открытым, хотя уже ясно, что он связан с неограниченным ростом периода волны. Система уравнений $K(u)=0$, $K'(u)=0$ определяет поверхность в пространстве параметров γ, δ, σ, разделяющую области регулярного и хаотического поведения. Дальнейшее развитие этого подхода, как и его экспериментальная проверка, представляют самостоятельный интерес.

Можно показать, что приведенные рассуждения не являются чисто умозрительным построением, а соответствуют интуитивному физическому представлению о хаосе. Для этого рассмотрим задачу о волнах поляризации в нелинейном диэлектрике, которая без учета затухания также приводит к уравнению КдВ (1) [7]. При этом выражения для коэффициентов A и B, а также вид $K(u)$ зависят от типа решетки кристалла, а именно от наличия или отсутствия центра симметрии, что также определяет и характер фазового перехода – типа смещения или типа порядок–беспорядок [8]. Можно показать, что это различие тесным образом связано с различием в результатах рассуждений по приведенной выше схеме, а именно: в кристаллах с решеткой, обладающей центром симметрии и характеризующихся фазовым переходом типа смещения ($BaTiO_3$), ему предшествует конечное число точек бифуркации уравнения (4), тогда как в кристаллах с решеткой без центра симметрии (KDP) фазовому переходу типа порядок–беспорядок соответствует бесконечный номер точки бифуркации. Формально это обусловлено тем, что для $BaTiO$ коэффициент A в (1) вблизи критической температуре T_c имеет вид $A\sim\frac{P_0}{u}$, где P_0 – спонтанная поляризация, а для KDP $A\sim\frac{1}{u}$, причем при $T\to T_c-0$ $P_0\to 0, u\to 0$ с условием $P=O(u)$.

Список литературы

[1] Островский Л.А. От нелинейных колебаний – к нелинейным волнам. В кн.: Нелинейные волны. Динамика и эволюция. М.: Наука, 1989. 398 с.

[2] Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.

[3] Абдуллаев Ф.Х. Динамический хаос солитонов. Ташкент: ФАН, 1990. 168 с.

[4] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминированном подходе к турбулентности. Пер. с фр. / Под ред. Ю.А. Данилова. М.: Мир, 1991. 367 с.

[5] Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. М.: МГУ, 1988. 177 с.

[6] Зайко Ю.Н. // ЖТФ. 1987. Т. 57. В. 3. С. 577–579.

[7] Зайко Ю.Н. // ЖТФ. 1989. Т. 59. В. 9. С. 172–173.

[8] Лайнс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. М.: Мир, 1981. 736 с.

Центральный
научно-исследовательский
институт измерительной аппаратуры,
Саратов

Поступило в Редакцию
16 ноября 1992 г.

5 Заказ 2345