01; 09

РАССЕЯНИЕ Е-ПОЛЯРИЗОВАННОГО ПОЛЯ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С УЗКОЙ ЩЕЛЬЮ

Р.Р. Гадыльшин

Известно [1–2], что идеально проводящий полый круговой цилиндр с узкой щелью представляет собой электромагнитный аналог акустического резонатора Гельмгольца [3]. В [4–6] показано, что резонансные явления для акустического резонатора Гельмгольца не связаны с какой-либо симметрией резонатора. В настоящей работе рассмотрено рассеяние Е-поляризованного электромагнитного поля $\vec{E}$, $\vec{H}$ на идеально проводящей поверхности Π_ε, получающейся из замкнутой цилиндрической поверхности Π_0 с произвольным сечением вырезанием узкой щели, параллельной образующей Π_0 и имеющей ширину порядка $O(\varepsilon)$, $0<\varepsilon\ll 1$. Резонансные явления заключаются в том, что при некоторых значениях волнового числа k поле $\vec{E}_\varepsilon$, $\vec{H}_\varepsilon$, рассеянное на Π_ε, отличается при $\varepsilon\to 0$ от поля $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$, рассеянного на Π_0, на величину порядка $O(1)$. Внутри же резонатора при $\varepsilon\to 0$ поле $\vec{E}_\varepsilon$, $\vec{H}_\varepsilon$ растет неограниченно. Целью работы является исследование влияния параметров щели (место ее вырезания и симметрия относительно центра сжатия) на вид $\vec{E}_\varepsilon$, $\vec{H}_\varepsilon$ и, в частности, на порядок роста $\vec{E}_\varepsilon$, $\vec{H}_\varepsilon$ внутри резонатора.

Пусть образующая цилиндрической поверхности Π_0 параллельна оси Ox_3. Тогда возбуждающее стороннее Е-поляризованное поле и поле, рассеянное на Π_δ ($\delta\geqslant 0$), представим в виде

$$\vec{E}(\vec{x},k)=(0,0,E(\vec{x},k)),\quad \vec{H}(x,k)=-ik^{-1}\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{x},k),$$

$$\vec{E}_\delta(\vec{x},k)=(0,0,E_\delta(\vec{x},k)),\quad \vec{H}_\delta(\vec{x},k)=-ik^{-1}\operatorname{rot}\vec{E}_\delta(\vec{x},k),$$

где $\vec{x}=(x_1,x_2)$. Пусть Γ_δ – сечение цилиндрической поверхности Π_δ плоскостью $x_3=0$. Замкнутая кривая Γ_0 является границей ограниченной области Ω на плоскости, а кривая Γ_ε – незамкнута. Компонента $E_\varepsilon(\vec{x},k)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне Γ_ε, граничному условию $E_\varepsilon=-E$ на Γ_ε и условию Зомерфельда на бесконечности. Условие ограниченности энергии в любой конечной области пространства (условие Майкснера на кромке) приводит к требованию интегрируемости квадратов модулей функции E_ε и ее производных в окрестности концов кривой Γ_ε. Последнее условие обеспечивает единственность.

Резонансные явления объясняются тем, что, если k_0^2 – простое собственное значение „закрытого" резонатора, то функция Грина $G_\varepsilon(\vec{x}, \vec{y}, k)$ электромагнитного аналога резонатора Гельмгольца допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость и в полуплоскости $Im\, k<0$ имеет полюс первого порядка $\tau_\varepsilon \to k_0$ при $\varepsilon \to 0$. То, что полюс невещественен, обеспечивает существование и единственность E_ε при вещественных k. Но его близость к k_0 существенно влияет на поведение E_ε. Наибольший порядок роста для вещественных $k=k(\varepsilon)$ рассеянное поле E_ε имеет в пиковом режиме $k=\tau_3+O(Im\,\tau_\varepsilon)$ и этот порядок зависит от расстояния между полюсом τ_3 и вещественной осью, то есть от $Im\,\tau_\varepsilon$. Последняя величина, в свою очередь, сильно зависит от параметров щели.

