01; 07; 09; 12

О БАЗИСНОМ НАБОРЕ ТРЕХМЕРНЫХ МАТРИЦ КОГЕРЕНТНОСТИ

В.С. Ильин, А.В. Хохлов

При решении ряда задач в теории распознавания образцов, голографии, многопозиционной радиолокации и связи возникает необходимость анализа пространственной структуры неплоских и плоских неоднородных электромагнитных волн [1–3]. Описание полей таких волн возможно с помощью комплексных 3×1 векторов Джонса или эрмитовых 3×3 матриц когерентности [4]:

$$\dot{\rho}(\dot{\vec{E}}) = \begin{bmatrix} \dot{E}_x \\ \dot{E}_y \\ \dot{E}_z \end{bmatrix} \cdot \left[\dot{E}_x^* \dot{E}_y^* \dot{E}_z^*\right] = \begin{bmatrix} |\dot{E}_x|^2 & \dot{E}_x \dot{E}_y^* & \dot{E}_x \dot{E}_z^* \\ \dot{E}_x^* \dot{E}_y & |\dot{E}_y|^2 & \dot{E}_y \dot{E}_z^* \\ \dot{E}_x^* \dot{E}_z & \dot{E}_y^* \dot{E}_z & |\dot{E}_z|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & \frac{S_3' - jS_3''}{\sqrt{2}} & \frac{S_2' + jS_2''}{\sqrt{2}} \\ \frac{S_3' + jS_3''}{\sqrt{2}} & S_2 & \frac{S_1' - jS_1''}{\sqrt{2}} \\ \frac{S_2' - jS_2''}{\sqrt{2}} & \frac{S_1' + jS_1''}{\sqrt{2}} & S_3 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $S_i \in R$, $S_i' \pm jS_i'' \in C$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Эрмитову матрицу вида (1) можно параметризовать множеством вещественных чисел [5], если в качестве базиса разложения использовать полный набор ортогональных матриц. В двумерном комплексном пространстве C^2 такой базисный набор образуют матрицы Паули [6], три из которых симметрические, четвертая – кососимметрическая, а результатом рациональной параметризации являются четыре параметра Стокса:

$$S_0 = |\dot{E}_x|^2 + |\dot{E}_y|^2, \quad S_1 = |\dot{E}_x|^2 - |\dot{E}_y|^2, \quad S_2 = 2Re(\dot{E}_x \dot{E}_y^*), \quad S_3 = 2Im(\dot{E}_x \dot{E}_y^*). \quad (2)$$

В трехмерном случае аналогичный набор часто выбирается из эвристических соображений [1, 2].

В настоящей статье полный набор линейно-независимых матриц трехмерного комплексного пространства строится только с помощью перестановочных (коммутативных и антикоммутативных) соотношений.

1. Если $\dot{\rho}(\dot{\vec{E}})$ представить линейной комбинацией трех матриц

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \sigma_2 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \sigma_3 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\sigma_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\ \sigma_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ \sigma_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \qquad (3)$$

$$\sigma_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-j\\0&j&0\end{bmatrix},\ \sigma_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&j\\0&0&0\\-j&0&0\end{bmatrix},\ \sigma_3'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-j&0\\j&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

то она параметризуется набором девяти вещественных чисел S_i, S_i', S_i''

$$\dot{\rho}\,(\dot{\vec{E}}) = S_i\sigma_i + S_i'\sigma_i' + S_i''\sigma_i'' \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (4)$$

где $S_1 = |\dot{E}_x|^2$, $S_2 = |\dot{E}_y|^2$, $S_3 = |\dot{E}_z|^2$,

$$S_1' = \sqrt{2}\,Re(\dot{E}_y\dot{E}_z^*), \quad S_2' = \sqrt{2}\,Re(\dot{E}_x\dot{E}_z^*), \quad S_3' = \sqrt{2}\,Re(\dot{E}_x\dot{E}_y^*),$$

$$S_1'' = \sqrt{2}\,Im(\dot{E}_z\dot{E}_y^*), \quad S_2'' = \sqrt{2}\,Im(\dot{E}_x\dot{E}_z^*), \quad S_3'' = \sqrt{2}\,Im(\dot{E}_y\dot{E}_x^*).$$

