Письма в ЖТФ, том 18, вып. 14 26 июля 1992 г.

01; 05.4; 09

© 1992

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В СВЕРХПРОВОДНИКОВЫХ ЛИНИЯХ СВЯЗИ И ВЫСОКОСКОРОСТНАЯ ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

Н.В. Фомин

Показано, что в сверхпроводниковых микроволноводных линиях связи возможен нелинейный режим распространения сигналов с образованием автомодельных решений типа ударных волн. Источником необходимой нелинейности служит конвективный член в уравнении, обобщающем уравнение Лондонов для сверхпроводящего тока и аналогичный конвективному члену в гидродинамике. Эффект представляет практический интерес при использовании сильно замедляющих систем, в которых нелинейная кинетическая индуктивность доминирует над линейной геометрической.

1. Нелинейный режим как средство увеличения дальности связи

Сверхпроводниковые микроволноводы рассматриваются сейчас как возможные кандидаты для замены обычных металлических проводников в быстродействующей высокоинтегрированной микроэлектронике будущего. Их главными достоинствами являются малые диссипация и частотная дисперсия, что позволяет передавать короткие импульсы на достаточно большие расстояния [1]. Частотная дисперсия в этих системах вызывается диссипативными процессами, в результате их совместного действия сигнал при движении как теряет запасенную энергию, так и изменяет форму – расплывается. Для осуществления дальней связи уменьшение амплитуды сигнала не является фатальным, поскольку можно использовать усилители-ретрансляторы (мы сейчас отвлекаемся от проблемы шумов, экономической целесообразности и импульсов. Такого рода соображения побуждают искать нелинейный режим распространения импульсов, который подавлял бы частотную дисперсию (аналогично тому, как это происходит при образовании световых солитонов в стекловолокне [2]). Мы учтем два источника нелинейности: конвективный нелинейный член в уравнении Лондонов, возникающий, как и в гидродинамике, из-за использования эйлеровых (а не лагранжевых) координат, а также так называемую нелинейность Гинзбурга-Ландау, описывающую зависимость модуля параметра порядка (концентрация сверхпроводящих электронов) от электромагнитного поля [3].

2. Линейные телеграфные уравнения

Прежде, чем рассматривать нелинейные эффекты, воспроизведем уравнения, обычно используемые для описания волновых процессов в двупроводных линиях. Двупроводная линия характеризуется погонными параметрами – индуктивностью L и емкостью С. Потенциал между проводниками V и ток в них J связаны так называемыми телеграфными уравнениями [4]:

$$-\partial V/\partial z = L\,\partial J/\partial t + Re\,[Z]\,J \tag{1, а}$$

$$\partial J/\partial z = -C\,\partial V/\partial t. \tag{1, б}$$

Здесь $Re[Z]$ – вещественная часть импеданса линии Z, определяющая затухание сигналов. Для линии из идеального металла $Re\,[Z]=0$, и $L = L_0$, где L_0 – так называемая „геометрическая" индуктивность, жестко связанная с емкостью посредством соотношения $L_0 C = \varepsilon c^{-2}$, с – скорость света, ε – диэлектрическая проницаемость среды [4]. В сверхпроводниковых линиях в индуктивность линии дают также вклад и сверхпроводящие электроны: согласно уравнению Лондонов,

$$\frac{m}{n_s e}\,\frac{\partial j_s}{\partial t} = eE, \tag{2}$$

где j_s, n_s, e и m – плотность тока, концентрация, заряд и масса сверхпроводящих электронов,

$$E = -(\partial V/\partial z + L_0\,\partial J/\partial t) - \tag{3}$$

z – компонента электрического поля. Таким образом, $L = L_0 + L_S$, где „кинетическая" индуктивность, выраженная через лондоновскую глубину проникновения поля $\delta_L = [mc^2/(4\pi n_s e^2)]^{1/2}$, есть

$$L_S = 4\pi c^{-2}\,\delta_L^2/S_*, \tag{4}$$

где S_* – эффективная площадь поперечного сечения, через которую течет ток (она может быть существенно меньше самой площади из-за скин-эффекта) [1]. Добавочная индуктивность L_S, как следует из уравнений (1), приводит к замедлению сигналов – их скорость c_* становится меньше скорости света с:

$$c_*^2 = c^2(1 + L_S/L_0)/\varepsilon. \tag{5}$$

В рамках двужидкостной картины в проводимости участвуют как сверхпроводящие электроны, так и нормальные, при этом полный ток есть сумма сверхпроводящего и нормального токов:

$$J = J_S + J_n. \tag{6}$$

Движение нормальных электронов описывается законом Ома $J_n = S_*\,\sigma_n E$, следовательно, погонный импеданс линии определяется параллельным включением погонной индуктивности $L=(Cc_*)^{-2}$ и сопротивления $R=(\sigma_n S_*)^{-1}$. Тогда на частоте ω имеем при $(L\omega/R)^2 \ll 1$:

$$Re[Z] = (L\omega)^2/R. \qquad (7)$$

3. Нелинейные телеграфные уравнения

Введем скорость сверхпроводящих электронов $v_s = j_s/(n_s e)$. Тогда уравнение Лондонов (2) принимает вид: $m\partial v_s/\partial t = -eE$. Теперь восстановим в этом уравнении отсутствующий в линейных уравнениях Лондонов нелинейный конвективный член $(v_s \nabla)v_s$ (более строгое обоснование можно провести аналогично тому, как это делается при выводе уравнений гидродинамики для сверхтекучей жидкости [5]):

$$m\,dv_s/dt \equiv m(\partial v_s/\partial t + v_s \partial u_s/\partial z) = -eE. \qquad (8)$$

Физический смысл этого уравнения прозрачен: движение сверхпроводящих электронов описывается уравнением Ньютона. В задаче об экранировании электромагнитного поля в сверхпроводнике этот нелинейный член выпадает. Однако, его введение в телеграфные уравнения приводит к появлению солитонных решений типа ударных волн, которые могут распространяться с постоянной скоростью и неизменным профилем. Мы покажем, что при реалистичных значениях параметров возможно формирование таких ударных волн с ширинами, актуальными для перспективных высокоскоростных систем (с временными фронтами в 100 пс и меньше). Учтем также нелинейность Гинзбурга-Ландау, описывающую зависимость числа сверхпроводящих электронов от магнитного поля H [3]:

$$n_s = n_{s0}(1-\beta(H/H_{cm})^2), \qquad (9)$$

где H_{cm} – термодинамическое критическое поле, а β – число порядка единицы. Выразив v_s через J, V и E из соотношения $J = J_s + J_n = S_*(en_s v_s + \sigma_n E)$, а H через E из уравнений Максвелла, можно найти нелинейное обобщение телеграфного уравнения (1a). Получающаяся система уравнений оказывается весьма сложной, однако мы ограничимся ситуацией, когда „геометрической" индуктивностью L_0 можно пренебречь по сравнению с „кинетической" L_s, т.е. рассмотрим только системы с существенным замедлением, где $(c/c_*)^2 = 4\pi\delta_L^2\, C/S_* \gg 1$, это реализуется, например, в линии с тонкой жилой [6], или в линии с большей емкостью С [7]. Будем также иметь в виду выполняющееся на практике условие $J_n \ll J_s$. При выполнении этих условий вторым членом в скобках в (3) можно пренебречь. В связи с прямой аналогией между обсуждаемым в этой работе эффектом и ударными волнами в гидродинамике (мелкая вода, газодинамика) [5], нам удобнее использовать переменную v_s, а не J. Введем также безразмерный потенциал $p = eV/(mc_*^2)$, соответствующий давлению в гидродинамике, а вместо v_S будем писать просто v. Тогда телеграфные уравнения принимают вид

$$\dot{v} + c_*^2 p' = -v v', \tag{10а}$$

$$\dot{p} + v' = \alpha p'' - \gamma (v p^2)', \tag{10б}$$

где $\alpha = 4\pi\sigma_n \delta_L^2 (c_*/c)^2$ и имеет размерность вязкости, а штрихом и точкой обозначены производные по координате и времени. Для параметрической оценки γ, исходя из (9), можно поступить следующим образом: записываем плотность свободной энергии сверхпроводника как число куперовских пар $n\Delta/\varepsilon_F$, умноженное на энергию пары Δ (ε_F – энергия Ферми), т.о. $H_{cm}^2 \sim \Delta^2 n/\varepsilon_F$. Магнитное поле H выражаем через V, а затем через p, с помощью уравнения Максвелла: $V' = E = \delta_L \dot{H} \varepsilon^{1/2}/c$. Далее, записывая $\dot{H} = c_* H'$ (в главном порядке любой профиль движется со скоростью c_*), находим

$$\gamma = mc_*^2 \varepsilon_F / (\varepsilon \Delta^2), \tag{11}$$

что является большим параметром, и заставляет удерживать в уравнениях члены высшего (третьего) порядка.

Обратим внимание на то, что наши уравнения не тождественны соответствующим гидродинамическим, в которых диссипативный член входил бы в первое уравнение в виде $\nu \Delta v$.