Чтобы не перегружать текста равномерными оценками, будем в дальнейшем исследовать поведение E_ε в пиковом режиме. Пусть x_0 – центр сжатия сечения щели $\omega_\varepsilon=\Gamma_0\ /\ \Gamma_\varepsilon$. Асимптотика τ_ε существенно зависят от выполнения неравенства

$$|\nabla\psi(\vec{x}_0)|\neq 0. \tag{1}$$

Если k_0^2 – минимальное собственное значение, то неравенство (1) выполняется безусловно. Если же k_0^2 не является минимальным собственным значением, то, выбирая точку $\vec{x}_0$ на Γ_0 (место прорезания щели), можно добиться как выполнения неравенства (1), так и его невыполнения. Примером является случай, когда Γ_0 – периметр прямоугольника с несоизмеримыми сторонами.

Пусть $\vec{t}$ – единичный касательный вектор к Γ_0 в точке $\vec{x}_0$, направление которого соответствует обходу Ω против часовой стрелки, а T – касательная прямая к Γ_0 в $\vec{x}_0$. Не ограничивая общности, будем считать, что концы проекции сечения щели ω_ε на T есть точки $\vec{x}_0\pm\varepsilon\omega_\pm\vec{t}$, где $\omega_\pm$ – любые числа. Обозначим через $\psi(\vec{x})$ собственную функцию „закрытого" резонатора, соответствующую собственному значению k_0^2,

$$c_\omega=\frac{1}{4}(\omega_+-\omega_-),\quad \varkappa_\omega=\frac{1}{2}(\omega_++\omega_-),\quad D^1=\frac{\partial}{\partial\vec{n}},\quad D^2=\frac{\partial^2}{\partial\vec{n}\,\partial\vec{t}},\quad D^3=\frac{\partial^3}{\partial\vec{n}^3},$$

$$\psi_j=D^j\psi(\vec{x}_0),\quad e_j=D^jE^{пол}(\vec{x}_0,k_0),\quad g_j(\vec{x},k)=D^j_yG(\vec{x},\vec{x}_0,k),$$

$$\sigma_{qj}=\lim_{r\to\infty} Re\int_{S_r} g_q(\vec{x},k_0)\bar{g}_j(\vec{x},k_0)\,ds,$$

где $G(\vec{x},\vec{y},k)$ – функция Грина задачи Дирихле для оператора Гельмгольца вне Ω, $E^{пол}=E+E_0$ – полное поле, S_r – окружность радиуса r с центром в $\vec{x}_0$ (σ_{jj} – полные поперечники сечений полей $g_i(\vec{x},k_0)$). Асимптотика τ_3 строится методом сращивания асимптотических разложений и при выполнении (1) имеет вид

$$\tau_3 = k_0 + \varepsilon^2\tau_{20} + \varepsilon^3\tau_{30} + \varepsilon^4(\tau_{41}\ln\varepsilon + \tau_{40}) + O(\varepsilon^5\ln\varepsilon),$$

$$\tau_{20} = -\pi(\psi_1 c_\omega)^2(2k_0)^{-1}, \quad \tau_{30} = -\pi\psi_1\psi_2 c_\omega^2 \varkappa_\omega k_0^{-1}, \tag{2}$$

$$\tau_{41} = -(c_\omega k_0)^2\tau_{20}, \quad Im\,\tau_{40} = -2^{-1}(\pi\psi_1 c_\omega^2)^2\sigma_{11}.$$

Формула для $Im\,\tau_{40}$ уточняет значение этой величины, приближенно вычисленное в [7]. Заметим также, что слагаемое $\varepsilon^4\tau_{41}$ не учтено в [1 , 7]. Из (2) следует, что пиковый режим имеет место при

$$k = k_0 + \varepsilon^2\tau_{20} + \varepsilon^3\tau_{30} + \varepsilon^4(\tau_{41}\ln\varepsilon + k_{40} + O(1)),$$

где k_{40} – любое вещественное число. Рассеянное поле в этом режиме имеет вид

$$E_\varepsilon(\vec{x},k) \sim -\varepsilon^{-4}\pi c_\omega^2\psi_1\left(2k_0(k_{40}-\tau_{40})\right)^{-1}\psi(\vec{x}) \quad \text{в } \Omega,$$

$$E_\varepsilon(\vec{x},k) \sim E_0(\vec{x},k) + (\pi c_\omega^2\psi_1)^2 e_1\left(2k_0(k_{40}-\tau_{40})\right)^{-1} g_1(\vec{x},k) \quad \text{вне } \Omega.$$

Пусть теперь щель вырезана так, что условие (1) не выполнено. Для определенности будем считать, что