Матрицы σ_i, σ_i', σ_i'' удовлетворяют условиям ортонормированности:

$$\sigma_p:\sigma_q = \sigma_p':\sigma_q' = \delta_{pq}, \quad \sigma_p'':\sigma_q''^{*} = \delta_{pq}, \quad \sigma_p:\sigma_q' = \sigma_p':\sigma_q'' = \sigma_p'':\sigma_q = 0, \qquad (5)$$

где $p, q = 1,\ 2,\ 3$, а символ $:$ означает двойную свертку по матричным индексам: $\sigma:\sigma' = \sigma_{ij}\sigma_{ij}'$. Согласно (5), очевидно, $\sigma_i:\dot{\rho}(\dot{\vec{E}}) = S_i$; $\sigma_i':\dot{\rho}(\dot{\vec{E}}) = S_i'$; $\sigma_i'':\dot{\rho}(\dot{\vec{E}}) = S_i''$.

2. Покажем полноту набора матриц (3).

Непосредственный подсчет коммутаторов и антикоммутаторов дает следующее:

Коммутаторы $(p=q)$	Антикоммутаторы $(p=q)$
$\sigma_p\sigma_p - \sigma_p\sigma_p = 0$	$\sigma_p\sigma_p + \sigma_p\sigma_p = 2\sigma_p$
$\sigma_p'\sigma_p' - \sigma_p'\sigma_p' = 0$	$\sigma_p'\sigma_p' + \sigma_p'\sigma_p' = I - \sigma_p$
$\sigma_p''\sigma_p'' - \sigma_p''\sigma_p'' = 0$	$\sigma_p''\sigma_p'' + \sigma_p''\sigma_p'' = I - \sigma_p$
$\sigma_p\sigma_p' - \sigma_p'\sigma_p = 0$	$\sigma_p\sigma_p' + \sigma_p'\sigma_p = 0$
$\sigma_p\sigma_p'' - \sigma_p''\sigma_p = 0$	$\sigma_p\sigma_p'' + \sigma_p''\sigma_p = 0$
$\sigma_p'\sigma_p'' - \sigma_p''\sigma_p' = j\sigma(p)$	$\sigma_p'\sigma_p'' + \sigma_p''\sigma_p' = 0$

(6)

Коммутаторы ($p \neq q$)	Антикоммутаторы ($p \neq q$)
$\sigma_p\sigma_q - \sigma_q\sigma_p = 0$	$\sigma_p\sigma_q + \sigma_q\sigma_p = 0$
$\sigma'_p\sigma'_q - \sigma'_q\sigma'_p = -\frac{1}{\sqrt{2}} l_{pqk}\sigma''_k$	$\sigma'_p\sigma'_q + \sigma'_q\sigma'_p = \frac{1}{\sqrt{2}} l_{pqk}\sigma'_k$
$\sigma''_p\sigma''_q - \sigma''_q\sigma''_p = \frac{1}{\sqrt{2}} l_{pqk}\sigma''_k$	$\sigma''_p\sigma''_q + \sigma''_q\sigma''_p = -\frac{1}{\sqrt{2}} l_{pqk}\sigma'_k$
$\sigma_p\sigma'_q - \sigma'_q\sigma_p = -j\sigma''_q$	$\sigma_p\sigma'_q + \sigma'_q\sigma_p = \sigma'_q$ (7)
$\sigma_p\sigma''_q - \sigma''_q\sigma_p = j\sigma'_q$	$\sigma_p\sigma''_q + \sigma''_q\sigma_p = \sigma''_q$
$\sigma'_p\sigma''_q - \sigma''_q\sigma'_p = -j\frac{1}{\sqrt{2}} l_{pqk}\sigma'_k$	$\sigma'_p\sigma''_q + \sigma''_q\sigma'_p = -\frac{1}{\sqrt{2}} l_{pqk}\sigma''_k$

Здесь l_{pqk} – символы Леви-Чивита ($l_{123} = +1$), I – единичная матрица, $\sigma(p) = \sigma_q - \sigma_k$, а p, q, k – циклическая перестановка из 1, 2, 3. Из соотношений (6) и (7) видно, что никакие перестановочные соотношения для матриц (3) не приводят к появлению новых нетривиальных матриц, отличных от (3), т. е. матрицы (3) образуют полный замкнутый относительно перестановочных соотношений набор линейно независимых ортогональных матриц и в силу этого могут рассматриваться как базис разложения любых эрмитовых 3 x 3-матриц.