Нелинейные и диссипативный члены перенесены в правые части этих уравнений. Если их положить равными нулю, то получим волновое уравнение, описывающее распространение импульса с произвольным и неизменным профилем со скоростью c_*. Учет этих малых правых частей дает медленно изменяющийся, вообще говоря, профиль импульса при его распространении со скоростью порядка c_*. Найдем автомодельные решения системы – т.е. решения, описывающие распространение импульса неизменной формы с некоторой скоростью u.

4. Нахождение ширины ударной волны

Для нахождения автомодельного решения поступим обычным образом: будем искать решение, стационарное в движущейся со скоростью u системе координат. Тогда $\partial/\partial t$ заменяется на $-u\partial/\partial z$, после чего система (8) интегрируется. Константы интегрирования определяются граничными условиями слева и справа от волны: будем считать, что заданы давления p_1 и p_2, и что ток перед волной отсутствует ($v_2 = 0$). После этого, имея в виду, что для реальных значений используемых напряжений V нелинейность мала (для $V = 1$ В имеем по порядку величины $p \sim \sim 10^{-6} (c/c_*)^2 \ll 1$) получаем уравнение в стандартном виде [5]:

$$\alpha p' = -c_* \gamma (p-p_1)(p-p_2)(p-p_2-\gamma^{-1}), \qquad (12)$$

решение которого описывает несимметричный импульс с шириной

$$d = \alpha/(2c_*(p_2-p_1)) = 2\pi\sigma_n \delta_L^2 mc(c_*/c)^3/[e(V_2-V_1)], \qquad (13)$$

где V_2-V_1 – разность напряжений слева и справа от волны. Интересно отметить, что учет нелинейности Гинзбурга–Ландау (члены с γ) не меняет по порядку величины ширину ударной волны. Если эту нелинейность проигнорировать, положив $\gamma=0$, то получается обычный в задачах с малой нелинейностью солитон, описываемый гиперболическим тангенсом с шириной $d=\alpha/(4c_*(p_2-p_1))$ [5]. Аномально большая величина γ заставляет даже в случае слабой ударной волны ($p \ll 1$) удерживать член третьего порядка, что приводит к изменению формы тангенса – одна его половинка, соответствующая приближению p к p_2 становится круче в $\gamma(p_2-p_1) \sim 10^4$ раз, что в два раза уменьшает ширину ударной волны. Для численной оценки ширины волны используем типичные значения параметров для ВТСП: $\sigma_n=10^{14}$ c^{-1}, $\delta_L = 10^{-5}$ см, тогда при падении напряжения на волне в 1 В имеем $d=(c_*/c)^3$ см. Полученная оценка весьма наглядна, поскольку актуальному для перспективных высокоскоростных систем 100 пс диапазону длительностей фронтов соответствует та же сантиметровая пространственная ширина в незамедляющих системах. Таким образом, мы видим, что использование замедляющих сверхпроводящих линий в нелинейном режиме позволяет существенно повысить плотность потока информации – благодаря тому, что длительность фронта нелинейной волны уменьшается по кубическому закону с коэффициентом замедления волны.

5. Заключение.

Мы показали, что учет нелинейного конвективного члена в гидродинамическом уравнении для электронной сверхпроводящей жидкости, являющемся обобщением известного уравнения Лондонов для сверхпроводящего тока, позволяет найти в сверхпрвводниковых линиях связи автомодельные решения – солитоны, аналогичные ударным волнам в газодинамике. Практический интерес для задач высокоскоростной передачи информации представляют сильно замедляющие системы – например, линии с тонкой сверхпроводящей жилой (большой погонной индуктивностью), либо с большой погонной емкостью, поскольку ширина фронта ударной волны обратно пропорциональна кубу коэффициента замедления.

Список литературы

[1] Сурис Р.А., Фомин Н.В. О возможности использования коаксиальных линий из ВТСП для межсоединений // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 24.

[2] G o w e r J. Opt. commun. syst. Prentice/Hall International 1984. Русский перевод: Дж. Гауэр. Оптические системы связи. М.: „Радио и связь", 1989.
[3] Л и х а р е в К.К. Нелинейная электродинамика узких сверхпроводящих пленок. Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1971. Т. 14. В. 8. С. 1232.
[4] Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М. Электродинамика сплошных сред. 1982. М.: Наука.
[5] Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М. Гидродинамика. 1988. М.: Наука.
[6] F o m i n N.V., S u r i s R.A. Micron-scale waveguides with a thin superconducting wire and their prospects for microelectronics. Superconduntors science and technology, 1992, is printing.
[7] M c D o n a l d D.G. // Appl. Phys. Lett. 1987. 50(12), P. 775.

Поступило в Редакцию
24 апреля 1992 г.