01

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЫСШИХ МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКОВ В ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

А.Е. Морозовский, А.А. Снарский

Первые моменты токов или джоулевой диссипации в неоднородных средах описывают основные свойства таких сред в целом. Так, например, первый момент джоулевой диссипации определяет эффективную проводимость σ_e [1], а второй – $1/f$ шум в таких средах [2, 3]. Момент n-го порядка можно записать в виде

$$C^e(n,d)=\frac{\langle C(n,r)(\vec{E}\cdot\vec{j})^n\rangle}{(\langle\vec{E}\rangle\langle\vec{j}\rangle)^n}, \tag{1}$$

где d – мерность задачи, $\langle\ldots\rangle$ – усреднение по объему, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{j}$ – плотность тока, предполагается что локально имеет место закон Ома $\vec{j}=\sigma(\vec{r})\vec{E}$; $C(n,\vec{r})$-локальный момент.

В специальном случае $n=1$ $C(1,\vec{r})=1$ и $C^e(1,d)=1$ и из [1], согласно $\langle Ej\rangle=\langle E\rangle\langle j\rangle=\sigma_e\langle E\rangle^2$, следует выражение для σ_e. Для $n=2$ $C(2,\vec{r})=\{\delta\sigma\,\delta\sigma\}/\sigma^2$, – фурье-компонента квадратичной флуктуации проводимости, а $C^e(2,d)$ – относительная спектральная плотность $1/f$ шума всей среды. Чем больше неоднородность, тем выше уровень $1/f$ шума [2, 3, 4].

Для определения критического поведения $C^e(n,d)$ необходимо знать распределение полей и токов, что в случайно неоднородных средах возможно только при использовании либо модели такой среды, либо при проведении численного эксперимента. И если при вычислении σ_e в первом приближении можно ограничиться нулевым по h приближением ($h=\sigma_2/\sigma_1\ll 1$, σ_2 – проводимость плохо, σ_1 – хорошо проводящих фаз), основная закономерность поведения σ_e при этом сохраняется [5], то такое приближение уже для $n=2$ не применимо. В [6, 7] было указано, что выше порога протекания, когда ток течет в основном по хорошо проводящей фазе, при вычислении $1/f$ шума учет плохо проводящей может привести к изменению критического индекса – кроссоверу. В [7, 8] на основании модели слабого звена МСЗ, учитывающей одновременное протекание тока по обеим фазам, получены критические индексы $1/f$ шума выше, ниже и на пороге протекания и определены условия кроссовера. В [9] численными методами проверена зависимость $C^e(2, d=2, 3)$ от h на пороге протекания. В [11, 12] рассмотрено скейлингование моментов, и при помощи численных методов подтвержден кроссовер выше порога протекания в двумерном слечае.

В настоящем сообщении найдены аналитические выражения для критических индексов и подтверждена скейлинговая гипотеза для n-х моментов.

Выше порога протекания простейший вариант МСЗ с $h \neq 0$ представляет собой параллельное соединение мостика хорошо проводящей фазы (σ_1) и тонкой прослойки плохо проводящей (σ_2), геометрия которых удовлетворяет соотношениями (2) (основное положение МСЗ)

$$l \sim a_0 |\tau|^{-t+\nu(d-2)}, \quad s \sim a_0^{d-1} |\tau|^{-q-\nu(d-2)}, \tag{2}$$

где l – длина мостика диаметром a_0, S – площадь прослойки, толщиной a_0, a_0 – минимальный размер структуры, t, q, ν – критические индексы проводимости и корреляционной длины, – концентрация хорошо проводящей фазы, p_c – порог протекания, $\tau = (p - p_c)/p_c$.

Ниже порога протекания ($\tau < 0$) прослойка и мостик соединены последовательно.

Вычисляя, согласно МСЗ и токи (подробности для $n=2$ смотри в [7, 8]) в мостике и прослойке, падением напряжения на остальных элементах структуры, при учете только первых с h слагаемых можно пренебречь, получаем с учетом (2).

$$\begin{aligned} C^e(n,d) &\sim C_1(n,d)\tau^{-k_n} + C_2(n,d)h^n\tau^{-W_n}, \quad \tau > 0, \\ C^e(n,d) &\sim C_2(n,d)|\tau|^{-k'_n} + C_1(n,d)h^n|\tau|^{-W'_n}, \quad \tau < 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где критические индексы следующим образом выражаются через индексы, t, q и ν

$$\begin{aligned} k_n &= [2\nu(d-1) - t](n-1), \quad W_n = k'_n + n(t+q), \\ k'_n &= (2\nu - q)(n-1), \quad W'_n = k_n + n(t+q). \end{aligned} \tag{4}$$

Как и для $n=2$, при определенном наборе параметров возможна такая ситуация, когда слагаемые с h в (3) будут доминировать, т. е. произойдет смена критического поведения – поведение с критическим индексом k_n или k'_n сменится поведением с $W_n (W'_n)$.

Учет первых ненулевых по h слагаемых позволяет установить поведение $C^e(n,d)$ на пороге протекания, т. е. при $\tau \sim \Delta$, где $\Delta \sim h^{1/(t+q)}$ – область размазки

$$C^e(n,d) \sim C_1(n,d)h^{-S_n} + C_2(n,d)h^{-Z_n}, \tag{5}$$

где $S_n = k_n(t+q)^{-1}$, $Z_n = k'_n(t+q)^{-1}$.