Построенный полный набор матриц не является единственно возможным. Из матриц (3) линейными преобразованиями можно получить и другие базисные наборы. Среди возможных нормированных базисов 3 x 3 эрмитовых матриц можно отметить базис алгебры Кеммера [7] или базис алгебры Ли [8]. Последний широко используется при описании симметрии сильных взаимодействий в физике элементарных частиц и обычно получается другим способом: путем рассмотрения генераторов групп SU_3 (λ – матрицы Гелл-Манна [8]). Однако для описания поляризации базис (3) предпочтительнее.

3. Поскольку $\dot{\rho}(\vec{E})$ описывает физическое состояние электродинамической системы с полем $\vec{E}$, необходимо допустить к рассмотрению и некоторые физически разрешенные функции от матриц когерентности $f(\dot{\rho}(\vec{E}))$. Каждая такая функция формально может быть представлена в виде разложения по целым степеням матрицы $\dot{\rho}(\vec{E})$. Матрица $\dot{\rho}(\vec{E})$ и любая ее целая степень коммутируют между собой. Поэтому $f(\dot{\rho}(\vec{E}))$ представляют эрмитовы матрицы и согласно (6)–(7) тоже допускают параметризацию типа (4).

4. Разложение 3 x 3-матрицы когерентности по базисным матрицам (3) имеет четкий физический смысл: $\vec{S}^T = \{S_1, S_2, S_3, S'_1, S'_2, S'_3, S''_1, S''_2, S''_3\}$ образуют наблюдаемые координаты „обобщенного вектора Стокса" поля трехмерной волны [9]. Последние удовлетворяют очевидному нелинейному условию, вытекающему непосредственно из (4):

$$\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_1'^2 + S_2'^2 + S_3'^2 + S_1''^2 + S_2''^2 + S_3''^2} = S_1 + S_2 + S_3 = Sp\,\dot{\rho}(\vec{E}). \quad (8)$$

Поэтому из девяти координат вектора $\vec{S}$ в общем случае линейно независимы только восемь. Конкретизация состояния электромагнитного поля может приводить к дальнейшему уменьшению числа параметров. Например, матрица когерентности полностью поляризованной гармонической волны имеет ранг 1 и, следовательно, описывается пятью отличными от нуля линейно независимыми координатами „обобщенного вектора Стокса".

5. От полученного трехмерного набора базисных матриц нетрудно перейти к двумерному. Например, для поперечного поля в плоскости xy вычеркиванием третьей строки и третьего столбца в (3) получаем четыре нетривиальные ортонормированные базисные матрицы в виде:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Если образовать линейные комбинации из σ_1 и σ_2, то получаем ортонормированные матрицы Паули.

В заключение отметим, что рассмотрение всех возможных перестановочных соотношений совместно с операциями циклирования позволяет в принципе построить полный набор базисных матриц, используя одну из кососимметрических базисных матриц. Это обстоятельство может явиться мощным конструктивным средством для построения базисных наборов эрмитовых матриц более высоких порядков.

Список литературы

[1] Roman P. // Nuovo Cimento. 1959. V. 13. N 5. P. 974–982.

[2] Roman P. // Proc. Phys. Soc. 1959. V. 74. Pt. 4. P. 649–652.

[3] Потехин В.А., Татаринов В.Н. Теория когерентности электромагнитного поля. М.: Связь, 1978. 208 с.

[4] Поздняк С.И., Миц Ю.К. // Радиотехника. 1987. №4. С. 80–82.

[5] Животовский Л.А. // Радиотехн. и электроника. 1984. Т. 29. № 11. С. 2111–2115.

[6] Whitney C. // J. Opt. Soc. Am. 1971. V. 61. N 9. P. 1207–1213.

[7] Kemmer N. // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1943. V. 39. P. 189–196.

[8] Ицексон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Т. 2. М.: Мир, 1984. 400 с.

[9] Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 165 с.

Поступило в Редакцию
19 октября 1992 г.