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 \neq 0. \tag{3}$$

В этом случае, если щель несимметрична ($\varkappa_\omega \neq 0$), то

$$\tau_\varepsilon = k_0 + \varepsilon^4\tau_{40} + \varepsilon^5\tau_{50} + \varepsilon^6(\tau_{61}\ln\varepsilon + \tau_{60}) + O(\varepsilon^7\ln\varepsilon), \quad Im\,\tau_{50} = Im\,\tau_{61} = 0,$$

$$\tau_{40} = -\pi(\psi_2 c_\omega)^2(c_\omega^2 + 2\varkappa_\omega^2)(4k_0)^{-1}, \quad Im\,\tau_{60} = -2^{-1}(\pi c_\omega^2\varkappa_\omega\psi_2)^2\sigma_{11}.$$

Пиковый режим и рассеянное поле в этом режиме имеют вид

$$k = k_0 + \varepsilon^4\tau_{40} + \varepsilon^5\tau_{50} + \varepsilon^6(\tau_{61}\ln\varepsilon + k_{60} + O(1)),$$

$$E_\varepsilon(\vec{x},k) \sim -\varepsilon^{-6}\pi c_\omega^2\varkappa_\omega\psi_2\left(2k_0(k_{60}-\tau_{60})\right)^{-1}\psi(\vec{x}) \quad \text{в } \Omega,$$

$$E_\varepsilon(\vec{x},k) \sim E_0(\vec{x},k) + (\pi c_\omega^2\varkappa_\omega\psi_2)^2 e_1\left(2k_0(k_{60}-\tau_{60})\right)^{-1} g_1(\vec{x},k) \quad \text{вне } \Omega.$$

И, наконец, рассмотрим случай, когда выполнены условия (3), а щель симметрична ($\varkappa_\omega = 0$). Для простоты будем считать, что Γ_0 в окрестности x_0 выпрямлена. В этом случае

$$\tau_\varepsilon = k_0 + \varepsilon^4\tau_{40} + \varepsilon^6\tau_{60} + \varepsilon^8(\tau_{81}\ln\varepsilon + \tau_{80}) + O(\varepsilon^9),$$

$$Im\,\tau_{60} = Im\,\tau_{81} = 0, \quad \tau_{40} = -\pi(\psi_2 c_\omega^2)^2(4k_0)^{-1},$$

$$Im\,\tau_{80} = -\frac{1}{2}(\pi c_\omega^2)^2\left(\psi_2^2\sigma_{22} - 2\psi_2\psi_3\sigma_{12} + \psi_3^2\sigma_{11}\right),$$

а пиковый режим и рассеянное поле в этом режиме имеют вид

$$k = k_0 + \varepsilon^4 \tau_{40} + \varepsilon^6 \tau_{60} + \varepsilon^8 (\tau_{81} \ln \varepsilon + k_{80} + O(1)),$$

$$E_\varepsilon(\vec{x}, k) \sim -\varepsilon^{-8} \pi c_\omega^4 (\varphi_2 e_2 - \varphi_3 e_1)\left(4k_0 (k_{80} - \tau_{80})\right)^{-1} \Psi(\vec{x}) \text{ в } \Omega,$$

$$E_\varepsilon(\vec{x}, k) \sim (\pi c_\omega^4)^2 (\varphi_2 e_2 - \varphi_3 e_1)\left(8k_0 (k_{80} - \tau_{80})\right)^{-1} \left(\varphi_2 g_2(\vec{x}, k) - \right.$$

$$\left. - \varphi_3 g_1(\vec{x}, k)\right) + E_0(\vec{x}, k) \text{ вне } \Omega.$$

Из приведенных выше формул следует, что рассматриваемые параметры щели существенно влияют даже на порядки резонансов.

Список литературы

[1] Шестопалов В.П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наукова думка, 1983. 252 с.

[2] Готлиб В.Ю. // ДАН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1109-1113.

[3] Rayleigh O.M. // Proc. of Roy. Soc. London. A. 1916. V. 92. N 638. P. 265-275.

[4] Арсеньев А.А. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12. № 1. С. 112-138.

[5] Beale J.T. // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. N 4. P. 549-564.

[6] Гадыльшин Р.Р. // ДАН СССР. 1990. Т. 130. № 5. С. 1094-1097.

[7] Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. 416 с.

Поступило в Редакцию
12 января 1992 г.