Подставляя в (6) численные значения критических индексов t, q и ν для разных d легко убедиться, что $S_n > 0$ и $Z_n > 0$, тем

		$n=1$	$n=2$	$n=3$
$-\nu x_n$	$d=2$	1.3(1.3)	1.3(1.1)	1.3(1.02)
	$d=3$	0.9 (1.12)	0.9(1.1)	0.9(1.03)
$-\nu y_n$	$d=2$	1.3(1.3)	4(4)	6.6(6.9)
	$d=3$	1.9(1.75)	5.7(5.62)	9.5(9.3)

самым (5) подтверждает качественные соображения о том, что с увеличением неоднородности среды – ростом $h^{-1}C^e(n,d)$ растет. Отметим так же, что для всех d, кроме $d=2$, $S_n-Z_n\approx 0.3(n-1)$.

Что же касается двумерного случая, то, как показано в [1] на пороге протекания средние значения n-х степеней диссипирующих энергий в обеих фазах одинаковы, следовательно, слагаемые в (5) могут отличаться только за счет отличия $C_1(n,d)$ и $C_2(n,d)$. Действительно, из (6) получаем для $d=2$ $S_n-Z_n=(2\nu-t)\times$
$\times(n-1)/(t+q)\approx(n-1)/2$.

Сравним теперь значения k_n и k'_n (4) с численными значениями, полученными в [10] Введенные в 10 критические индексы x_n и y_n связаны с k_n и k'_n, а тем самым согласно (4) и с t, q и ν следующим способом

$$\nu x_n=(d-2)\nu-t, \quad \nu y_n=-(2n-1)[(d-2)\nu+q]. \tag{7}$$

Выберем значения t, q и ν для двумерного случая $t=q\approx\nu=4/3$ и для трехмерного $t\approx 1.8$, $q\approx 0.98$, $\nu\approx 0.9$. В таблице приведены значения $-\nu x_n$ и $-\nu y_n$ согласно (7), а в скобках даны значения из [10], полученные числовым экспериментом. Сравнение значений показывает, что, несмотря на простоту МСЗ, согласие является удовлетворительным. Приведем, наконец, x_n и y_n для критической размерности $d_c=6$, для которой t, q и ν известны точно: $t=3$, $\nu=0.5$, $q=0$: $x_n=-1$, $y_n=-4(2n-1)$.

В заключение заметим, что учет следующих поправок по малости h в $C^e(n,d)$ приводит к более сложным выражениям, нежели для случая $\sigma^e(n=1)$ [5]

$$\sigma_e\approx\sigma_1\tau^t(A_0+A_1h\tau^{-(t+q)}+\ldots), \quad \tau>0, \tag{8}$$

где A_0, $A_1,\ldots$ – константы не зависящие от h и τ. Эффективная проводимость удовлетворяет гипотезе подобия и может быть выражена через скейлинговую функцию φ: $\sigma^e(\tau,h)=\sigma_1 h^s\varphi(\tau,h^m)$, где $s=t/(t+q)$, $m=1/(t+q)$ [5]. Как показывают подробные расчеты по МСЗ в $C^e(n>1,d)$, в ряде, аналогичном (8), существует не только степенной ряд по параметру $h\tau^{-(t+q)}$, но и ряд по параметру $(h\tau^{-(t+q)})^n$, что приводит к более сложному скейлингованию. Данный вопрос заслуживает отдельного рассмотрения.

Мы благодарим *A. Kolek*, предоставившего нам возможность ознакомиться с его работами до публикации и обсуждение затронутых вопросов, и *A.-M.S. Tremblay* за присылку оттисков его работ.

Список литературы

[1] Дыхне А.М. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. В. 7. С. 110-115.
[2] Rammal R. // J. de Phys. Lett. 1985. V. 46. N 4. L. 129-136.
[3] Rammal R., Tannous C., Tremblay A.-M.S. // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. N 4. P. 2662-2671.
[4] Коган Ш.М. // УФН. 1985. Т. 145. В. 2. С. 285-328.
[5] Efros A.L., Shklovskii B.I. // Phys. Stat. Sol. (b). 1976. V. 76. N 2. h. 475-488.
[6] Tremblay A.-M.S., Fourcade B., Breton P. // Physica A. 1989. V. 157. N 2. P. 89-100.
[7] Морозовский А.Е., Снарский А.А. // Письма ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 2. С. 51-54.
[8] Морозовский А.Е., Снарский А.А. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. В. 5. С. 1844-1849.
[9] Безсуднов И.В., Кучеров С.А., Снарский А.А. Тез. докл. II Всес. конф. „Вычислительная физика и математическое моделирование". Волгоград, 1989. М. 1990. С. 9-11.
[10] Tremblay R.R., Albinet G., Tremblay A.-M.S. // Phys. Rev. B. 1991. V. 43. N 13. P. 11546-11549.
[11] Kolek A. // Phys. Rev. B. 1991 (to be published)
[12] Kolek A. (private communication).
[13] Морозовский А.Е., Снарский А.А. // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. В. 4. С. 871-872.

Поступило в Редакцию
28 января 1992 г.