

01; 10

© 1992

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА
НА ДИНАМИКУ ПОТОКА ЧАСТИЦ

Н.Д. Наумов

Для ряда практических задач, связанных, например, с транспортировкой пучков заряженных частиц, определением характеристик различных электронно-оптических устройств и т.п., представляет интерес расчет влияния пространственного заряда [1]. Основным методом решения подобных задач является численное моделирование процесса распространения потока заряженных частиц (см., например, [2, 3]). Так как численные расчеты всегда проводятся при каком-то конкретном выборе параметров потока, то немаловажную роль играет разработка аналитических методов оценки влияния собственного электромагнитного поля на динамику потока частиц. Учет этого влияния в рамках метода возмущений рассматривается в данной заметке.

Для описания поведения заряженных частиц, находящихся во внешнем электромагнитном поле с напряженностями E_0 , B_0 , используется система уравнений Максвелла и Власова [4], которую можно записать в виде одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\hat{N}f \equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} + e \left(E_0 + \frac{1}{c} [v B_0] \right) \frac{\partial}{\partial p} \right] f = \hat{L}(x, p, t; f) f. \quad (1)$$

Здесь $f(x, p, t)$ — функция распределения частиц по координатам и импульсам, $v = cp / [m^2 c^2 + p^2]^{1/2}$, \hat{L} отражает воздействие на движение частиц создаваемого ими электромагнитного поля, т.е.

$$\hat{L} = -e \left(E + \frac{1}{c} [vB] \right) \frac{\partial}{\partial p},$$

где E , B являются известными решениями уравнений Максвелла через запаздывающую функцию Грина. Поскольку плотности заряда и тока в этих решениях определяются функцией распределения, то оператор \hat{L} неявно зависит от f , что и указано в (1).

Предполагая, что воздействие собственного электромагнитного поля мало, можно построить решение уравнения (1) методом возмущений. Для этого нужно вычислить закон движения частицы во внешнем поле

$$x = r(t; x_0, p_0), \quad p = q(t; x_0, p_0) \quad (2)$$

и выразить x_0 , p_0 из соотношений (2) через x , p , t , т.е. найти

$$x_0 = R_0(x, p, t), \quad p_0 = Q_0(x, p, t). \quad (3)$$

Тогда решение уравнения (1) при $\hat{L} = 0$ имеет вид

$$f_0(x, p, t) = g(R_0(x, p, t), Q_0(x, p, t)), \quad (4)$$

где $g(x, p)$ — функция распределения при $t = 0$. Отметим, что R_0 , Q_0 , как и f_0 , удовлетворяют уравнениям $\hat{N}R = 0$, $\hat{N}Q = 0$, причем

$$R(x, p, 0) = x, \quad Q(x, p, 0) = p.$$

Чтобы учесть влияние пространственного заряда, перейдем в (1) от x , p к новым переменным X , P , полагая $X = R_0(x, p, t)$, $P = Q_0(x, p, t)$. Тогда, вводя функцию $F(X, P, t) = f(r(t; X, P), g(t; X, P), t)$, из уравнения (1) найдем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \hat{A}(X, P, t; F) F. \quad (5)$$

Здесь оператор \hat{A} содержит только поля, создаваемые частицами. Решение уравнения (5) можно записать в виде (4), если удалось бы найти аналогичные (3) функции $R(X, P, t)$, $Q(X, P, t)$, т.е.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \hat{A} \right] R = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \hat{A} \right] Q = 0, \quad R(X, P, 0) = X, \quad Q(X, P, 0) = P. \quad (6)$$

Это можно сделать приближенно, так как уравнения (6) имеют удобную для итераций форму. В частности, для R получаем следующее разложение

$$R = X + \int_0^t du \hat{\Lambda}(X, P, u; F_0) X + \int_0^t du \hat{\Lambda}(X, P, u; F_0) \int_0^u ds \hat{\Lambda}(X, P, s; F_0) X \dots, \quad (7)$$

где $F_0 = g(X, P)$. Аналогичное выражение можно записать и для Q . В итоге для функции распределения окончательно находим

$$F(X, P, t) = g(R(x, p, t), Q(x, p, t)). \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что полный учет внешнего поля при выборе основного приближения не является принципиальным. Можно принять в качестве невозмущенного движение частиц в некотором поле, не совпадающем с заданным электромагнитным полем. Тогда влияние части внешнего поля будет учитываться в рамках метода возмущений. Вообще, при выборе оператора основного приближения можно руководствоваться различными соображениями, однако область применимости полученного решения определяется тем, насколько удачно выбрано основное приближение.

Для примера рассмотрим расширение под действием собственного поля однородного цилиндрического моноэнергетического потока нерелятивистских частиц. В этом случае для расчета радиуса пучка при $\xi \leq 3$ используется следующее выражение [1]:

$$a(t) = a(1 + 0.25\xi^2 - 0.017\xi^3). \quad (9)$$

Здесь $\xi = t(2eI/mVa^2)^{1/2}$, I , a — соответственно ток и начальный радиус пучка, e , m , V — заряд, масса и скорость частиц.

Начальная функция распределения имеет вид

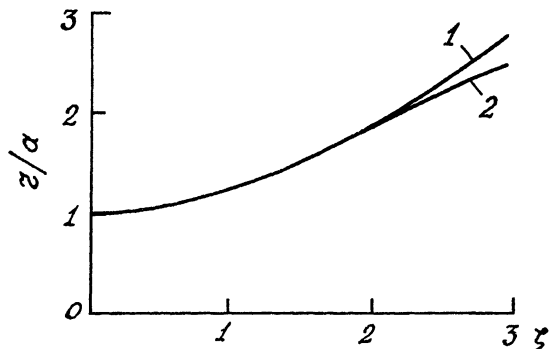
$$g(x, p) = n_0 S(r, \alpha) \delta(p_x) \delta(p_y) \delta(p_z - mV),$$

где $n_0 = I/\pi eVa^2$, $r = [x^2 + y^2]^{1/2}$, $S(r, \alpha)$ — единичная внутри круга радиуса α функция. В данном случае можно выбрать в качестве невозмущенного свободное движение частиц, т.е. взять $R_0 = x - pt/m$, $Q_0 = p$. Тогда, в частности, для радиуса пучка получается выражение, лишь при $\xi < 1.5$ согласующееся с результатом (9).

Более приемлемые результаты получаются, если положить

$$X = x \operatorname{ch} \lambda t - \frac{p_x}{m\lambda} \operatorname{sh} \lambda t, \quad P_x = p_x \operatorname{ch} \lambda t - x m \lambda \operatorname{sh} \lambda t,$$

и аналогично для Y , P_y . Тогда F_0 соответствует однородному цилиндрическому пучку с током I и увеличивающимся со временем радиусом $\alpha(t) = \alpha \operatorname{ch} \lambda t$. В этом случае в первом приближении итерационной процедуры (6) для O_x , O_y , R_x , R_y найдем:



Расширение пучка под действием собственного поля. 1 - данные работы [1], 2 - расчет по формуле (10).

$$Q = pA/m + \lambda xB, \quad R = x(\gamma ch\nu + \delta sh\nu) - p(\gamma sh\nu + \delta ch\nu)/m\lambda.$$

Здесь введены обозначения:

$$A = \alpha ch\nu - \beta sh\nu, \quad B = \beta ch\nu - \alpha sh\nu, \quad \gamma = 2 - \alpha, \quad \delta = \beta - \nu + t h\nu, \\ \alpha = 1 + 0.5sh^2\nu - \ln(ch\nu), \quad \beta = 0.5(sh\nu ch\nu - \nu), \quad \nu = \lambda t = \zeta \sqrt{2}.$$

Для плотности частиц на основании (7) получим

$$n(x, t) = \int f d^3p = \frac{n_0}{A^2} S\left(\frac{r}{A}, \alpha\right). \quad (10)$$

На рисунке представлены зависимости радиуса пучка, рассчитанные согласно выражениям (9) и (10) (соответственно кривые 1, 2). Можно констатировать удовлетворительное согласие результатов расчетов при $\zeta \leq 2.5$, однако (8), (10) содержат более полную информацию о характеристиках потока частиц по сравнению с (9). Чтобы получить решение для последующего промежутка времени, нужно еще раз провести итерационную процедуру, рассматривая в качестве начальной функции распределения выражение (8), например, при $\zeta = 2.5$.

В заключение отметим, что предложенную формулировку метода последовательных приближений можно распространить на систему гидродинамических уравнений для „холодных“ потоков частиц, полагая [4]

$$f(x, p, t) = n(x, t) \delta(p - P(x, t)),$$

а также обобщить для потоков из нескольких сортов частиц.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] М о л о к о в с к и й С.И., С у ш к о в А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991. 303 с.
- [2] Б е л е й А.С., К а п л и н С.С., Ш е с т о п а л С.А., Ш у л и к а Н.Г. // УфЖ. 1986. Т. 31. В. 7. С. 972-975.
- [3] Б е з р о д н ы й Ю.Г., М а н у й л е н к о О.В. // ЖТФ. 1990. Т. 60. В. 4. С. 164-167.
- [4] Д е в и д с о н Р. Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 215 с.

Поступило в Редакцию
9 марта 1992 г.